Lycée du Parc
PCSI 842 Année 2024-2025
DS 7

Devoir d'entrainement 7.

Exercice 1 (sujet 1)**.** On pose : $A = (X+1)^{2n} - 1$, polynôme de $\mathbb{R}[X]$.

1. Montrer que l'on peut écrire $A = X \times B$ où B est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ dont on précisera le degré, le coefficient dominant et le terme constant noté b_0.
2. Déterminer les racines de A dans $\mathbb{C}$. On posera $z_0 = 0$ et les autres racines $z_1, z_2, \ldots, z_{2n-1}$ seront mises sous la forme $\rho_k e^{i\alpha_k}$ avec $(\rho_k, \alpha_k) \in \mathbb{R}^2$.
3. Déterminer la somme des racines de A et vérifier la cohérence du résultat avec les coefficients de A.

   On pose $P_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{2n}$.
4. Montrer, à l'aide d'un changement d'indice, que $P_n = \displaystyle\prod_{k=n+1}^{2n-1} \sin \frac{k\pi}{2n}$.

   En déduire que, si $Q_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{2n-1} \sin \frac{k\pi}{2n}$, alors $P_n = \sqrt{Q_n}$.
5. Calculer de deux façons : $\displaystyle\prod_{k=1}^{2n-1} z_k$.
6. En déduire Q_n et enfin, P_n.

Exercice 2 (sujet 1)**.** On dit qu'une suite (B_n) de $\mathbb{R}[X]$ est une suite de polynômes de Bernoulli si elle vérifie les propriétés suivantes :

$$(P_1) \begin{cases} \bullet B_0 = 1 \\ \bullet \forall n \in \mathbb{N}, B'_{n+1} = B_n \\ \bullet \forall n \geqslant 2, B_n(0) = B_n(1) \end{cases} .$$

1. Soit (B_n) une suite de polynômes de Bernoulli.
   (a) Montrer que nécessairement $B_1 = X - \dfrac{1}{2}$ et $B_2 = \dfrac{X^2}{2} - \dfrac{X}{2} + \dfrac{1}{12}$.
   (b) Déterminer B_3.
2. Le but de cette question est de montrer qu'il existe une et une seule suite de polynômes qui vérifie les propriétés (P_1).
   (a) Si P est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$, montrer qu'il existe un et un seul polynôme Q de $\mathbb{R}[X]$ tel que $Q' = P$ et $\displaystyle\int_0^1 Q(t)\,\mathrm{d}t = 0$.
   On note alors L l'application de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ qui à P associe Q.
   (b) Montrer qu'une suite de polynômes vérifie les propriétés (P_1) si et seulement si elle vérifie les propriétés suivantes notées (P_2).
   — $B_0 = 1$
   — $\forall n \in \mathbb{N}, B_{n+1} = L(B_n)$.
   (c) En déduire qu'il existe une unique suite de polynômes qui vérifie les propriétés (P_1).

On notera désormais cette suite (B_n) et on l'appellera **la** suite de polynômes de Bernoulli.

3. Déduire de la question 2 que, pour tout entier naturel n, $B_n(X) = (-1)^n B_n(1-X)$.
4. On pose, pour tout n, $b_n = B_n(0)$; b_n s'appelle le $(n+1)$-ième nombre de Bernoulli.
   (a) Calculer b_0, b_1, b_2, b_3.
   (b) Montrer que pour tout entier impair $n \geqslant 3$, $b_n = 0$.

Exercice 3 (sujet 2)**.** pour tout entier naturel non nul n, on pose $P_n(X) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(2k)!} X^{2k}$

Dans les questions 1) et 2), n est un entier naturel non nul fixé.

1. Soit A le polynôme tel que $A(X^2) = P_n(X)$. On note $z_1, z_2, \cdots, z_{n-1}$ la liste des racines de A comptées avec multiplicité dans A.
   (a) Donnez la forme développée de A (sous forme de somme).
   (b) Exprimez en fonction de n la somme et le produit des $(z_k)_{1 \leqslant k \leqslant n-1}$.
   (c) Quel est un lien simple entre les racines de A et celles de P_n ?
2. (a) Vérifiez que :
$$P_n'' + P_n = \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-2)!} X^{2n-2}$$
   (b) Déduisez-en que les racines de P_n sont de multiplicité 1 ou 2.
   (c) Montrez que P_n a au moins $n-1$ racines distinctes complexes.
3. Soit u la suite définie par :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{n^n}{n! e^n}$$
   (a) Vérifiez que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leqslant e$.
   (b) Déduisez-en que u est décroissante et que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{n^n}{n! e^n} \leqslant \frac{1}{e}$
4. On fixe de nouveau un entier naturel non nul n.
   (a) Vérifiez que :
$$P_n = \sum_{j=0}^{2n-2} \frac{\cos^{(j)}(0)}{j!} X^j$$
   (b) Grâce à l'inégalité de Taylor-Lagrange, on peut en déduire que (vous l'admettrez) :
$$\forall x \in \mathbb{R}, |P_n(x) - \cos(x)| \leqslant \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$
   Déduisez-en que :
$$\forall x \in \left[0, \frac{2n}{e}\right], |P_n(x) - \cos(x)| \leqslant 1/e$$
   (c) Déduisez-en que pour tout entier k dans $[0, 2n/(e\pi)]$, $P_n(k\pi)$ est du signe de $(-1)^k$ et qu'il est non nul.
   (d) Montrez enfin que P_n a au moins $2\left\lfloor \frac{2n}{e\pi} \right\rfloor$ racines distinctes réelles, où $\lfloor t \rfloor$ désigne la partie entière du réel t.
5. Soit k un entier naturel fixé et $I_k = [k\pi, (k+1)\pi]$.
   (a) Montrez que, pour n assez grand, P_n admet au moins une racine dans I_k, que l'on notera x_n.
   (b) Montrez que : $\cos(x_n) \to 0$ en utilisant l'inégalité donnée plus haut.

(c) Vérifiez que :
$$\forall x \in I_k, x = \arccos((-1)^k \cos(x)) + k\pi$$

(d) Déduisez-en que $x_n \to k\pi + \frac{\pi}{2}$.

Exercice 4 (sujet 2)**.** On pose pour tout $x > 1$, $\zeta(x) = \lim\limits_{N\to+\infty} \sum\limits_{n=1}^{N} \dfrac{1}{n^x}$.

$\mathbb{R}[X]$ est l'ensemble des polynômes à coefficients réels.

Objectif :

Le but du problème est de calculer les valeurs de $\zeta(2k)$ ou k est un entier non nul.

On dit qu'une suite (B_n) de $\mathbb{R}[X]$ est une suite de polynômes de Bernoulli si elle vérifie les propriétés suivantes :

$$(P_1)\ \begin{cases} \bullet B_0 = 1 \\ \bullet \forall n \in \mathbb{N}, B'_{n+1} = B_n \\ \bullet \forall n \geqslant 2, B_n(0) = B_n(1) \end{cases}.$$

Polynômes et nombre de Bernoulli

1. Soit (B_n) une suite de polynômes de Bernoulli.
   (a) Montrer que nécessairement $B_1 = X - \dfrac{1}{2}$ et $B_2 = \dfrac{X^2}{2} - \dfrac{X}{2} + \dfrac{1}{12}$.
   (b) Déterminer B_3 et B_4.
2. Le but de cette question est de montrer qu'il existe une et une seule suite de polynômes qui vérifie les propriétés (P_1).
   (a) Si P est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$, montrer qu'il existe un et un seul polynôme Q de $\mathbb{R}[X]$ tel que $Q' = P$ et $\displaystyle\int_0^1 Q(t)\,\mathrm{d}t = 0$.
   On note alors L l'application de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ qui à P associe Q.
   (b) Montrer qu'une suite de polynômes vérifie les propriétés (P_1) si et seulement si elle vérifie les propriétés suivantes notées (P_2).
   — $B_0 = 1$
   — $\forall n \in \mathbb{N}, B_{n+1} = L(B_n)$.
   (c) En déduire qu'il existe une unique suite de polynômes qui vérifie les propriétés (P_1).
   On notera désormais cette suite (B_n) et on l'appellera **la** suite de polynômes de Bernoulli.
3. Déduire de la question 2 que, pour tout entier naturel n, $B_n(X) = (-1)^n B_n(1-X)$.
4. On pose, pour tout n, $b_n = B_n(0)$; b_n s'appelle le $(n+1)$-ième nombre de Bernoulli.
   (a) Calculer b_0, b_1, b_2, b_3, b_4.
   (b) Montrer que pour tout entier impair $n \geqslant 3$, $b_n = 0$.

Application au calcul de $\zeta(2k)$

Soit k un entier naturel non nul.

5. On pose $\alpha_0(k) = \displaystyle\int_0^1 B_{2k}(t)\,\mathrm{d}t$. Calculer $\alpha_0(k)$.
6. On pose $\forall n \geqslant 1, \alpha_n(k) = 2\displaystyle\int_0^1 B_{2k}(t)\cos(2\pi n t)\,\mathrm{d}t$

(a) Montrer que $\forall n \geqslant 1$, $\alpha_n(1) = \dfrac{2}{(2\pi n)^2}$.

(b) Montrer que $\forall n \geqslant 1$, $\forall k \geqslant 2$, $\alpha_n(k) = -\dfrac{1}{(2\pi n)^2}\alpha_n(k-1)$.

(c) En déduire la valeur de $\alpha_n(k)$ pour tout $n, k \geqslant 1$.

On admet que pour tout $x \in [0, 2\pi[$, on a

$$B_{2k}\left(\frac{x}{2\pi}\right) = \lim_{N\to+\infty}\left(\alpha_0(k) + \sum_{n=1}^{N}\alpha_n(k)\cos(nx)\right)$$

7. (a) Déterminer, pour $k \geqslant 1$, une relation entre $\zeta(2k)$ et b_{2k}.

   (b) Calculer $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2}$ et $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^4}$.

Exercice 5 (sujet 1)**.** Soit n un entier supérieur ou égal à 3 ; soit $P_n(X)$ le polynôme défini par la relation suivante :

$$P_n(X) = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1.$$

1. Démontrer que ce polynôme P_n est divisible par le polynôme $(X-1)^2$.
2. Soit $p \in \mathbb{N}^\star$. Rappeler, en la justifiant, la factorisation, du polynôme $X^p - 1$ au moyen du polynôme $X-1$.
3. Déterminer la factorisation de $P_n(X)$ au moyen de $(X-1)$ et d'un polynôme $Q(X)$.
4. Factoriser à son tour le polynôme $Q(X)$ par $(X-1)$ en faisant apparaître des polynômes du type $X^p - 1$. On explicitera les coefficients du quotient.
5. En déduire l'expression du quotient de P_n par $(X-1)^2$.

Exercice 6 (sujet 1)**.** Pour tout réel $x > 0$ et entier $n \geqslant 3$, on pose : $f_n(x) = x - n\ln(x)$.

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle ouvert $]0, 2[$. On appellera désormais a_n cette solution.
2. Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante
3. Montrer que cette suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 1.
4. Soit Φ la fonction telle que $\Phi(t) = \dfrac{\ln(1+t)}{1+t}$ avec t réel strictement supérieur à -1.
   Déterminer le développement limité de Φ à l'ordre 2 au voisinage de 0.
5. Montrer que, sur l'intervalle $]-1, e-1[$, la fonction Φ induit une bijection ;
   on note Ψ sa réciproque .
6. Dresser le tableau de variations de Ψ.
7. Déterminer le développement limité de Ψ à l'ordre 2 au voisinage de 0.
8. Déterminer des constantes A, B et C telles que $a_n = A + \dfrac{B}{n} + \dfrac{C}{n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Exercice 7 (sujet 1)**.**

On considère l'application f définie sur $]-1; +\infty[$ par :

$$f(x) = x + 1 - e^{\frac{x}{x+1}}.$$

On appelle (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal.

1. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2. Démontrer que la droite (D) d'équation : $y = x - e + 1$ est asymptote à la courbe (C). Préciser la position relative de (D) et (C).

3. Pour $x \in]-1;+\infty[$, calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.

4. En déduire le sens de variation de f'.
5. Dresser le tableau de variation de f'.

6. Démontrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet exactement une solution non nulle sur $]-1;+\infty[$.
   Dans la suite du problème, on notera α la solution non nulle.
7. Étudier les variations de f.
8. Montrer que $f(\alpha) = -\alpha(\alpha+1)$.
9. Dresser le tableau de variation de f.
10. Prolongement de f en -1.

    (a) montrer que f est prolongeable par continuité en -1. On note g son prolongement continu et (C') sa courbe.

    (b) Montrer que g est dérivable en -1, et préciser $g'(-1)$.

    (c) Donner une équation de la tangente à (C') en chacun des points d'abscisses $-1, \alpha, 0$.

Exercice 8 (sujet 2)**.** L'objectif est d'obtenir un DL en 0 de $f : x \mapsto \mathrm{sh}(\arcsin x)$.

1. Détermination d'un DL à un ordre raisonnable.

   (a) Déterminer le DL en 0 à l'ordre 5 de $\arcsin x$.

   (b) En déduire le DL en 0 à l'ordre 5 de f.

Obtention d'une équation différentielle

2. Justifier que f est de classe C^∞ sur $]-1,1[$.
3. Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.
4. Montrer que $\left(1-x^2\right) f''(x) - x f'(x) - f(x)$ est une constante à expliciter.

Utilisation de cette équation différentielle

5. Justifier qu'il existe une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que l'on peut écrire, quand $x \to 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$.
6. Montrer que $f'(x) = \sum_{k=0}^{n+1} k a_k x^{k-1} + o(x^n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   On admet qu'on a de même $f''(x) = \sum_{k=0}^{n+2} k(k-1) a_k x^{k-2} + o(x^n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
7. Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer à l'aide de certains termes de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ le coefficient c_n en x^n du DL en 0 de $\left(1-x^2\right) f''(x) - x f'(x) - f(x)$
8. En déduire que $a_{n+2} = \dfrac{n^2+1}{(n+1)(n+2)} a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
9. Déterminer a_0 et a_1.
10. Déduire des questions précédentes la valeur des a_{2n} pour tout $n \in \mathbb{N}$.
11. Donner une formule de récurrence pour les a_{2n+1}. En déduire a_3 et a_5 et vérifier la cohérence des résultats.
12. Donner un DL7 en 0 de f.

Correction du devoir d'entrainement n 7

Exercice 1 1. D'après la formule du binôme de Newton, on a $A = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} X^k - 1 = \sum_{k=1}^{2n} \binom{2n}{k} X^k = XB$ avec $B = \sum_{k=1}^{2n} \binom{2n}{k} X^{k-1}$. Le polynôme B est de degré $2n-1$, son coefficient dominant est $C_{2n}^{2n} = 1$ et son terme constant b_0 vaut $C_{2n}^1 = 2n$.

2. z est racine de A si et seulement si $(z+1)^{2n} = 1$ ce qui équivaut à $z+1 = \exp\left(\frac{2ik\pi}{2n}\right)$ où k est un entier compris entre 1 et $2n-1$.

   Donc les racines de A sont $z_0 = 0$ et $z_k = \exp\left(\frac{2ik\pi}{2n}\right) - 1$ avec k est un entier compris entre 1 et $2n-1$.

   Remarquons que pour tout entier k compris entre 1 et $2n-1$:

$$\begin{aligned} z_k &= \exp\left(\frac{ik\pi}{2n}\right)\left(\exp\left(\frac{ik\pi}{2n}\right) - \exp\left(-\frac{ik\pi}{2n}\right)\right) \\ &= 2i\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\exp\left(\frac{ik\pi}{2n}\right) \\ &= 2\sin\left(\tfrac{k\pi}{2n}\right)\exp\left(\tfrac{ik\pi}{2n} + i\tfrac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

3. On a $\sum_{k=0}^{2n-1} z_k = \sum_{k=0}^{2n-1} \left(\exp\left(\frac{2ik\pi}{2n}\right) - 1\right) = 0 - 2n$. car la somme des racines $2n$ième de l'unité est nulle.

   Par ailleurs, A est unitaire et le coefficient de son terme d'indice $2n-1$ vaut $\binom{2n}{2n-1} = 2n$. Le résultat est donc bien cohérent.

4. Faisons dans P_n le changement d'indice $l = 2n-k$. Alors :

$$P_n = \prod_{l=n+1}^{2n-1} \sin\left(\frac{(2n-l)\pi}{2n}\right) = \prod_{l=n+1}^{2n-1} \sin\left(\pi - \frac{l\pi}{2n}\right) = \prod_{l=n+1}^{2n-1} \sin\left(\frac{l\pi}{2n}\right)$$

   car $\sin(\pi - x) = \sin x$.

   On en déduit que $Q_n = \prod_{k=1}^{2n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) \times \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \times \prod_{k=n+1}^{2n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = P_n^2$.

   De plus, pour tout entier k compris entre 1 et $2n-1$, $\frac{k\pi}{2n}$ appartient à $[0,\pi]$ donc $\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) \geqslant 0$ ce qui implique que P_n et Q_n sont positifs. Par conséquent, $P_n = \sqrt{Q_n}$.

   L'immense majorité d'entre vous a posé $j = n+k$ pour que ça colle au niveau des bornes. Ensuite, il y a eu ceux qui m'ont trafiqué le produit avec des formules trigo fausses pour que ça marche et quelques uns (rares) qui ont eu l'honnêteté de reconnaître que ce changement d'indice faisait apparaître des cosinus dans le produit.

5. $\prod_{k=1}^{2n-1} z_k$ est le produit des racines du polynôme B. D'après les relations coefficients racines, ce produit vaut $(-1)^{2n-1} b_0$. Donc $\prod_{k=1}^{2n-1} z_k = -2n$. D'autre part, d'après l'expression des z_k donnée au

2. :

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{2n-1} z_k &= (2i)^{2n-1} \times Q_n \prod_{k=1}^{2n-1} \exp\left(\frac{ik\pi}{2n}\right)\\ &= \frac{2^{2n-1}(-1)^n Q_n}{i} \exp\left(\frac{i\pi}{2n}\sum_{k=1}^{2n-1} k\right)\\ &= \frac{2^{2n-1}(-1)^n Q_n}{i} \exp\left(i\left(n\pi - \frac{\pi}{2}\right)\right)\\ &= -2^{2n-1} Q_n\end{aligned}$$

En égalant les deux résultats, on trouve $Q_n = \dfrac{4n}{2^{2n}}$ et $P_n = \sqrt{Q_n} = \dfrac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$.

Exercice 2 1. Soit (B_n) une suite de polynômes de Bernoulli.

(a) On a $B_1' = B_0 = 1$ donc B_1 est de la forme $X + b$. Par ailleurs, on a $B_2' = B_1$ donc B_2 de la forme $\dfrac{X^2}{2} + bX + a$. Comme $B_2(0) = B_2(1)$, on a $a = \dfrac{1}{2} + b + a$ donc nécessairement $b = -\dfrac{1}{2}$. Ainsi, $B_1 = X - \dfrac{1}{2}$.

De même, on sait que B_2 est de la forme $\dfrac{X^2}{2} - \dfrac{X}{2} + c$ donc $B_3(X)$ est de la forme $\dfrac{X^3}{6} - \dfrac{X^2}{4} + cX + d$. Or $B_3(0) = B_3(1)$, ce qui impose $c = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{12}$, on a donc bien $B_2(X) = \dfrac{X^2}{2} - \dfrac{X}{2} + \dfrac{1}{12}$.

(b) On procède de même pour déterminer B_3. On trouve

$$B_3 = \frac{X^3}{6} - \frac{X^2}{4} + \frac{X}{12}$$

2. (a) Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. On sait que tout polynôme $Q = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{a_k}{k+1} X^{k+1} + c$ de $\mathbb{R}[X]$ est tel que $Q' = P$ (pour tout réel c). En prenant $c = -\displaystyle\int_0^1 \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} t^{k+1}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{(k+1)(k+2)}$, on a bien $\displaystyle\int_0^1 Q(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

On a montré l'existence. Si on suppose que deux polynômes Q_1 et Q_2 existent et vérifient ces propriétés, on a $Q_1 = Q_2 + k$ avec k une constante et, par linéarité de l'intégrale, comme $\displaystyle\int_0^1 Q_1(t)\,\mathrm{d}t = 0 = \int_0^1 Q_2(t)\,\mathrm{d}t$, on obtient $k = 0$ d'où l'unicité.

La plupart d'entre vous m'ont seulement montré l'unicité et pas l'existence. Je vous rappelle qu'il est inutile de raisonner par l'absurde et donc de supposer que Q_1 et Q_2 sont différents.

J'ai vu beaucoup de bêtises sur cette question, des confusions entre intégrale et primitive, des notations farfelues qui semblent évoquer une unique primitive (!), des intégrales nulles qui impliquent des intégrandes nulles...

(b) On veut montrer qu'une suite de polynômes vérifie les propriétés (P_1) si et seulement si elle vérifie les propriétés (P_2).

On raisonne par double implication.

On suppose tout d'abord que (B_n) vérifie les propriétés (P_1). Soit $n \in \mathbb{N}$, montrons que $\displaystyle\int_0^1 B_{n+1}(t)\,\mathrm{d}t = 0$. On sait que $B_{n+1} = B_{n+2}'$ et $n+2 \geqslant 2$ donc $B_{n+2}(0) = B_{n+2}(1)$, ainsi on a bien $\displaystyle\int_0^1 B_{n+1}(t)\,\mathrm{d}t = 0$ donc (B_n) vérifie les propriétés (P_2).

On suppose désormais que (B_n) vérifie les propriétés (P_2), montrons qu'elle vérifie les propriétés (P_1). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $B_{n+1}' = B_n$. Soit maintenant $n \geqslant 2$, montrons que $B_n(0) = B_n(1)$. On sait que $B_n' = B_{n-1}$ et $B_{n-1} = L(B_{n-2})$ avec $n-2 \in \mathbb{N}$ donc $\displaystyle\int_0^1 B_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t = 0$. On en déduit que $B_n(0) = B_n(1)$ donc (B_n) vérifie les propriétés (P_1).

On ne va pas se mentir, cette question était un massacre. La plupart d'entre vous ont voulu raisonner par équivalence sans faire attention à la valeur de n et en faisant des équivalences douteuses.

(c) Il existe une unique suite vérifiant les propriétés (P_2) car la suite est définie par récurrence, la valeur de son premier terme étant fixé. On en déduit, d'après la question précédente, qu'il existe une unique suite de polynômes qui vérifie les propriétés (P_1).
On notera désormais cette suite (B_n) et on l'appellera **la** suite de polynômes de Bernoulli.

Beaucoup m'ont évoqué l'unicité de Q. L'unicité (et l'existence) de Q permet simplement de bien définir l'application L, rien à voir donc avec cette question où il faut remarquer qu'une suite vérifiant (P_2) est définie par récurrence.

3. On veut montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_n(X) = (-1)^n B_n(1-X)$. Pour cela, on va poser $A_n = (-1)^n B_n(1-X)$ et montrer que (A_n) satisfait les propriétés (P_1). Par unicité, on aura $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} = (B_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
On a
— $A_0 = B_0(1-X) = 1$
— Soit $n \in \mathbb{N}$, $A'_{n+1} = (-1)^{n+1}\left(-B'_{n+1}(1-X)\right) = (-1)^{n+2}B_n(1-X) = A_n(X)$, on a donc bien la deuxième propriété.
— Soit $n \geqslant 2$, alors $A_n(0) = (-1)^n B_n(1) = (-1)^n B_n(0) = A_n(1)$, on a donc bien la deuxième propriété.
Ainsi, la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie les propriétés (P_1), d'après la question précédente, on a donc $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} = (B_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Certains ont tenté de montré que $((-1)^n B_n(1-X))_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiait les propriétés (P_2) en faisant des intégrations douteuses...

4. (a) On utilise les résultats trouvés précédemment, on a $b_0 = 1$, $b_1 = -\dfrac{1}{2}$, $b_2 = \dfrac{1}{12}$, $b_3 = 0$.

(b) Soit $n \geqslant 3$, on suppose n impair. Alors $B_n(0) = (-1)^n B_n(1) = -B_n(1)$. Or $n \geqslant 3$ donc $B_n(0) = B_n(1)$, on en déduit que b_n est nul.

J'ai vu plusieurs raisonnements par récurrence qui n'utilise pas du tout l'hypothèse de récurrence. Cela aurait dû vous mettre la puce à l'oreille : ce N'est PAS un raisonnement par récurrence!

Exercice 3 1. (a) $P_n(X) = \sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{(-1)^k}{(2k)!}\left(X^2\right)^k = A(X^2)$ où $A = \sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{(-1)^k}{(2k)!} X^k$.

(b) On note $A(X) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$. On a $a_{n-1} = \dfrac{(-1)^{n-1}}{(2n-2)!} \neq 0$ donc A est de degré $n-1$.

D'après le cours,

$$\sum_{k=1}^{n-1} z_k = -\frac{a_{n-2}}{a_{n-1}} = \frac{\frac{(-1)^{n-2}}{(2n-4)!}}{\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-2)!}} = \frac{(2n-2)!}{(2n-4)!} = (2n-2)(2n-3)$$

$$\prod_{k=1}^{n-1} z_k = (-1)^{n-1}\frac{a_0}{a_{n-1}} = (-1)^{n-1}\frac{1}{\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-2)!}} = (2n-2)!$$

Conclusion : $\sum_{k=1}^{n-1} z_k = (2n-2)(2n-3)$ et $\prod_{k=1}^{n-1} z_k = (2n-2)!$

Le degré du polynôme A est $n-1$ et non pas n! Par ailleurs, beaucoup d'erreurs dans la simplification de $\dfrac{(2n-2)!}{(2n-4)!}$.

(c) Soit $z \in \mathbb{C}$, on a $A(z^2) = P(z)$ donc

$$z \text{ racine de } P \Leftrightarrow P(z) = 0 \Leftrightarrow A(z^2) = 0 \Leftrightarrow z^2 \text{ racine de } A$$

Conclusion : les racines de A sont les carrés des racines de P.

Le symbole $\sqrt{}$ est réservé à la racine carrée positive d'un RÉEL POSITIF!!!!!! c'est inadmissible de voir ce symbole utilisé sur des complexes (et pareil pour la puissance $1/2$).

2. (a)

$$\begin{aligned} P_n''(X) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(2k)!}(X^{2k})'' = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(2k)!} 2k(2k-1)X^{2k-2} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(2k-2)!} X^{2k-2} \text{ car le terme pour } k=0 \text{ est nul} \end{aligned}$$

Posons $j = k-1$, alors

$$\begin{aligned} P''_n &= \sum_{j=0}^{n-2} \frac{(-1)^{j+1}}{(2j)!} X^{2j} \\ &= -\sum_{j=0}^{n-2} \frac{(-1)^{j}}{(2j)!} X^{2j} \\ &= -\left[\sum_{j=0}^{n-1} \frac{(-1)^{j}}{(2j)!} X^{2j} - \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-2)!} X^{2n-2}\right] \\ &= -\left[P_n - \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-2)!} X^{2n-2}\right] \end{aligned}$$

Conclusion : $P''_n + P_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{(2n-2)!} X^{2n-2}$.

(b) Si z est racine de P de multiplicité $m \geqslant 3$ alors $P_n(z) = P'_n(z) = P''_n(z) = 0$. D'après a), on a

$$P_n(z) + P_n''(z) = \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-2)!} z^{2n-1}$$

donc $z^{2n-2} = 0$. C'est impossible si $n=1$ et cela donne $z=0$ si $n \geqslant 2$. Mais 0 n'est pas racine de P_n puisque $P_n(0) = 1$.

Conclusion : les racines de P_n sont soit simple, soit double.

Beaucoup d'arnaques sur cette question car vous avez souvent fait démarrer la somme de la dérivée seconde à 2 (alors que le terme d'indice 1 ne s'annule pas!) et vous avez ensuite ramé pour justifier la formule. Sachez qu'il est, dans ce cas, appréciable de dire " je ne comprends pas pourquoi il reste un 1" plutôt que " je tente de faire disparaître le 1 d'une ligne à la suivante en espérant qu'elle ne le remarquera pas".

(c) Notons $x_1, \dots, x_r$ les r racines complexes distinctes de P_n, notons $m_1, \dots, m_r$ leur multiplicité respective dans P_n. On a $\deg(P_n) = \sum\limits_{k=1}^{r} m_k$.

Or, d'après b), $\forall k \in [|1, r|]$, $m_k \leqslant 2$ donc $\sum\limits_{k=1}^{r} m_k \leqslant 2r$ d'où $r \geqslant \frac{1}{2}\deg(P_n) = \frac{1}{2}(2n-2) = n-1$.

Conclusion : P_n a au moins $n-1$ racines complexes distinctes.

Ceux qui ont compris ont souvent eu du mal à me l'expliquer correctement, en traitant notamment le cas de où toutes les racines sont doubles puis en expliquant vaguement que c'était le cas où on avait le moins de racines. J'ai rarement été convaincue.

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(1+\frac{1}{n})^n = exp\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$ or, $\forall x > -1$, $\ln(1+x) \leqslant x$ par concavité de la fonction (ou par une brève étude de fonction) donc $\ln(1+\frac{1}{n}) \leqslant \frac{1}{n}$ $\left(\text{car } \frac{1}{n} > -1\right)$. Or $n \geqslant 0$ d'où $n\ln(1+\frac{1}{n}) \leqslant 1$. Enfin, exp est croissante donc $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant e, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

J'ose à peine l'écrire mais un nombre non négligeable a tenté une récurrence.

(b)

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$ et

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{(n+1)!e^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}.\frac{n^n}{n!e^n} = \frac{(n+1)e.n^n}{(n+1)^{n+1}}$$

donc

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{e.n^n}{(n+1)^n} = \frac{e}{(1+\frac{1}{n})^n} \geqslant 1$$

d'après la question a) car $(1+\frac{1}{n})^n > 0$. On a donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$ et $u_n > 0$ d'où $u_{n+1} \leqslant u_n, \forall n \geqslant 1$. La suite u est décroissante.

De plus, $u_1 = \frac{1}{e}$, donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leqslant \frac{1}{e}$

4. (a) On sait que : $\forall j \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}$, $\cos^{(j)}(x) = \cos\left(x + j\frac{\pi}{2}\right)$. Donc $\cos^{(j)}(0) = \cos\left(j\frac{\pi}{2}\right)$.
   - Si j est pair, $j = 2k$ où $k \in \mathbb{N}$, $\cos^{(j)}(0) = \cos(k\pi) = (-1)^k$.
   - Si j est impair, $j = 2k+1$ où $k \in \mathbb{N}$, $\cos^{(j)}(0) = \cos(k\pi + \frac{\pi}{2}) = 0$.

   donc
$$\sum_{j=0}^{2n-1} \frac{\cos^{(j)}(0)}{j!} X^j = \sum_{\substack{j=0 \\ j \text{ pair}}}^{2n-1} \frac{\cos^{(j)}(0)}{j!} X^j$$

   On pose $j = 2k$, on a
$$\sum_{j=0}^{2n-1} \frac{\cos^{(j)}(0)}{j!} X^j = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(2k)!} X^{2k} = P_n(X)$$

   Là encore, l'explication était souvent douteuse pour justifier l'égalité. J'ai vu souvent " on pose $j = 2k$" alors que j est quelconque (et donc le nouvel indice n'est pas entier !!). Je passe là encore sur les $(-1)^{k/2}$ qui n'ont aucun sens si k est impair

(b) Soit $x \in \left[0, \dfrac{2n}{e\pi}\right]$, alors $x^{2n} \leqslant \left(\dfrac{2n}{e}\right)^{2n}$ car $0 \leqslant x^2 \leqslant \left(\frac{2n}{e}\right)^2$.

$$| P_n(x) - \cos(x) | \leqslant \frac{(2n)^{2n}}{e^{2n}(2n)!} \leqslant \frac{1}{e}$$

d'après 3b).

(c) Soit k un entier dans $[0, \frac{2n}{e}]$ alors $k\pi \in \left[0, \frac{2n}{e}\right]$ donc, d'après b),

$$| P_n(k\pi) - \cos(k\pi) | \leqslant \frac{1}{e}$$

or $\cos(k\pi) = (-1)^k$ d'où $-\frac{1}{e} \leqslant P_n(k\pi) - (-1)^k \leqslant \frac{1}{e}$ donc

$$-\frac{1}{e} + (-1)^k \leqslant P_n(k\pi) \leqslant \frac{1}{e} + (-1)^k$$

- Pour k pair, $0 < 1 - \frac{1}{e} \leqslant P_n(k\pi)$ donc $P_n(k\pi) > 0$.
- Pour k impair, $P_n(k\pi) \leqslant \frac{1}{e} - 1 < 0$ donc $P_n(k\pi) < 0$.

(d)

• On applique le théorème des valeurs intermédiaires à P_n (continue sur $\mathbb{R}$) sur chaque intervalle $[k\pi, (k+1)\pi]$ où $k \in [0, \frac{2n}{e\pi} - 1]$ (ce qui donne $E\left(\frac{2n}{e\pi} - 1\right) + 1 = E\left(\frac{2n}{e\pi}\right)$ valeurs de k).

$P_n(k\pi)$ et $P_n((k+1)\pi)$ sont de signes opposés stricts d'après c) donc $\exists c_k \in]k\pi,(k+1)\pi[$ tel que $P_n(c_k)=0$.

• On a donc trouvé $E\left(\frac{2n}{e\pi}\right)$ racines distinctes pour P_n dans $\mathbb{R}_+^\star$ (distinctes car les intervalles $]k\pi,(k+1)\pi[$ sont disjoints).

De plus, P_n est pair donc les opposés des c_k sont aussi racines. Cela fait $2E\left(\frac{2n}{e\pi}\right)$, au moins, racines distinctes dans $\mathbb{R}$ pour P_n.

5. (a) On vient de voir que pour $n\in\mathbb{N}^*$, pour $k\in\left[\!\left|\, 0, \left\lfloor\left(\frac{2n}{e\pi}\right)\right\rfloor - 1 \,\right|\!\right]$, P_n a au moins une racine dans I_k.
Or , pour n assez grand, $k \leqslant \left\lfloor\left(\frac{2n}{e\pi}\right)\right\rfloor - 1$ car $\frac{2n}{e\pi} \to +\infty$ quand $n\to+\infty$.
Donc, pour n assez grand, P_n a au moins une racine dans I_k.

(b) D'après 4b) et l'énoncé :

Pour n assez grand, $| P_n(x_n) - \cos(x_n) | \leqslant \dfrac{x_n^{2n}}{(2n)!}$.

Or, $P_n(x_n)=0$ par définition et $x_n\in[0,(k+1)\pi]$ d'où $x_n^{2n}\in\left[0,((k+1)\pi)^{2n}\right]$.
On a donc, pour n assez grand, $|\cos(x_n)| \leqslant \frac{((k+1)\pi)^{2n}}{(2n)!}$. Or k est fixé donc $((k+1)\pi)^{2n}$ est négligeable devant $(2n)!$ quand n tend vers $+\infty$. D'où, par encadrement, $|\cos(x_n)| \to 0$ quand $n\to+\infty$ donc $\cos(x_n)\to 0$.

Il faut impérativement majorer x_n pour passer à la limite car la limite que vous connaissez est $\dfrac{a^n}{n!}$ avec a une constante! Par ailleurs, beaucoup m'ont dit que $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0$ par croissances comparées ce qui est parfaitement faux. On l'a montré à la main en faisant une longue fraction.

(c) Soit $x\in I_k$, $x-k\pi\in[0,\pi]$ donc $x-k\pi = \arccos(\cos(x-k\pi))$ car arccos est la réciproque de la restriction de cos à $[0,\pi]$.
D'où $x-k\pi=\arccos((-1)^k\cos x)$ donc $x=k\pi+\arccos((-1)^k\cos x)$.

(d) D'après b), $(-1)^k\cos(x_n)\to 0$ quand $n\to+\infty$ or $\arccos(y)\to\arccos(0)=\frac{\pi}{2}$ quand y tend vers 0 (arccos est continue en 0).
Donc $\arccos((-1)^k\cos(x_n)) \to \frac{\pi}{2}$ quand n tend vers $+\infty$, d'où, d'après c) et comme $x_n\in I_k$, pour n assez grand, $x_n\to k\pi+\frac{\pi}{2}$.

Exercice 4 **Polynômes et nombre de Bernoulli**

1. Soit (B_n) une suite de polynômes de Bernoulli.

(a) On a $B_1' = B_0 = 1$ donc B_1 est de la forme $X+b$. Par ailleurs, on a $B_2'=B_1$ donc B_2 de la forme $\dfrac{X^2}{2}+bX+a$. Comme $B_2(0)=B_2(1)$, on a $a=\dfrac{1}{2}+b+a$ donc nécessairement $b=-\dfrac{1}{2}$. Ainsi, $B_1 = X-\dfrac{1}{2}$.

De même, on sait que B_2 est de la forme $\dfrac{X^2}{2}-\dfrac{X}{2}+c$ donc $B_3(X)$ est de la forme $\dfrac{X^3}{6}-\dfrac{X^2}{4}+cX+d$.
Or $B_3(0)=B_3(1)$, ce qui impose $c=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{12}$, on a donc bien $B_2(X)=\dfrac{X^2}{2}-\dfrac{X}{2}+\dfrac{1}{12}$.

(b) On procède de même pour déterminer B_3. On trouve

$$B_3 = \frac{X^3}{6}-\frac{X^2}{4}+\frac{X}{12}$$

2. (a) Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. On sait que tout polynôme $Q = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} X^{k+1} + c$ de $\mathbb{R}[X]$ est tel que $Q' = P$ (pour tout réel c). En prenant $c = -\int_0^1 \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} t^{k+1} \,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{(k+1)(k+2)}$, on a bien $\int_0^1 Q(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

On a montré l'existence. Si on suppose que deux polynômes Q_1 et Q_2 existent et vérifient ces propriétés, on a $Q_1 = Q_2 + k$ avec k une constante et, par linéarité de l'intégrale, comme $\int_0^1 Q_1(t)\,\mathrm{d}t = 0 = \int_0^1 Q_2(t)\,\mathrm{d}t$, on obtient $k = 0$ d'où l'unicité.

La plupart d'entre vous m'ont seulement montré l'unicité et pas l'existence. Je vous rappelle qu'il est inutile de raisonner par l'absurde et donc de supposer que Q_1 et Q_2 sont différents.

J'ai vu beaucoup de bêtises sur cette question, des confusions entre intégrale et primitive, des notations farfelues qui semblent évoquer une unique primitive (!), des intégrales nulles qui impliquent des intégrandes nulles...

(b) On veut montrer qu'une suite de polynômes vérifie les propriétés (P_1) si et seulement si elle vérifie les propriétés (P_2).

On raisonne par double implication.

On suppose tout d'abord que (B_n) vérifie les propriétés (P_1). Soit $n \in \mathbb{N}$, montrons que $\int_0^1 B_{n+1}(t)\,\mathrm{d}t = 0$. On sait que $B_{n+1} = B'_{n+2}$ et $n+2 \geqslant 2$ donc $B_{n+2}(0) = B_{n+2}(1)$, ainsi on a bien $\int_0^1 B_{n+1}(t)\,\mathrm{d}t = 0$ donc (B_n) vérifie les propriétés (P_2).

On suppose désormais que (B_n) vérifie les propriétés (P_2), montrons qu'elle vérifie les propriétés (P_1). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $B'_{n+1} = B_n$. Soit maintenant $n \geqslant 2$, montrons que $B_n(0) = B_n(1)$. On sait que $B'_n = B_{n-1}$ et $B_{n-1} = L(B_{n-2})$ avec $n-2 \in \mathbb{N}$ donc $\int_0^1 B_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t = 0$. On en déduit que $B_n(0) = B_n(1)$ donc (B_n) vérifie les propriétés (P_1).

On ne va pas se mentir, cette question était un massacre. La plupart d'entre vous ont voulu raisonner par équivalence sans faire attention à la valeur de n et en faisant des équivalences douteuses.

(c) Il existe une unique suite vérifiant les propriétés (P_2) car la suite est définie par récurrence, la valeur de son premier terme étant fixé. On en déduit, d'après la question précédente, qu'il existe une unique suite de polynômes qui vérifie les propriétés (P_1).

On notera désormais cette suite (B_n) et on l'appellera **la** suite de polynômes de Bernoulli.

Beaucoup m'ont évoqué l'unicité de Q. L'unicité (et l'existence) de Q permet simplement de bien définir l'application L, rien à voir donc avec cette question où il faut remarquer qu'une suite vérifiant (P_2) est définie par récurrence.

3. On veut montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_n(X) = (-1)^n B_n(1-X)$. Pour cela, on va poser $A_n = (-1)^n B_n(1-X)$ et montrer que (A_n) satisfait les propriétés (P_1). Par unicité, on aura $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} = (B_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On a
— $A_0 = B_0(1-X) = 1$
— Soit $n \in \mathbb{N}$, $A'_{n+1} = (-1)^{n+1}\left(-B'_{n+1}(1-X)\right) = (-1)^{n+2} B_n(1-X) = A_n(X)$, on a donc bien la deuxième propriété.
— Soit $n \geqslant 2$, alors $A_n(0) = (-1)^n B_n(1) = (-1)^n B_n(0) = A_n(1)$, on a donc bien la deuxième propriété.

Ainsi, la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie les propriétés (P_1), d'après la question précédente, on a donc $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} = (B_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Certains ont tenté de montré que $((-1)^n B_n(1-X))_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiait les propriétés (P_2) en faisant des intégrations douteuses...

4. (a) On utilise les résultats trouvés précédemment, on a $b_0 = 1$, $b_1 = -\frac{1}{2}$, $b_2 = \frac{1}{12}$, $b_3 = 0$.

   (b) Soit $n \geqslant 3$, on suppose n impair. Alors $B_n(0) = (-1)^n B_n(1) = -B_n(1)$. Or $n \geqslant 3$ donc $B_n(0) = B_n(1)$, on en déduit que b_n est nul.

   J'ai vu plusieurs raisonnements par récurrence qui n'utilise pas du tout l'hypothèse de récurrence. Cela aurait dû vous mettre la puce à l'oreille : ce N'est PAS un raisonnement par récurrence!

Application au calcul de $\zeta(2k)$

5. On pose $\alpha_0(k) = \int_0^1 B_{2k}(t)\,\mathrm{d}t$. On sait que $B'_{2k+1} = B_{2k}$, on a donc

$$\alpha_0(k) = [B_{2k+1}(t)]_0^1 = B_{2k+1}(1) - B_{2k+1}(0) = 0.$$

6. On pose

$$\forall n \geqslant 1, \alpha_n(k) = 2\int_0^1 B_{2k}(t)\cos(2\pi nt)\,\mathrm{d}t$$

   (a) On procède par intégration par parties. On pose $u(t) = B_2(t)$ et $v'(t) = \cos(2\pi nt)$. On a $u'(t) = B'_2 = B_1$ et $v(t) = \frac{\sin(2\pi nt)}{2\pi n}$. On a donc

$$\alpha_n(1) = 2\left[B_2(t)\frac{\sin(2\pi nt)}{2\pi n}\right]_0^1 - 2\int_0^1 B_1(t)\frac{\sin(2\pi nt)}{2\pi n}\,\mathrm{d}t.$$

   On procède, à nouveau par intégration par parties. On pose $u(t) = B_1(t)$ et $v'(t) = -\frac{\sin(2\pi nt)}{2\pi n}$. On a $u'(t) = B_0(t) = 1$ et $v(t) = \frac{\cos(2\pi nt)}{(2\pi n)^2}$. On a donc

$$\alpha_n(1) = 2\left[B_1(t)\frac{\cos(2\pi nt)}{(2\pi n)^2}\right]_0^1 - 2\int_0^1 \frac{\cos(2\pi nt)}{(2\pi n)^2}\,\mathrm{d}t.$$

   On a $B_1(1) = \frac{1}{2} = -B_1(0)$ donc $2\left[B_1(t)\frac{\cos(2\pi nt)}{(2\pi n)^2}\right]_0^1 = \frac{2}{(2\pi n)^2}$ et

$$2\int_0^1 \frac{\cos(2\pi nt)}{(2\pi n)^2}\,\mathrm{d}t = 2\left[\frac{\sin(2\pi nt)}{(2\pi n)^3}\right]_0^1 = 0.$$

   On a donc bien $\forall n \geqslant 1$, $\alpha_n(1) = \frac{2}{(2\pi n)^2}$.

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et $k \geqslant 2$.

   On procède par intégration par parties successives, comme à la question précédente : On pose $u(t) = B_{2k}(t)$ et $v'(t) = \cos 2\pi nt$. On a $u'(t) = B_{2k-1}(t)$ et $v(t) = \frac{\sin(2\pi nt)}{2\pi n}$. On a donc

$$\alpha_n(k) = \underbrace{\left[B_{2k}(t)\frac{\sin(2\pi nt)}{2\pi n}\right]_0^1}_{=0} - \int_0^1 B_{2k-1}(t)\frac{\sin(2\pi nt)}{2\pi n}\,\mathrm{d}t.$$

   On pose ensuite $u(t) = B_{2k-1}(t)$ et $v'(t) = -\frac{\sin(2\pi nt)}{2\pi n}$. On a $u'(t) = B_{2k-2}(t)$ et $v(t) = \frac{\cos(2\pi nt)}{(2\pi n)^2}$. On a

$$\alpha_n(k) = \underbrace{\left[B_{2k-1}(t)\frac{\cos(2\pi nt)}{(2\pi n)^2}\right]_0^1}_{=0 \text{ car } 2k-1\geqslant 2} - \int_0^1 B_{2k-2}(t)\frac{\cos(2\pi nt)}{(2\pi n)^2}\,\mathrm{d}t$$

On a donc

$$\alpha_n(k) = -\frac{1}{(2n\pi)^2}\int_0^1 B_{2k-2}(t)\cos(2\pi nt)0\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{(2n\pi)^2}\alpha_n(k-1)$$

qui est l'égalité souhaitée.

(c) Soit $n \geqslant 1$. On a vu dans la question précédente que la suite $(\alpha_n(k))_{k\in\mathbb{N}^\star}$ est géométrique de raison $-\frac{1}{(2n\pi)^2}$ et de premier terme $\alpha_n(1) = \frac{2}{(2n\pi)^2}$. On en déduit que pour tout $k \geqslant 1$,

$$\alpha_n(k) = \frac{(-1)^{k-1}2}{(2n\pi)^{2k}}$$

On admet que pour tout $x \in [0, 2\pi[$, on a

$$B_{2k}\left(\frac{x}{2\pi}\right) = \lim_{N\to+\infty}\left(\alpha_0(k) + \sum_{n=1}^{N}\alpha_n(k)\cos(nx)\right)$$

7. (a) Soit $k \geqslant 1$. On prend $x = 0$, on obtient

$$b_{2k} = B_{2k}(0) = \lim_{N\to+\infty}\left(\alpha_0(k) + \sum_{n=1}^{N}\alpha_n(k)\right)$$

Pour tout $N \geqslant 1$, on a

$$\sum_{n=1}^{N}\alpha_n(k) = \sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^{k-1}}{2^{2k-1}\pi^{2k}n^{2k}} = \frac{(-1)^{k-1}}{2^{2k-1}(\pi)^{2k}}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^{2k}}$$

On en déduit, comme $\alpha_0(k) = 0$, que l'on a

$$b_{2k} = \frac{(-1)^{k-1}}{2^{2k-1}(\pi)^{2k}}\zeta(2k)$$

(b) On a $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2} = b_2 2\pi^2$ et $b_2 = \frac{1}{12}$ d'où $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

On a, pour $k = 2$, $b_4 = -\frac{1}{2^3(\pi)^4}\zeta(4)$ donc

$$\zeta(4) = \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^4} = -8b_4(\pi)^4.$$

et $b_4 = -\frac{1}{720}$ d'où $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$

Exercice 5 1. On a $P_n(1) = 0$ et $P_n'(X) = n(n+1)X^n - n(n+1)X^{n-1}$ donc $P_n'(1) = 0$. On en déduit que 1 est racine de multiplicité au moins 2 de P_n donc $(X-1)^2$ divise P_n.

2. Soit $p \in \mathbb{N}^\star$. Alors

$$(X-1)\sum_{k=0}^{p-1}X^k = \sum_{k=0}^{p-1}\left(X^{k+1} - X^k\right) = X^p - 1,$$

car on reconnaît une somme télescopique.

Là j'avoue que je suis partagée entre la fierté de voir que la majorité d'entre vous sait factoriser le polynôme $\sum_{k=0}^{n-1}X^k$ et le fait que, clairement, ce n'était ce qu'on attendait ici puisque l'on voulait simplement faire apparaître ce fameux polynôme $\sum_{k=0}^{n-1}X^k$. Pour le peu qui y ont pensé, quand on dit " en la justifiant", on attend une preuve de la fameuse factorisation $a^n - b^n$ par $a - b$.

3. On a
$$P_n(X) = (X-1)(nX^n - X^{n-1} - X^{n-2} \dots - 1),$$
donc $P_n(X) = (X-1)Q(X)$ avec $Q(X) = nX^n - \sum_{k=0}^{n-1} X^k$.

4. On écrit
$$Q(X) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(X^n - X^k\right) = \sum_{k=0}^{n-1} X^k \left(X^{n-k} - 1\right) = \sum_{k=0}^{n-1} X^k (X-1) \sum_{j=0}^{n-k-1} X^j.$$
Le quotient vaut donc $\sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-k-1} X^{k+j}$. Pour trouver ses coefficients, on commence par poser $i = k+j$. On a alors
$$\sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-k-1} X^{k+j} = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=k}^{n-1} X^i,$$
puis on permute les deux signes somme :
$$\sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=k}^{n-1} X^i = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{i} X^i = \sum_{i=0}^{n-1} (i+1) X^i.$$
Personne n'est arrivé jusque là, quel dommage !

5. On en déduit que
$$P_n(X) = (X-1)^2 A(X) \text{ avec } A(X) = \sum_{i=0}^{n-1} (i+1) X^i.$$

Exercice 6 Pour tous réel $x > 0$ et entier $n \geqslant 3$, on pose : $f_n(x) = x - n \ln(x)$.

1. La fonction f_n est dérivable sur $]0,2[$ de dérivée $f' : x \mapsto \dfrac{x-n}{x}$. Comme $n \geqslant 3$, on a donc le tableau de variations suivant :

x	0 $\qquad\qquad$ 2
$f_n'(x)$	$-$
f_n	$+\infty$ $\searrow$ $2 - 2\ln(2)$

La fonction f_n est strictement décroissante sur $]0,2[$ donc injective et 0 appartient à son image. Il admet donc un unique antécédent par f_n.
On appellera désormais a_n cette solution.
J'ai lourdement insisté sur le fait que le TVI ne donnait pas l'unicité, je suis donc très déçue (et le mot est faible) que seule Marianne ait rédigé correctement cette question... Renseignement pris auprès de mes collègues de spé, c'est tout à fait le genre de questions où vous perdrez des points (et peut-être l'estime du correcteur) en balançant tous les arguments sans les ordonner et sans bien distinguer l'existence de l'unicité.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $f_{n+1}(a_n) = -\ln(a_n)$. On remarque que $f_n(1) = 1 > 0$ donc $a_n \in]1,2[$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ln(a_n) > 0$ donc $f_{n+1}(a_n) < 0$. On a donc $f_{n+1}(a_n) < f_{n+1}(a_{n+1})$ et, comme f_{n+1} est décroissante, on en déduit que $a_{n+1} < a_n$ donc la suite est bien décroissante.
Là il y avait un piège car il fallait remarquer que $a_n > 1$ pour attraper le signe de la différence.

3. D'après la question précédente, elle est minorée par 1, elle est donc convergente. Notons ℓ sa limite et supposons, par l'absurde, que $\ell > 1$. On a alors, $f_n(a_n) \to -\infty$ ce qui est absurde puisque $f_n(a_n) = 0$. On a montré que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.
Certains m'ont parlé de point fixe de la fonction ce qui n'a aucun sens dans le cas d'une suite définie de manière implicite

4. Soit Φ la fonction telle que $\Phi(t) = \dfrac{\ln(1+t)}{1+t}$ avec t réel strictement supérieur à -1.

   On a $\ln(1+t) = t - \dfrac{t^2}{2} + o(t^2)$ et $\dfrac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 + o(t^2)$ donc

$$\Phi(t) = t - \frac{3t^2}{2} + o(t^2).$$

   Question plutôt bien traitée.

5. La fonction Φ est dérivable sur l'intervalle $]-1, e-1[$, de dérivée $\Phi' : t \mapsto \dfrac{1-\ln(1+t)}{(1+t)^2}$, elle est donc strictement croissante sur l'intervalle $]-1, e-1[$. On en déduit qu'elle induit une bijection sur son image. On la note Ψ.
   Certains me disent que la fonction est surjective, c'est faux! il faut corestreindre à son image pour obtenir une fonction surjective

6. On a

x	-1		$e-1$
Φ	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$

   on en déduit

x	$-\infty$		$\frac{1}{e}$
ψ	-1	$\nearrow$	$e-1$

   D'où la bijection réciproque a même ensemble de départ que la fonction?????

7. On a $\Phi(0) = 0$ donc $\Psi(0) = 0$. On a $\Phi(t) \sim t$ donc $\Phi \circ \Psi(x) \sim \Psi(x)$ donc $\Psi(x) \sim x$. En utilisant $\Phi(t) - t \sim -\dfrac{3t^2}{2}$, on en déduit $x - \Psi(x) \sim -\dfrac{3\psi(x)^2}{2}$ donc

$$x - \Psi(x) \sim -\frac{3x^2}{2}$$

   puisque $\Psi(x) \sim x$.

   On en déduit $\Psi(x) = x + \dfrac{3x^2}{2} + o(x^2)$.
   On peut aussi dire que Ψ est deux fois dérivable car Φ l'est ET la dérivée de Φ ne s'annule pas. La fonction Ψ admet donc un DL2 de la forme $\Psi(x) = a + bx + cx^2 + o(x^2)$ avec $a = 0$ puisque $\Psi(0) = 0$. On a donc

$$\Phi \circ \Psi(x) = x = bx + cx^2 + o(x^2) - \frac{3}{2}\left(x = bx + cx^2 + o(x^2)\right)^2 + o(x^2),$$

   c'est-à-dire

$$x = bx + \left(c - \frac{3b^2}{2}\right)x^2 + o(x^2),$$

   donc, par unicité du DL, $b = 1$ et $c = \dfrac{3}{2}$.

8. Par définition de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a $\dfrac{1}{n}=\dfrac{\ln(a_n)}{a_n}=\Phi(a_n-1)$ donc $a_n-1=\Psi(\dfrac{1}{n})$ puis

$$a_n=1+\frac{1}{n}+\frac{3}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Si on ne voit pas comment utiliser la question précédente, on y va par étapes : On sait que $A=1$ puisque l'on a montré que $a_n\to 1$. Par définition de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a $\dfrac{1}{n}=\dfrac{\ln(a_n)}{a_n}$. Comme $a_n\to 1$, $\dfrac{\ln(a_n)}{a_n}\sim a_n-1$. On a donc $a_n-1\sim\dfrac{1}{n}$ donc $a_n=1+\dfrac{1}{n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.
On utilise ensuite le DL2 de Φ :

$$\frac{1}{n}=\Phi(a_n-1)=(a_n-1)-\frac{3}{2}(a_n-1)^2+o\left(a_n-1\right)^2,$$

donc

$$\frac{1}{n}=a_n-1-\frac{3}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

puis

$$a_n=1+\frac{1}{n}+\frac{3}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Exercice 7 Soit f définie par $f(x)=x+1-e^{\frac{x}{x+1}}$.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}x+1=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{x}{x+1}}=e$, donc par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.
   $\lim\limits_{x\to-1^+}x+1=0^+$, $\lim\limits_{x\to-1^+}e^{\frac{x}{x+1}}=0$, donc $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=0$.
2. On a $f(x)-(x-e+1)=e-e^{\frac{x}{x+1}}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-(x-e+1)=0$. On en déduit que la droite d'équation $y=x-e+1$ est asymptote au graphe en $+\infty$. De plus, pour tout $x\geqslant 0$, $\dfrac{x}{x+1}\leqslant 1$ donc, par croissance de l'exponentielle, $f(x)-(x-e+1=\geqslant 0$ ce qui signifie que le graphe est au-dessus de l'asymptote.
   On peut aussi chercher un équivalent de $f(x)-(x-e+1)$. Si la limite de cet équivalent est nulle, on aura que la droite $y=x-e+1$ est asymptote et le signe de l'équivalent nous donnera la position du graphe par rapport à l'asymptote.
   On écrit
   $$\begin{aligned}f(x)-(x-e+1)&=e-e^{\frac{x}{x+1}}\\&=e\left(1-e^{-\frac{1}{x+1}}\right)\end{aligned}$$
   Quand $x\to+\infty$, $\dfrac{1}{1+x}\to 0$ donc $1-e^{-\frac{1}{x+1}}\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{1}{x+1}$. On en déduit que $f(x)-(x-e+1)\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{e}{x+1}$.
   On a bien $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-(x-e+1)=0$ donc la droite est asymptote. Par ailleurs, au voisinage de $+\infty$, on a $f(x)\geqslant x-e+1$ donc le graphe (C) est au-dessus de l'asymptote (D).
   Là, je me suis rendue compte que la majorité d'entre vous ne savait pas qu'être asymptote signifie que la limite entre la fonction et l'équation de la droite tend vers 0*. J'ai eu beaucoup d'équivalent, ce qui est faux. Prenez la fonction* $f(x)=x+1$*. Alors* $f(x)\underset{+\infty}{\sim}x$ *et pourtant la droite* $y=x$ *n'est pas asymptote au graphe de* f *: les deux droites sont parallèles.*
3. $\forall x\in]-1;+\infty[$, $f'(x)=1-\frac{1}{(1+x)^2}e^{\frac{x}{x+1}}$.
   D'où : $f''(x)=e^{\frac{x}{x+1}}\left[-\dfrac{1}{(1+x)^4}+\dfrac{2}{(1+x)^3}\right]=\dfrac{-1+2+2x}{(1+x)^4}e^{\frac{x}{x+1}}=\dfrac{2x+1}{(1+x)^4}e^{\frac{x}{x+1}}$.

   Inutile de remuer le couteau dans la plaie... beaucoup d'erreurs donc sur le calcul de f''*.*

4. On voit que $f''(x)$ est du signe de $2x+1$, d'où : $\begin{cases} \forall x \in]-1;-\frac{1}{2}[,\ f''(x)<0 \\ \forall x \in [-\frac{1}{2};+\infty[,\ f''(x) \geqslant 0 \end{cases}$. On en déduit le sens de variation de f'.

x	-1		$-\dfrac{1}{2}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
f'	1	$\searrow$	$\dfrac{e-4}{e}$	$\nearrow$	1

On a $f'\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 1 - \dfrac{4}{e} = \dfrac{e-4}{e} < 0$ car $e<3$.

On a
$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 1$$
et
$$\lim_{x\to-1} \frac{1}{(x+1)^2} e^{\frac{x}{x+1}} = \lim_{y\to0^+} \frac{1}{y^2} e^{\frac{y-1}{y}} = \lim_{y\to0^+} \frac{e}{y^2 e^{\frac{1}{y}}} = 0,$$
par le théorème de croissances comparées. On a donc $\lim\limits_{x\to-1} f'(x) = 1$.

Très peu ont réussi à calculer la limite en -1. Au mieux c'était juste mais sans (assez de)justification, au pire c'était faux et ça vous pénalisait pour la suite

5. La fonction f' est continue et strictement décroissante sur $]-1;-\frac{1}{2}[$, donc f' réalise une bijection de $]-1;-\frac{1}{2}[$ sur $]1-\frac{4}{e};1[$. 0 appartient à l'intervalle image : il existe donc un unique réel α de $]-1;-\frac{1}{2}[$ tel que $f'(\alpha)=0$.
De même, f' est continue et strictement croissante sur $[-\frac{1}{2};+\infty[$, donc f' réalise une bijection de $[-\frac{1}{2};+\infty[$ sur $[1-\frac{4}{e};1[$. 0 appartient à l'intervalle image, il existe donc un unique réel β sur $[-\frac{1}{2};+\infty[$ tel que $f'(\beta)=0$. Or $f'(0)=0$ et $0 \in [-\frac{1}{2};+\infty[$. Donc $\beta=0$.
On a donc prouvé que $f'(x)=0$ admet sur $]-1;+\infty[$ deux solutions dont l'une est 0 et l'autre α donc, il y a une unique solution non nulle.

Là encore, en français "une unique solution non nulle" signifie qu'il n'y en a qu'une différente de 0, *donc potentiellement deux en tout.*

6. On connaît maintenant le signe de f' d'après son tableau de variations et ses deux points d'annulation.
On a $\lim\limits_{x\to-1} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ car $x \underset{+\infty}{\sim} x+1$.
On a donc :

x	-1		α		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	0	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

7. On sait que : $f'(\alpha)=0 \iff 1-\frac{1}{(1+\alpha)^2}e^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}=0 \iff e^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}=(\alpha+1)^2$.
D'où : $f(\alpha)=\alpha+1-e^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}=\alpha+1-(1+\alpha)^2=(1+\alpha)(1-\alpha-1)=-\alpha(\alpha+1)$.

8. Prolongement de la fonction f en -1.

(a) On a $\lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{x}{x+1} = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = 0$ par continuité de l'exponentielle.

La fonction f est donc prolongeable par continuité en posant $g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x > -1 \\ 0 & \text{si } x = -1 \end{cases}$.

(b) $\frac{g(x)-g(-1)}{x-(-1)} = \frac{x+1-e^{\frac{x}{x+1}}}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}e^{\frac{x}{x+1}} = 1 - \frac{1}{x}\left(\frac{x}{x+1}e^{\frac{x}{x+1}}\right)$.

On a $\lim\limits_{x\to -1^+} \frac{x}{x+1} = -\infty$. Or $\lim\limits_{u\to -\infty} ue^u = 0$ par croissances comparées, d'où $\lim\limits_{x\to -1^+} \frac{x}{x+1}e^{\frac{x}{x+1}} = 0$.

D'où : $\lim\limits_{x\to -1^+} \frac{1}{x}\left(\frac{x}{x+1}e^{\frac{x}{x+1}}\right) = 0$.

On en déduit que $\lim\limits_{x\to -1^+} \frac{g(x)-g(-1)}{x-(-1)} = 1$. Cela signifie que g est dérivable en -1 et que $g'(-1) = 1$.

Plusieurs d'entre vous ont formé le taux d'accroissement, sont passés à la limite puis ont cité " le thm de la limite de la dérivée"... pourquoi?

Certains ont trouvé une contradiction car ils avaient trouvé (à tort) que la limite de $g'(x)$ en -1 était infinie. En fait cela n'aurait pas été une contradiction, cela aurait seulement voulu dire que la fonction g n'était pas C^1.

Enfin, quelques uns qui avait trouvé la limite finie en -1 de f' ont cité (avec justesse) le thm de la limite de la dérivée et ont affirmé que g admettait une dérivée en le point -1 qui valait la limite trouvée, à savoir 1.

(c) Précisons les tangentes à (C') aux points d'abscisses $-1, \alpha, 0$.

Équation de la tangente à (C') au point d'abscisse -1 :

$$\begin{aligned} y = g'(-1)(x-(-1)) + g(-1) &\iff y = f'(\alpha)(x-\alpha) + f(\alpha) \\ &\iff y = x+1 \end{aligned}$$

Équation de la tangente à (C') au point d'abscisse α :

$$y = g'(\alpha)(x-\alpha) + g(\alpha) \iff y = -\alpha(\alpha+1)$$

Équation de la tangente à (C') au point d'abscisse 0 :

$$y = g'(0)(x-0) + g(0) \iff y = f'(0)x + f(0) \iff y = 0$$

Exercice 8 L'objectif est d'obtenir un DL en 0 de $f : x \mapsto \mathrm{sh}(\arcsin x)$.

1. Détermination d'un DL à un ordre raisonnable.

(a) On peut déterminer le DL de arcsin en intégrant celui de $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} + o(x^2),$$

donc

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{8} + o(x^4),$$

puis, en intégrant :

$$\arcsin(x) = \arcsin(0) + x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + o(x^5).$$

On peut également utiliser le DL de sinus : $\sin(x) \sim x$ et $\arcsin(0) = 0$ donc $\arcsin(x) \sim x$. On a également $\sin(x) - x \sim -\dfrac{x^3}{6}$ donc

$$x - \arcsin(x) \sim -\frac{\arcsin^3(x)}{6} \sim -\frac{x^3}{6},$$

d'où

$$\arcsin(x) = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

Enfin, on écrit

$$\sin(x) - x + \frac{x^3}{6} \sim \frac{x^5}{5!} \text{ donc } x - \arcsin(x) + \frac{\arcsin^3(x)}{6} \sim \frac{\arcsin^5(x)}{5!} \sim \frac{x^5}{5!}.$$

On a donc

$$x - \arcsin(x) + \frac{1}{6}\arcsin^3(x) = \frac{x^5}{5!} + o(x^5).$$

Or,

$$\arcsin^3(x) = \left(x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^3 = x^3 + 3x^2\frac{x^3}{6} + o(x^5),$$

on a donc

$$\arcsin(x) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{12} - \frac{x^5}{5!} + o(x^5) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + o(x^5).$$

Certains ont choisi de poser $\arcsin(x) = x + ax^3 + bx^5 + o(x^5)$ *et d'identifier. C'est possible mais il faut, au préalable, justifier le fait que* $\arcsin$ *admet un DL5 au voisinage de* 0*.*

(b) On sait que $\mathrm{sh}(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$, on a donc

$$\begin{aligned} f(x) &= \arcsin(x) + \frac{1}{6}\arcsin^3(x) + \frac{1}{5!}\arcsin^5(x) + o\left(\arcsin^5(x)\right) \\ &= x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + o(x^5) + \frac{1}{6}\left(x^3 + \frac{x^5}{2} + o(x^5)\right) + \frac{x^5}{120} + o(x^5) \\ &= x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{6} + o(x^5) \end{aligned}$$

Obtention d'une équation différentielle

2. La fonction f est de classe C^∞ sur $]-1,1[$ en tant que composée de fonctions C^∞.
3. Pour tout $x \in]-1,1[$, on a

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{ch}(\arcsin(x)) \text{ et } f''(x) = \frac{1}{1-x^2}\mathrm{sh}(\arcsin(x)) + \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}\mathrm{ch}(\arcsin(x)).$$

BEAUCOUP d'erreurs de signes ou autre sur cette question.

4. Soit $x \in]-1,1[$, alors, d'après la question précédente, on a

$$\left(1-x^2\right)f''(x) - xf'(x) - f(x) = 0$$

Utilisation de cette équation différentielle

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f est de classe C^n, elle admet donc un DL en 0 à l'ordre n. On en déduit qu'existe une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que l'on peut écrire, quand $x \to 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$.
6. Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction f' est de classe C^n, elle admet donc un DL d'ordre n en 0. De plus, par unicité du DL, on sait que ce DL est égal à la dérivation terme à terme DL d'ordre $n+1$ en 0 de f. On a donc Montrer que $f'(x) = \sum_{k=0}^{n+1} k a_k x^{k-1} + o(x^n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   On admet qu'on a de même $f''(x) = \sum_{k=0}^{n+2} k(k-1)a_k x^{k-2} + o(x^n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   Certains m'ont juste dit qu'il fallait dériver le DLn de f et ont ensuite ramé pour m'expliquer pourquoi on avait un terme en plus. Attention, si f admet un DLn, il n'y a aucune raison pour que f' admette un DLn-1 !

7. Soit $n \in \mathbb{N}$, on remplace f, f' et f'' par leur DL d'ordre n en 0, on obtient :

$$\begin{aligned}
& \left(1-x^2\right) f''(x) - x f'(x) - f(x) \\
= \quad & (1-x^2) \sum_{k=0}^{n+2} k(k-1) a_k x^{k-2} - x \sum_{k=0}^{n+1} k a_k x^{k-1} - \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n) \\
= \quad & \sum_{k=0}^{n} (k+2)(k+1) a_{k+2} x^k - \sum_{k=0}^{n+2} k(k-1) a_k x^k - \sum_{k=0}^{n+1} k a_k x^k - \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^{n+2})
\end{aligned}$$

   on en déduit que le terme en x^n vaut

$$c_n = (n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n - na_n - a_n = (n+2)(n+1) - (n^2+1)a_n.$$

8. D'après la question précédente, le coefficient c_n de la fonction étudiée vaut $(n+2)(n+1)a_{n+2} - (n^2+1)a_n$ et, comme cette fonction est nulle, on a, par unicité du DL, $c_n = 0$ donc $a_{n+2} = \dfrac{n^2+1}{(n+1)(n+2)} a_n$ et ceci est valable pour tout $n \in \mathbb{N}$.
9. On a $a_0 = f(0) = 0$ et $a_1 = f'(0) = 1$.
10. On sait que $a_{n+2} = \dfrac{n^2+1}{(n+1)(n+2)} a_n$ et $a_0 = 0$ donc, par récurrence immédiate, $a_{2n} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
11. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $a_{2n+1} = \dfrac{(2n-1)^2+1}{2n(2n+1)} a_{2n-1}$. On a donc

$$a_3 = \frac{1}{3} a_1 = \frac{1}{3} \text{ et } a_5 = \frac{10}{20} a_3 = \frac{1}{6}.$$

   On retrouve bien les mêmes coefficients.
12. On calcule $a_7 = \dfrac{26}{42} a_5 = \dfrac{13}{126}$, on a donc

$$f(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{6} + \frac{13x^7}{126} + o(x^7).$$