Correction du DM8

Partie I: construction des polynômes de Tchebychev

1. *Soit P et Q deux polynômes tels que $\forall t \in [-1,1], P(t) = Q(t)$. Montrer que $P = Q$.* Le polynôme $P - Q$ admet une infinité de racines (tous les réels entre -1 et 1) donc $P - Q = 0$.

   Faites apparaître l'argument sur les racines.

2. *Montrer que T_n est de degré n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

   On procède par récurrence double sur n. La propriété est vraie au rang $n = 0$ et $n = 1$. Supposons que T_n est de degré n et T_{n+1} est de degré $n+1$ pour $n \geqslant 1$. Alors $2XT_{n+1}$ est de degré $n+2$ et T_n est de degré n; par conséquent T_{n+2} est de degré $n+2$. On peut aussi écrire $\deg(T_{n+2}) = \max(\deg(XT_{n+1}), \deg(T_n))$ car $\deg(XT_{n+1}) \neq \deg(T_n)$. La propriété est héréditaire, par le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier n.

   La plupart d'entre vous a vu qu'il fallait raisonner par récurrence double. Par contre, vous ne faites souvent pas apparaître où vous utilisez l'hypothèse de récurrence au rang n.
   Attention à ne pas mettre "$\forall n$" dans l'hypothèse de récurrence et à ne surtout pas supposer que $HR(n)$ est vraie pour tout n.

3. *Déterminer les coefficients de X^n et X^{n-1} de T_n, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.*

   Soit $n \geqslant 1$. On remarque que le coefficient dominant de T_{n+2} est le double du coefficient dominant de T_{n+1} puisque $\deg(T_n) < \deg(XT_{n+1})$. Comme $T_0 = 1$, on montre par récurrence descendante que le coefficient dominant de T_n est 2^{n-1} pour $n \geqslant 1$.

   Pour le coefficient devant X^{n-1}, on procède également par récurrence. C'est vrai pour T_1. On calcule $T_2 = 2X^2 - 1$, dont le coefficient devant X est nul. Supposons que cela soit vrai pour un entier n et montrons-le au rang $n+1$. Alors, comme $T_{n+1}(X) = 2XT_n(X) - T_{n-1}$, et $\deg(T_{n-1}) = n - 1$, le coefficient devant X^n est le double du coefficient devant X^{n-1} de T_n qui est (par hypothèse de récurrence) nul. Cela achève de montrer le résultat.

   Il était possible de traiter cette question et la précédente en une fois mais je voulais ici que vous remarquiez qu'il n'était pas nécessaire de raisonner par récurrence double. En effet, vous n'avez besoin que de $\deg(T_n) = n$ et l'hypothèse au rang $n+1$ pour montrer le résultat au rang $n+2$.
   J'ai vu " par récurrence immédiate" qui n'est valable que si vous donnez un argument pour justifier que les termes en X^{n+2} et X^{n+1} de T_{n+2} s'obtiennent en multipliant ceux en X^{n+1} et X^n de T_{n+1} par $2X$ (à savoir que $\deg(T_n) = n$).
   J'ai vu aussi beaucoup de notations très ambiguës comme a_n et a_{n-1} pour les coefficients devant X^n et X^{n-1} de T_n puis a_{n+1} et a_n pour les coefficients devant X^{n+1} et X^n de T_{n+1} (vous avez alors a_n qui désigne deux choses différentes !!

4. *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$.*

   On le montre par récurrence double sur n. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $HR(n)$: "$\forall \theta \in \mathbb{R}, T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$". L'initialisation est vraie puisque, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ $T_1(\cos\theta) = \cos\theta$ et

$T_0(\cos\theta) = 1 = \cos(0\theta)$. On suppose qu'il existe un entier n tel que, HR(n) et HR(n+1) soient vraies. Montrons-le pour $n+2$.

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On a

$$T_{n+1}(\cos\theta) = 2\cos\theta T_n(\cos\theta) - T_{n-1}(\cos\theta) = 2\cos\theta\cos(n\theta) - \cos((n-1)\theta)$$

On écrit $\cos((n-1)\theta) = \cos(n\theta)\cos\theta + \sin(n\theta)\sin\theta$ et on obtient

$$T_{n+1}(\cos\theta) = \cos\theta\cos(n\theta) - \sin\theta\sin(n\theta) = \cos((n+1)\theta)$$

Le résultat est vrai au rang n+2. On a montré, par récurrence double sur n, que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall\theta \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$.
le "$\forall\theta \in \mathbb{R}$" doit être à l'intérieur de HR(n). Beaucoup travaillent avec θ sans préciser ce que c'est.

5. *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, T_n est le seul polynôme de $\mathbb{R}[X]$ tel que $P(\cos\theta) = \cos n\theta$.*

   Supposons donc qu'il existe un autre polynôme P tel que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $P(\cos\theta) = \cos(n\theta)$. Alors $P - T_n$ admet $\cos(\theta)$ pour racines, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ donc une infinité de racines ce qui montre que $P - T_n = 0$ d'où l'unicité de T_n.

Il est inutile de raisonner par l'absurde et de supposer $P \neq T_n$.

Partie II: une autre construction de la suite

6. *Soit $n \in \mathbb{N}$. A l'aide de la formule de Moivre : $\big(\cos(x) + i\sin(x)\big)^n = \cos(nx) + i\sin(nx)$, montrer qu'il existe un polynôme $T_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que :*

$$\forall x \in \mathbb{R}\,,\ \cos(nx) = T_n(\cos(x)) \qquad (E_n)$$

   Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.

   On sait que $(\cos(x) + i\sin(x)) = \cos(nx) + i\sin(nx)$ donc $\cos(nx) = \mathcal{R}e\left((\cos(x) + i\sin(x))^n\right)$.
   On a

$$\begin{aligned}\cos(nx) &= \mathcal{R}e\left((\cos(x) + i\sin(x))^n\right)\\ &= \mathcal{R}e\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} i^k \sin(x)^k \cos(x)^{n-k}\right)\end{aligned}$$

   On remarque que seuls les termes d'indices pairs sont réels, les autres sont imaginaires purs. Ainsi,

$$\cos(nx) = \sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n\\ k \text{ pair}}}\binom{n}{k} i^k \sin(x)^k \cos(x)^{n-k}$$

   On pose $2j = k$, j varie de 0 à $\left\lfloor\dfrac{n}{2}\right\rfloor$ donc

$$\cos(nx) = \sum_{j=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\binom{n}{2j}(-1)^j\sin^{2j}(x)\cos^{n-2j}(x),$$

   puis

$$\cos(nx) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2j} (-1)^j \left(1-\cos^2(x)\right)^j \cos^{n-2j}(x).$$

On pose

$$T_n(X) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2j} (-1)^j \left(1-X^2\right)^j X^{n-2j}.$$

D'après ce qui précède, on a bien, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos(x)) = \cos(nx)$.

Il faut justifier qu'on ne garde que les termes d'indices pairs (dire que i^k est réel quand k est pair ne suffit pas!) PUIS faire un changement d'indice et enfin remplacer le $\sin^2$ par $1-\cos^2$. Certains m'ont écrit des coefficients du polynôme avec des $\sin x$! J'ai vu des " quand p pair, $i^p = (-1)^{p/2}$ par récurrence". Ce n'est pas une récurrence !!! ça tombe directement avec l'exponentielle complexe.

7. *Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, et $x \in \mathbb{R}$, factoriser*

$$\cos((n+1)x) + \cos((n-1)x)$$

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, et $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}\cos((n+1)x) + \cos((n-1)x) &= \mathcal{R}e\left(e^{i(n+1)x} + e^{i(n-1)x}\right) \\ &= \mathcal{R}e\left(e^{inx} 2\cos(x)\right) \\ &= 2\cos(nx)\cos(x)\end{aligned}$$

8. *Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:*

$$T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, alors, d'après la question précédente:

$$T_{n+1}(\cos(x)) + T_{n-1}(\cos x) = \cos((n+1)x) + \cos((n-1)x) = 2\cos(x)\cos(nx) = 2\cos(x)T_n(\cos x).$$

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos(x)$ est racine du polynôme $T_{n+1}(X) - 2XT_n(X) + T_{n-1}(X)$. Ce polynôme admet donc une infinité de racines. Par conséquent, il est nul.

On a bien

$$T_{n+1}(X) = 2XT_n(X) - T_{n-1}(X).$$

L'égalité des évaluations ne donne pas directement l'égalité polynomiale, il faut la justifier !

Partie III: racines de T_n

9. *Déterminer les racines de T_n dans $[-1,1]$*

On remarque que lorsque $\theta \in [0,\pi]$ est tel que $\cos(n\theta) = 0$, on a alors $\cos\theta$ racine de T_n et réciproquement, pour tout $y \in [-1,1]$ racine de T_n, il existe $\theta \in [0,\pi]$ tel que $\cos(\theta) = y$, on a alors $\cos(n\theta) = 0$. On sait que

$$\cos(n\theta) = 0 \Leftrightarrow n\theta \equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \Leftrightarrow \theta \equiv \frac{\pi}{2n}\left[\frac{\pi}{n}\right] \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}, k \in \mathbb{Z}$$

Par ailleurs, $\theta \in [0,\pi] \Leftrightarrow k \in [\![0,n-1]\!]$. On sait donc que $\cos(\frac{(2k+1)\pi}{2n})$ est racine de T_n pour tout $k = 0 \dots n-1$. Montrons maintenant qu'elles sont distinctes. On a

$$\frac{\pi}{2n} \leqslant \frac{(2k+1)\pi}{2n} \leqslant \frac{(2n-1)\pi}{2}$$

pour tout $k \in [\![0,n-1]\!]$ donc $\dfrac{(2k+1)\pi}{2n} \in [0,\pi]$ pour tout $k \in [|0,n-1|[$ et cos est injectif sur cet intervalle, ce qui montre bien que les cosinus de ces valeurs sont distincts.

Si vous ne justifiez pas que $\theta \in [0,\pi]$ mais que vous travaillez avec $\theta \in \mathbb{R}$, vous arrivez à $\theta = \dfrac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}, k \in \mathbb{Z}$ puis, par 2π-périodicité de cos, $k \in [\![0,2n-1]\!]$.

On remarque ensuite que pour tout $k \in [\![n,2n-1]\!]$, $2n-1-k \in [\![0,n-1]\!]$ et

$$\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) = \cos\left(2n\pi - \frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) = \cos\left(\frac{(2(2n-k-1)+1)\pi}{2n}\right),$$

donc

$$\{\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right), k \in \mathbb{Z}\} = \{\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right), k \in [\![0,2n-1]\!]\} = \{\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right), k \in [\![0,n-1]\!].$$

Le passage de $k \in \mathbb{Z}$ à $k \in [\![0,n-1]\!]$ a souvent été mal justifié. Me dire qu'il faut que θ appartienne à $[0,\pi]$ " pour que les racines soient distinctes" est notamment très faux. Si on considère l'ensemble $\{\cos\left(\frac{\pi}{5} + \frac{2k\pi}{3}\right), k \in \mathbb{Z}\}$ par exemple. En ne prenant que les angles entre 0 et π (donc que $k = 0$ et 1) vous perdez des éléments de l'ensemble.

10. *En déduire toutes les racines de T_n dans $\mathbb{C}$ et préciser leurs multiplicités.*

On a exhibé n racines distinctes de T_n à la question précédente et nous savons que T_n est de degré n. On a donc trouvé toutes les racines de T_n et, comme il y en a n, elles sont simples .
Les racines ne sont simples que parce que vous en avez assez. Me dire qu'elles sont simples parce qu'elles sont distinctes n'a donc aucun sens, il faut parler du degré.

11. *En déduire la factorisation de T_n dans $\mathbb{R}[X]$.*

Comme les n racines trouvées sont réelles, on a $T_n(X) = 2^{n-1}\prod_{k=0}^{n-1}\left(X - \cos(\frac{(2k+1)\pi}{2n})\right)$.
On est dans le tout petit pourcentage de polynôme non unitaire, il fallait donc penser au coefficient dominant.

12. *Donner la valeur explicite du produit* $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$.

On sait que

$$T_n(0) = 2^{n-1}(-1)^n \prod_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right).$$

On a $T_n(0) = T_n\left(\cos\frac{\pi}{2}\right) = \cos\dfrac{n\pi}{2}$. On en déduit que

$$\prod_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) = \frac{(-1)^n \cos\frac{n\pi}{2}}{2^{n-1}}.$$

Si $n=2m$, on a

$$\prod_{k=0}^{n-1}\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)=\frac{\cos(m\pi)}{2^{n-1}}=\frac{(-1)^m}{2^{2m-1}}$$

Si $n=2m+1$, alors

$$\prod_{k=0}^{n-1}\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)=-\frac{\cos\left(m\pi+\frac{\pi}{2}\right)}{2^{2m}}=0.$$

Il faut bien sûr simplifier l'expression au maximum.

Partie IV: minimum de la norme infinie

Dans toute cette partie, on confond un polynôme et sa fonction polynomiale associée.

13. *Soit f une fonction continue, justifier l'existence de* $\max_{t\in[-1,1]}|f(t)|$.

    La fonction $|f|$ étant continue sur le segment $[0,1]$, elle est bornée et atteint ses bornes, elle admet donc un maximum sur $[0,1]$.

14. *Montrer que* $||T_n||_\infty=1$
    Soit $x\in[-1,1]$, alors il existe $\theta\in[0,2\pi]$ tel que $x=\cos(\theta)$. On a alors $T_n(x)=T_n(\cos\theta)=\cos(n\theta)$ donc $|T_n(x)|\leqslant 1$. Par ailleurs, $T_n(1)=\cos(0)=1$ donc on a bien $||T_n||_\infty=1$.
    Si vous écrivez $\cos(n\theta)\in[-1,1]$ pour tout θ, vous avez uniquement $||T_n||_\infty\leqslant 1$.

15. *En déduire qu'il existe un polynôme unitaire V_n de degré n, que l'on précisera, tel que $||V_n||_\infty=2^{n-1}$.*
    On sait que T_n a pour coefficient dominant 2^{n-1} donc $\frac{1}{2^{n-1}}T_n$ est unitaire et

    $$\forall x\in[-1,1],\left|2^{1-n}T_n(x)\right|\leqslant 2^{1-n},$$

    ce majorant étant atteint pour $x=0$. On en déduit que $2^{1-n}T_n$ est bien un polynôme unitaire vérifiant $||2^{1-n}T_n||_\infty=2^{1-n}$.

16. *Dans cette question, on fixe $n\in\mathbb{N}^\star$ et on suppose qu'il existe un polynôme unitaire P de degré n tel que $||P||_\infty<2^{1-n}$.*

    (a) *Montrer que* $\deg(V_n-P)\leqslant n-1$.
    Comme P et T_n sont unitaires, le terme en X^n de la différence est nul, on a donc $\deg(V_n-P)\leqslant n-1$.

    (b) *On pose, pour tout $k\in[\![0,n]\!],x_k=\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$. Donner, pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, le signe de $(V_n-P)(x_k)$.*

    Soit $k\in[\![0,n]\!]$, alors

    $$\begin{aligned}(V_n-P)(x_k)&=V_n(x_k)-P(x_k)\\&=2^{1-n}T_n\left(\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)-P(x_k)\\&=2^{1-n}\cos(k\pi)-P(x_k)\\&=2^{1-n}(-1)^k-P(x_k)\end{aligned}$$

Or $|P(x_k)| < 2^{1-n}$ donc

$$2^{n-1}\left((-1)^k - 1\right) \leqslant (V_n - P)(x_k) \leqslant 2^{1-n}\left((-1)^k + 1\right).$$

On en déduit que $(V_n - P)(x_k)$ est positif pour k pair et négatif pour k impair donc il est du même signe que $(-1)^k$.

(c) *En déduire que $V_n = P$.*
D'après la question précédente, on peut appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à $V_n - P$ entre x_k et x_{k+1} pour k variant de 0 à $n-1$. Cela nous donne n racines distinctes de $V_n - P$ (car les intervalles sont disjoints). Or, ce polynôme est de degré au plus $n-1$, il est donc nul.

Attention à ne pas me dire que $V_n - P$ admet au plus $n-1$ racines: c'est faux, il en admet une infinité!

17. *conclure*
On a montré que si P est unitaire et $||P||_\infty < 2^{1-n}$, alors $P = V_n$ ce qui est absurde puisque $||V_n||_\infty = 2^{1-n}$. Ainsi, on a montré, par l'absurde, que pour tout polynôme unitaire P, $||P|| \geqslant 2^{1-n}$. Par ailleurs, ce minorant est atteint pour V_n. Ainsi, on a montré que l'ensemble

$$\{||P||_\infty, P \text{ unitaire }\},$$

admet un minimum égal à 2^{1-n}.
Beaucoup de choses confuses sur la conclusion.