Indications

1 Montrer que pour tout $(x, y) \in E^2$, $\lambda_x = \lambda_y$, que (x, y) soit libre ou non.

2 Poser une CL nulle et appliquer f^{n-1}.

5 Montrer que $f(\lambda P_1 + P_2) = \lambda P_1 + P_2$, résoudre $f(P) = 0$ puis déterminer la forme générale d'un élément de l'image.

6 Montrer que $f(\lambda P + Q) = \lambda f(P) + f(Q)$ puis exprimer $f\left(\sum_{k=0}^{n} a_k X^k\right)$ comme une unique somme.

7 Poser $P = a_2X^2 + a_1X + a_0$ et calculer son intégrale.

8 Pour le noyau, utiliser les matrices élémentaires, pour l'image raisonner avec inclusion

9 Prendre $Q = P - P'$ et exprimer les coefficients de P en fonction de deux de Q.

10 Montrer que $\varphi(\lambda P_1 + P_2) = \lambda P_1 + P_2$ puis chercher à exprimer les coefficients de P tel que $P + P' = Q$ en fonction de ceux de Q.

11 Résoudre les équations différentielles $f + f' = 0$ et $f + f' = g$ avec $g \in E$.

12 Exhiber l'inverse de g en utilisant le quotient de $X^n - 1$ par $X - 1$.

13
1. exhiber sa réciproque.
2. à la main.
3. montrer que les images d'une base de G_a appartiennent à G_a.
4. Montrer que F est un ssev contenant une base de G_a.
5. Pensez simple !

14
1. à la main.
2. raisonner par équivalence.
3. Déterminer un antécédent.

15 Raisonner par double implication sachant qu'on a toujours une inclusion.

16 Prendre un élément du ssev et montrer que son image par g appartient encore à ce ssev.

17 il faut juste trouver quelle inclusion est la bonne !

18 Raisonner par analyse/synthèse puis utiliser la phase d'analyse pour déterminer le projeté.

19
1. Calculer $r \circ r$ et utiliser tout ce que l'on sait de p et q.
2. On a une inclusion claire, on montre l'inclusion réciproque

21 Déterminer le noyau puis trouver un élément qui n'a pas d'antécédent.

22
1. faire une disjonction de cas lorsque $\deg(P) = a$ ou non.
2. déterminer le noyau, trouver un élément qui n'a pas d'antécédent.

23
1. Raisonner par analyse/synthèse.
2. Utiliser le résultat de la phase d'analyse.

24
1. Montrer que $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$ puis, par analyse/synthèse, que f est surjective.
2. Appliquer la formule du binôme de Newton.

25
1. Raisonner par double implication.
2. Prendre $x \in \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q)$ et montrer que $x = 0_E$ en utilisant la question 1.
3. Montrer que $\mathrm{Im}(p + q) = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Im}(q)$ et $\mathrm{Ker}(p + q) = \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$.

26 Raisonner par double implication (et analyse synthèse)

27 Utiliser l'inclusion des noyau/image d'une composée et raisonner par double inclusion.

28 raisonner par analyse synthèse