

TD 17: Arithmétique.

1 Divisibilité/ division euclidienne

Exercice 1.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3^{2n} - 2^n$ est divisible par 7.

Exercice 2.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $2^{2^n} - 6$ est divisible par 10.

Exercice 3.

Montrer que la somme des cubes de trois entiers consécutifs est divisible par 9.

Exercice 4.

Déterminer les entiers $n \in \mathbb{N}^*$ tels que si on divise 4994 et 991 par n , on obtient respectivement un reste de 2 et 1

Exercice 5.

Déterminer les entiers $n \in \mathbb{N}^*$ tels que si on divise 4373 et 826 par n , on obtient respectivement un reste de 8 et de 7.

Exercice 6.

Déterminer les entiers naturels n tels que $\frac{2n^2 - n - 6}{n + 3} \in \mathbb{Z}$.

2 PGCD, PPCM

Exercice 7.

Déterminer les entiers $b \in \mathbb{N}^*$ tels que $\text{ppcm}28b = 140$.

Exercice 8.

Déterminer les entiers naturels a et b tels que $\text{pgcd}ab = 42$ et $\text{ppcm}ab = 1680$.

Exercice 9.

Soit a et b des entiers naturels non nuls et $\lambda \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que $\text{pgcd}\lambda a \lambda b = \lambda \text{pgcd}ab$.
2. En déduire que $\text{ppcm}\lambda a \lambda b = \lambda \text{ppcm}ab$.

Exercice 10.

Déterminer $\text{pgcd}nm(2m + 1)n$.

Exercice 11.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose

$$a = n^2 + 3n \text{ et } b = n^2 + 5n + 6$$

1. Déterminer $\text{pgcd}nn + 2$.
2. Déterminer $\text{pgcd}ab$.

3 Nombres premiers

Exercice 12.

1. Soit $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. Montrer qu'aucun des entiers compris entre $k! + 2$ et $k! + k$ n'est premier.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Peut-on trouver une liste de n entiers consécutifs dont aucun n'est premier?

Exercice 13.

Soit a, n des entiers naturels non nuls et p un nombre premier. Montrer que

$$p|a^n \Rightarrow p^n|a^n$$

Exercice 14.

Montrer qu'il existe un nombre infini de premiers dont le reste de la division euclidienne par 4 vaut 3.