# Espaces vectoriels

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

## 1 Espaces vectoriels

### 1.1 Définitions et exemples

**Définition 1.** Un ensemble $E$ est appelé $\mathbb{K}$-espace vectoriel (ou espace vectoriel sur $\mathbb{K}$) si:

- Il est muni d'une loi additive $+$ qui vérifie :

  1. Pour tout $(x, y) \in E^2, x + y \in E$ (c'est une loi interne).
  2. Pour tout $(x, y) \in E^2, x + y = y + x$ (elle est commutative)
  3. Il existe $0_E \in E$ tel que $\forall x \in E, x + 0_E = 0_E + x = x$ (elle possède un élément neutre et il est unique).
  4. Pour tout $x \in E$, il existe $y \in E$ tel que $x + y = y + x = 0_E$ (chaque élément possède un inverse pour $+$, on le note $-x$).

  On dit que $E$ muni de la loi $+$ est un groupe commutatif.

- Il existe une multiplication scalaire $\left\{\begin{array}{lll} \mathbb{K} \times E & \to & E \\ (\lambda, x) & \mapsto & \lambda.x \end{array}\right.$ qui vérifie :

  1. $\forall (x, y) \in E^2$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$.
  2. $\forall x \in E$, $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$, $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$
  3. $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$, $\forall x \in E$, $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$.
  4. $\forall x \in E$, $1x = x$.

*Exemples* 1.

1. *Les ensembles suivants sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels:* $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $R^{\mathbb{N}}$, $\mathcal{D}^p(I, \mathbb{R})$, $\mathcal{C}^p(I, \mathbb{R})$, $M_{np}(\mathbb{R})$.
2. *Les ensembles suivants sont des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels:* $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{C}[X]$, $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $\mathcal{D}^p(I, \mathbb{C})$, $\mathcal{C}^p(I, \mathbb{C})$, $M_{np}(\mathbb{C})$.

**Remarque.** *Un $\mathbb{C}$-espace vectoriel est aussi un $\mathbb{R}$-espace vectoriel mais la réciproque est fausse. Par exemple, $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel mais $\mathbb{R}$ n'est pas un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ puisque la multiplication d'un réel par un complexe n'est pas un élément de $\mathbb{R}$.*

Dans toute la suite du chapitre, $E$ désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

**Proposition 1.**
Pour tout $x \in E$, $\lambda \in \mathbb{K}$, on a

$$\lambda x = 0_E \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ ou } x = 0_E.$$

**Proposition 2.**
Pour tout $x \in E$, $-x = (-1).x$.

**Proposition 3.**
Soient $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-ev, alors $E \times F$ muni de l'addition coordonnée par coordonnée et de la multiplication externe est un $\mathbb{K}$-ev.

**Définition 2.** Soient $E$ un $\mathbb{K}$-ev, on appelle combinaison linéaire un élément de la forme $\lambda u + \mu v$ où $u$ et $v$ sont deux éléments de $E$ et $\lambda, \mu$ deux scalaires de $\mathbb{K}$.

**Remarque.** *Toute combinaison linéaire d'éléments de $E$ est un élément de $E$.*

### 1.2 Sous-espace vectoriel

**Définition 3.** Un sous-ensemble non vide $F$ de $E$ est un sous-espace vectoriel de $E$ s'il vérifie :

$$\forall (x,y) \in F^2, \forall\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ \lambda x + \mu y \in F.$$

Autrement dit, toute combinaison linéaire d'éléments de $F$ est un élément de $F$.

*Exemple* 2. $F = \{P \in \mathbb{R}[X], P(1) = 0\}$ *est-il un ssev?*

**Proposition 4.**
Un sous-ensemble non vide $F$ de $E$ est un sous-espace vectoriel de $E$ si et seulement si

$$\forall (x,y) \in F^2, \forall\ \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda x + y \in F.$$

*Exemples* 3.

1. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y = 3x\}$ *est-il un ssev?*
2. *Soit $a$ une fonction continue sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$ , alors $F = \{f \in \mathcal{D}(I,R), f' + af = 0\}$ est un ssev de $\mathcal{D}(I,R)$.*
3. *L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène est un ssev.*
4. $\{P \in \mathbb{R}[X], P(2) = 0\}$ *est-il un ssev de $\mathbb{R}[X]$?*
5. $\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} + 3u_n = 0\}$ *est-il un ssev de $\mathbb{R}^N$.*

**Remarques.**
1. *Si $F$ est un sous-ev, on a toujours $0_E \in F$.*
2. *Un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est lui-même un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. En pratique, pour montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel, on montrera souvent que c'est un ssev d'un ev classique. Par exemple, $\mathbb{R}[X]$ peut être identifié à un ssev des suites réelles c'est-à-dire à $\mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{R})$.*

*Exemples* 4.

1. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y = 3x + 2\}$ *est-il un ssev?*
2. *Montrer que $\mathbb{R}_n[X]$ est un ev.*

### 1.3 Sous-espace engendré par une partie

**Définition 4.** Soit $A$ une partie de $E$. On appelle espace engendré par $A$, noté $\mathrm{Vect}(A)$, le plus petit sous-ev (au sens de l'inclusion) contenant $A$.

Pour montrer son existence, on considère l'ensemble $V = \{F \text{ ssev de } E, A \subset F\}$. Cet ensemble est non-vide car il contient $E$ et on montre que l'ensemble $\bigcap\limits_{F \in V} F$ est le minimum de cet ensemble.

Cette définition comme une intersection infinie sert juste à montrer l'existence de $\mathrm{Vect}(A)$ et n'est pas utilisée en pratique.

**Notation:** On écrit $\mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_n)$ au lieu de $\mathrm{Vect}\left(\{v_1, \dots, v_n\}\right)$

**Proposition 5.**
Si $A \subset F$ avec $F$ un sous-espace vectoriel, alors $\mathrm{Vect}(A) \subset F$.

*Exemple* 5. $\mathbb{R}_1[X] = \mathit{Vect}(1, X)$.

**Définition 5.** On dit que $A$ est une partie génératrice de $\mathrm{Vect}(A)$.

En pratique, on utilise souvent la caractérisation suivante :

**Proposition 6.**
On se donne une partie $A$ de $E$, alors $\mathrm{Vect}(A)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des éléments de $A$.

**Remarque.** *une combinaison linéaire est toujours une somme finie !*

*Exemple* 6. $\mathit{Vect}(X+1, 2X+3) = \mathbb{R}_1[X]$.

## 2 Famille

### 2.1 Définitions

**Définition 6.** Une famille de $E$ est la donnée d'une liste finie $(x_1, \dots, x_n)$ de vecteurs de $E$.

**Remarque.** *Une famille est, par défaut, finie. Lorsque l'on voudra parler de famille infinie, on le précisera.*

*Exemples* 7.

1. $(1, X, X^2)$ *et* $(X^2, 1, X)$ *sont des familles de* $\mathbb{R}[X]$.
2. $(1, id)$ *est une famille de l'ensemble des fonctions.*
3. $((1,0,-1), (3,2,1), (4,3,-1), (1,4,-3))$ *est une famille de* $\mathbb{R}^3$.

### 2.2 Famille libre

**Définition 7.** On dit qu'une famille est libre si une combinaison linéaire nulle de la famille ne peut être réalisée que lorsque tous les coefficients sont nuls.

Autrement dit, $(x_1, \dots, x_n)$ est une famille libre si :

$$\left(\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0_E\right) \Rightarrow \left(\forall i \in [\![1, n]\!], \lambda_i = 0\right).$$

⚠ Le sens $\Leftarrow$ est toujours vrai, inutile de le montrer.

<u>En pratique:</u> On se donne une CL nulle $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0_E$ de la famille et on montre que les coefficients sont nuls.

*Exemples* 8.

1. $(1, X, X^3)$.
2. $(X+1, X-1, 1)$.
3. $(v_1, v_2, v_3)$ *avec* $v_1 = (1,0,0), v_2 = (0,1,0), v_3 = (0,0,1)$.
4. $(cos, sin)$.
5. $(f_k)_{k \in [\![1,n]\!]}$, $f_k : x \mapsto e^{kx}$.

**Remarque.** *Dans le cas d'une famille infinie, elle est libre si toute sous-famille finie l'est. On se donne donc une CL (donc finie) d'éléments de la famille et on montre que les coefficients sont nuls.*

**Définition 8.** On dit qu'une famille est liée si elle n'est pas libre.

**Proposition 7.**
Une famille de DEUX vecteurs est libre si et seulement si les deux vecteurs ne sont pas colinéaires.

⚠ C'est faux dès que l'on considère une famille avec davantage d'éléments.

**Proposition 8.**
Une famille dont un vecteur est combinaison linéaire d'autres vecteurs de la famille est liée. En particulier, une famille contenant le vecteur nul est liée.

*Exemples* 9.

1. $((1,-1), (1,1), (-1,1))$ *est-elle libre?*
2. $(X^2+1, X-2, X^2-X+1)$ *est-elle libre?*

**Proposition 9.**

- Une famille libre ne contient jamais le vecteur nul.
- Une famille de polynômes non nuls de degré distincts est libre.
- Une famille de vecteurs échelonnés non nuls de $\mathbb{R}^n$ est libre.

*Exemples* 10.

1. $(4, X^3+2X-1, X^2+6X+9)$.
2. $((1,2,-1),(2,-1,0),(3,0,0))$
3. $((1,0,1),(0,1,1),(1,1,0))$.

**Proposition 10.**
On ne modifie pas le caractère libre d'une famille en la modifiant par une opérations élémentaires :

- Permutation de deux éléments
- Ajouter à un élément un multiple d'un autre élément (ou une CL d'autres éléments)
- Multiplier un élément par un scalaire non nul.

*Exemples* 11.
1. *Que dire de la famille* $((1,0,0),(1,1,1),(1,1,0))$ *?*
2. *Que dire de la famille* $(X^2+X+1, X^2+3, 1)$ *?*

**Proposition 11.**
Soit $(x_1,\dots,x_n)$ une famille de $E$. Toute combinaison linéaire de cette famille s'écrit de manière unique si et seulement si la famille est libre.

Autrement dit, si $(x_1,\dots,x_n)$ est libre, alors pour tout $u \in \mathrm{Vect}(x_1,\dots,x_n)$, il existe un unique $(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $u = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$.

### 2.3 Famille génératrice

**Définition 9.** Soit $F$ un sous-ev de $E$. On dit qu'une famille $(v_1,\dots,v_n)$ est une famille génératrice de $F$ si $F = \mathrm{Vect}(A)$ avec $A = \{v_1,\dots,v_n\}$.

Autrement dit, d'après la caractérisation vu ci-dessus, $(v_1,\dots,v_n)$ est une famille génératrice de $F$ si tout élément de $F$ s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs $v_i$ de la famille.

L'écriture n'a pas de raison d'être unique! Il peut même y avoir des redondances dans la famille.

*Exemple* 12. $(X^2, 1, X^2, X, 1)$ *est une famille génératrice de* $\mathbb{R}_2[X]$.

**Remarque.** *Si* $v_1 = (x_1,\dots,x_n)$, *on écrit Vect*$(x_1,\dots,x_n)$ *(et non pas Vect*$((x_1,\dots,x_n))$*) pour Vect*$(v_1)$.

**Proposition 12.**
- On ne modifie pas le caractère générateur d'une famille en la modifiant par une opérations élémentaires.
- On ne modifie pas le caractère générateur d'une famille en enlevant une CL de vecteurs, en particulier une répétition ou le vecteur $0_E$.

*Exemples* 13.

1. *$(X+1, X+3, 1, X-1)$ engendre $\mathbb{R}_1[X]$.*
2. *La famille $((1,-1,0),(2,1,0),(1,2,0))$ engendre-t-elle $\mathbb{R}^3$ ?*
3. *Déterminer une famille génératrice de $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X], P(2) = 0\}$.*
4. *Déterminer une famille génératrice de $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x+2y = 0\}$.*
5. *Déterminer une famille génératrice de $H = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, x+y+z-t = 0 = x+2y+z+t\}$*

### 2.4 Base

**Définition 10.** Soit $F$ un ss-ev de $E$. On dit qu'une famille $(x_1, \dots, x_n)$ est une base de $F$ si elle est libre et génératrice de $F$.

**Proposition 13.**
Soit $F$ un ss-ev de $E$ et $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de $F$. Cette famille est une base de $F$ si et seulement si tout élément de $F$ s'écrit, de manière unique, comme combinaison linéaire de la famille.

On applique les résultats montrés pour libre et génératrice.

*Exemples* 14.

1. *Base canonique de $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{R}_n[X]$.*
2. *$((X-1)^2, (X+1)^2, X^2-1)$.*
3. *Déterminer une base de $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X], P(2) = 0\}$.*
4. *Déterminer une base de $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x+2y = 0\}$.*
5. *Déterminer une base de $H = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, x+y+z-t = 0 = x+2y+z+t\}$*
6. *Déterminer une base de Vect$(X+1, X+3, X^2-1, X^2+X+1)$.*
7. *Déterminer une base de Vect$(X^2+X, X^3+2X, X^2+4X, X^3-2X^2+3X)$.*

**Définition 11.** Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de $E$. Alors, pour tout $x \in E$, il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$. Les scalaires $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ sont appelés coordonnées de $x$ dans la base $E$.

*Exemples* 15.

1. *Coordonnées d'un poly dans $(1, X, X^2)$? $(X^2, X, 1)$?*
2. *Poly dont les coordonnées dans $(1+X, 2-X^2, 4)$ sont $(1,2,3)$?*
3. *Que dire d'un vecteur dont les coordonnées dans une base quelconque sont nuls?*

# 3 Somme et supplémentaire

## 3.1 Somme et intersection

**Définition 12.** Soit $E$ un espace vectoriel, $F$ et $G$ deux ssev de $E$. On appelle somme de $F$ et $G$, noté $F+G$ l'ensemble :

$$F+G=\{x+y,(x,y)\in F\times G\}\,.$$

**Remarque:** On a $F+G\subset E$ car $E$ est stable par somme.

> **Proposition 14.**
> Si $F$ et $G$ sont deux ssev d'un ev E, alors $F+G$ est également un ssev de $E$.

Tout élément de $F+G$ s'écrit comme la somme d'un élément de $F$ et d'un élément de $G$ mais l'écriture n'est pas forcément unique

*Exemples* 16.

1. *Soit* $F=\text{Vect}(X^2-1,X-1)$ *et* $G=\mathbb{R}_1[X]$, *alors* $X^2+X+3=\underbrace{X^2-1}_{\in F}+\underbrace{X+4}_{\in G}=\underbrace{X^2-1+X-1}_{\in F}+\underbrace{5}_{\in G}$.

2. *Soit* $F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,x-y-z=0\}$ *et* $G=\text{Vect}\left((1,1,0),(1,0,0)\right)$. *Alors* $(1,1,1)=\underbrace{(1,0,1)}_{\in F}+\underbrace{(1,1,0)-(1,0,0)}_{\in G}=\underbrace{(2,1,1}_{\in F}-\underbrace{(1,0,0)}_{\in G}$.

> **Proposition 15.**
> Soit $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels admettant $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ pour bases, la concaténation de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ est une famille génératrice de $F+G$. Autrement dit $\text{Vect}\,(\mathcal{B},\mathcal{B}')=F+G$.

La famille $(\mathcal{B},\mathcal{B}')$ n'est pas nécessairement une base de $F+G$ !

*Exemples* 17.

1. $F=\mathbb{R}_1[X]$, $G=\text{Vect}(X^2+X+1)$, *alors* $F+G=\mathbb{R}_2[X]$ *et* $(1,X,X^2+X+1)$ *est une famille génératrice de* $\mathbb{R}_2[X]$, *c'en est même une base vu que la famille est libre (degré distincts).*

2. $F=\mathbb{R}_1[X]$, $G=\text{Vect}\,(X^2+X+1,X+3)$ *alors* $F+G=\mathbb{R}_2[X]$ *et* $(1,X,X^2+X+1,X+3)$ *est une famille génératrice (mais ce n'est pas une famille libre puisque* $X+3$ *est CL des deux premiers vecteurs).*

> **Proposition 16.**
> Soit $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels de $E$, alors $F\cap G$ est un ssev de $E$.

### 3.2 Somme directe

**Définition 13.** Soit $F$ et $G$ deux ssevs d'un ev $E$, on dit que $F$ et $G$ sont en somme directe si $F \cap G = \{0_E\}$. On note alors $F \oplus G$.

**Remarque.** *On peut noter $F + G$ si $F$ et $G$ sont en somme directe mais qu'on ne le sait pas encore ou que l'on ne souhaite pas le préciser !*

Pour montrer que deux ssev sont en somme directe, on prend un élément de l'intersection et on montre que c'est le vecteur nul. En effet, l'intersection contient toujours le vecteur nul, il suffit de montrer l'autre inclusion.

*Exemples* 18.

1. *$\mathbb{R}_1[X]$ et Vect$(X^3 + X)$ sont en somme directe.*
2. *Vect$\left((1,1,0)\right)$ et Vect$\left((2,-1,1)\right)$ aussi.*

**Proposition 17.**
Soit $F$ et $G$ deux ssevs d'un ev $E$ alors

$F$ et $G$ sont en somme directe si et seulement si tout élément de $F + G$ s'écrit de manière unique comme la somme d'un élément de $F$ et d'un élément de $G$.

*Exemple* 19. *Les ssev $\mathbb{R}_1[X]$ et Vect$(X^2 + X + 1)$ sont en somme directe.*

**Définition 14.** Soit $F_1, \ldots, F_r$ des sous-espaces vectoriels de $E$. On dit qu'ils sont en somme directe et on note $\bigoplus_{i=1}^{r} F_i$ si tout élément de $F_1 + \ldots + F_r$ s'écrit, de manière unique, comme la somme d'éléments des $F_i$.

**Proposition 18.**
Soit $F_1, \ldots, F_r$ des sous-espaces vectoriels de $E$. Pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, on se donne une base $\mathcal{B}_i$ de $F_i$. Alors

$$(\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_r) \text{ est libre } \Leftrightarrow \text{ les } F_i \text{ sont en somme directe}$$

Comme on sait déjà que la concaténation des bases est une famille génératrice de la somme, on a :

**Corollaire 19.**
Soit $F_1, \ldots, F_r$ des sous-espaces vectoriels de $E$. Pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, on se donne une base $\mathcal{B}_i$ de $F_i$. Alors

$$(\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_r) \text{ est une base de } F_1 + \ldots + F_r \Leftrightarrow \text{ les } F_i \text{ sont en somme directe}$$

On le montrera dans le cas de la dimension finie.

*Exemples* 20.

1. *Montrer que $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, z = 0\}$ et $G =$ Vect$(1, 1, 1)$ sont en somme directe.*

2. *Montrer que* $\mathbb{R}_1[X]$ *et* $Vect(X^2+X+1)$ *sont en somme directe.*

**Définition 15.** Soit $F$ et $G$ deux espaces vectoriels en somme directe. On dit qu'une base est adaptée à la somme directe $F \oplus G$ si elle est la concaténation d'une base de $F$ et d'une base de $G$.

*Exemple* 21. *La famille* $(1, X, X^2+X+1)$ *est une base de* $\mathbb{R}_2[X]$ *adaptée à la somme directe* $\mathbb{R}_1[X] \oplus Vect(X^2+X+1) = \mathbb{R}_2[X]$.

### 3.3 Supplémentaire

**Définition 16.** Soit $E$ un espace vectoriel et $F$ un sous-espace vectoriel de $E$. On dit qu'un sous-espace vectoriel $G$ de $E$ est un supplémentaire de $F$ dans $E$ (ou que $F$ et $G$ sont supplémentaires dans $E$ si $F \oplus G = E$.
L'égalité signifie que $F$ et $G$ sont en somme directe ET que cette somme est égale à $E$.

Le complémentaire de $F$ est $E \setminus F$ et ce n'est pas un ssev.

**Remarques**

- On parle de supplémentaire DANS $E$ car on a besoin de savoir à quoi est égale la somme directe.
- On parle d'UN supplémentaire de $F$ car il existe une infinité de supplémentaires dans $E$.

*Exemples* 22.

1. *On se place dans le plan* $\mathbb{R}^2$, *on note* $F$ *une droite passant par* $0$. *Alors toute droite passant par* $0$, *distincte de* $F$ *est un supplémentaire de* $F$ *dans* $\mathbb{R}^2$.
   *Le complémentaire de* $F$, *c'est le plan privé de la droite et ce n'est PAS un sous-espace vectoriel puisqu'il ne contient pas* $0$.
2. $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, z = 0\}$ *et* $G = Vect(1,1,1)$ *sont supplémentaires dans* $\mathbb{R}^3$.
3. $\mathbb{R}_1[X]$ *et* $Vect(X^2+X+1)$ *sont supplémentaires dans* $\mathbb{R}_2[X]$.

**Proposition 20.**
Soit $E$ un espace vectoriel, $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels de $E$. Alors

$$F \text{ et } G \text{ sont supplémentaires dans } E \Leftrightarrow \forall x \in E, \exists!(a,b) \in F \times G, x = a + b.$$

*Exemples* 23.

1. *Soit* $F$ *l'ensemble des fonctions paires et* $G$ *l'ensemble des fonctions impaires. Alors* $F$ *et* $G$ *sont supplémentaires dans l'ensemble des fonctions de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$.
2. *Soit* $F$ *l'ensemble des fonctions qui s'annule en 0 et* $G$ *l'ensemble des fonctions constantes. Alors* $F$ *et* $G$ *sont supplémentaires dans l'ensemble des fonctions de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$.
3. *Soit* $F$ *l'ensemble des fonctions qui s'annule en* $0$ *et* $1$ *et* $G$ *l'ensemble des fonctions affines, alors* $F$ *et* $G$ *sont supplémentaires dans l'ensemble des fonctions de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$.