Indications

1 Prendre deux éléments $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de F et montrer que $(\lambda u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à F.

2 Prendre deux éléments f et g de F et montrer que $\lambda f + g$ est un élément de F.

3 Remarquer que $A \cap B \subset \mathrm{Vect}(A) \cap \mathrm{Vect}(B)$ pour l'inclusion. Trouver un contre-exemple avec $A \cap B = \emptyset$ et $\mathrm{Vect}(A) = \mathrm{Vect}(B)$.

5 Montrer, par analyse/synthèse, que tout fonction continue s'écrit comme la somme d'un élément de F et d'un élément de G puis montrer que F et G sont en somme directe.

6 Prendre un élément de l'intersection et montrer qu'il est nul.

7 Que faut-il soustraire à un élément quelconque de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ pour qu'il appartienne à F?

8 Que faut-il soustraire à une suite quelconque pour qu'elle appartienne à F?

9 Penser à la division euclidienne.

10 Poser des réels α_i tels que $\forall x \in [0, 2\pi]$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} \alpha_k f_k(x) = 0$ et prendre des valeurs particulières de x.

11 Poser des réels α_i tels que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1 1 + \alpha_2 n^2 + \alpha_3 2^n = 0$ et prendre des valeurs particulières de n.

12 Prendre une combinaison linéaire nulle de la famille et faire apparaître une combinaison linéaire de la famille (x, y, z).

13 Déterminer la forme générale des éléments de chaque ensemble.

14 Montrer que pour tout $(x, y) \in E^2$, $\lambda_x = \lambda_y$, que (x, y) soit libre ou non.

15 Poser une CL nulle et appliquer f^{n-1}.

17
1. Prendre deux éléments $(P, Q) \in F_\alpha^2$ et montrer que $\lambda P + Q$ s'annule en α.
2. Traduire l'appartenance à l'intersection selon que $\alpha = \beta$ ou non.

18 Prendre deux éléments f et g dans F et montrer que $\lambda f + g \in F$.

19 Raisonner par analyse/synthèse.

20 Raisonner par analyse/synthèse.

21 Chercher du côté des fonctions affines.

22 Faites la division euclidienne par $(X-1)(X-2)$.

23 Poser des réels α_i tels que $\forall x \in [0, 2\pi]$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} \alpha_k f_k(x) = 0$ et prendre des valeurs particulières de x.

25
1. Montrer une inclusion puis montrer qu'elle est stricte.
2. Montrer une inclusion puis montrer qu'elle est stricte.
3. Montrer l'égalité par double inclusion.

26 Utiliser les polynômes de Lagrange.

27 1. Se ramener à un système de Cramer.
2. Procéder par double inclusion en utilisant les T_i.