

TD 16: Algèbre linéaire.

1 sous-espaces vectoriels

Exercice 1.

Soit $F = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = 3u_n + 2nu_{n-1}\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Exercice 2.

Soit $F = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}), f(0) = f'(1) = 0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

Exercice 3.

Montrer que $\text{vect}(A \cap B) \subset \text{vect}(A) \cap \text{vect}(B)$ mais qu'il n'y a, en général, pas égalité.

2 Sous-espaces supplémentaires et somme directe

Exercice 4.

Soit $F = \mathbb{R}$, $G = \{P \in \mathbb{R}_3[X], P'(0) = 0 = P(0)\}$ et $H = \text{vect}(1 + X)$. Montrer que F , G et H sont en somme directe.

Exercice 5.

Soit $F = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}), f(0) = \int_0^1 f(t) dt = 0\}$ et $G = \{x \mapsto ax + b, (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathcal{C}(\mathbb{R})$.

Exercice 6.

Montrer que $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X], P'(1) = 0\}$ et $G = \text{Vect}(X^3 + 2)$ sont en somme directe.

3 Détermination d'un supplémentaire

Exercice 7.

- Déterminer un supplémentaire de $F = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}), f(0) + f'(0) = 0\}$ dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.
- Déterminer un supplémentaire de F engendré par une fonction affine non constante.

Exercice 8.

Déterminer un supplémentaire dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ de $F = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, u_3 = 0\}$.

Exercice 9.

Soit $A = X^3 - 4X + 2$. On note $F = \{P \in \mathbb{R}[X], A \text{ divise } P\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ et déterminer un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}[X]$.

4 Familles libres, génératrices

Exercice 10.

On note f_1, f_2, f_3, f_4 les fonctions de $[0, 2\pi]$ dans $\mathbb{R}$ définies par $f_1(x) = \cos x$, $f_2(x) = x \cos x$, $f_3(x) = \sin x$ et $f_4(x) = x \sin x$. Montrer que la famille (f_1, f_2, f_3, f_4) est libre.

Exercice 11.

Montrer que les suites $(1)_{n \in \mathbb{N}}$, $(n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(2^n)_{n \in \mathbb{N}}$ forment une famille libre de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Exercice 12.

Soient E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et (x, y, z) une famille libre de E . Montrer que $(x + y, y + z, z + x)$ est une famille libre de E .

Exercice 13.

Montrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels et déterminer une famille génératrice de chacun d'eux.

- $F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + 2y + z = 0 \text{ et } 2x + y + 3z = 0\}$.
- $F_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + 3y - z = t\}$.
- $F_3 = \{P \in \mathbb{R}_3[X], P(X^2) = (X^3 + 1)P(X)\}$.

Exercice 14.

Soient E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que, $\forall x \in E, \exists \lambda_x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \lambda_x x$. Montrer que f est une homothétie.

Exercice 15.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et x_0 tel que $f^{n-1}(x_0) \neq 0_E$. Montrer que la famille

$$(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$$

est libre.

Exercice 16.

Soit $(a_1, \dots, a_p)$ des réels distincts. Pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on pose¹ $L_i = \prod_{\substack{1 \leq k \leq p \\ k \neq i}} \frac{X - a_k}{a_i - a_k}$.

1. Expliciter L_1, L_2 et L_3 dans le cas particulier où $(a_1, a_2, a_3) = (-1, 1, 0)$.
2. Pour tout $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, calculer $L_i(a_j)$.
3. Montrer que la famille $(L_1, \dots, L_p)$ est libre.
4. Soit $P \in \mathbb{R}_{p-1}[X]$, on pose $Q = \sum_{i=1}^p P(a_i)L_i(X)$. Pour tout $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, calculer $Q(a_j)$.
5. En déduire que $(L_1, \dots, L_p)$ est une base de $\mathbb{R}_{p-1}[X]$.

5 Si besoin d'encore un peu d'entraînement**Exercice 17.**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose $F_\alpha = \{P \in \mathbb{R}_n[X], P(\alpha) = 0\}$.

1. Montrer que F_α est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, déterminer $F_\alpha \cap F_\beta$.

Exercice 18.

Soit $E = \mathcal{C}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$. On note $F = \{x \mapsto ax \ln(x) + b \ln(x), (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E .

Exercice 19.

Montrer que les deux ensembles $F = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}), f(0) = f'(0) = f(1) = 0\}$ et $G = \{x \mapsto ax^2 + bx + c, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$ sont supplémentaires dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

Exercice 20.

Soit F l'ensemble des fonctions constantes et $G = \left\{f \in \mathcal{C}(R), \int_0^1 f(t) dt = 0\right\}$. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathcal{C}(\mathbb{R})$.

Exercice 21.

Déterminer un supplémentaire de $F = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}), f(0) = f'(0) = 0\}$ dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

Exercice 22.

Soit $F = \{P \in \mathbb{R}[X], P(1) = P(2)\}$. Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}[X]$.

¹les L_i sont appelés polynômes interpolateurs de Lagrange

Exercice 23.

Pour tout $k \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$, on pose $f_k : x \mapsto \cos(kx)$. Montrer que la famille $(\cos(kx))_{k \in \llbracket 1, 4 \rrbracket}$ est libre.

Exercice 24.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, T_n désigne le polynôme de Tchébychev. Soit $m \in \mathbb{N}$. La famille $(T_0, \dots, T_m)$ est-elle libre?

6 Une fois qu'on est à l'aise**Exercice 25.**

Soit F, G, H des sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E .

1. Comparer $F \cap (G + H)$ et $(F \cap G) + (F \cap H)$.
2. Comparer $F + (G \cap H)$ et $(F + G) \cap (F + H)$.
3. Montrer que $F \cap (G + F \cap H) = (F \cap G) + (F \cap H)$.

Exercice 26.

Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ et soient p réels $(a_i)_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket}$ deux à deux distincts dans $[0, 1]$. On pose

$$F = \{f \in E, \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, f(a_i) = 0\}.$$

Déterminer un supplémentaire de F dans E .

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel.
2. Déterminer un supplémentaire de F dans E .

Exercice 27.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on pose $f_k : x \mapsto \cos(kx)$ et $g_k : x \mapsto \cos^k(x)$ et on note T_k le k ième polynôme de Tchébychev.

1. Montrer que $(T_0, \dots, T_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Montrer que $\text{vect}(f_0, \dots, f_n) = \text{Vect}(g_0, \dots, g_n)$.

Memo

- Comment montrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel?
 - Revenir à la définition
 - Montrer que c'est l'espace engendré par une partie
 - Montrer que c'est le noyau ou l'image d'une application linéaire
- Comment montrer une inclusion entre deux sous-espaces vectoriels?
 - Raisonner avec les éléments
 - Raisonner avec les ensembles
- Comment montrer que deux sous-espaces vectoriels sont égaux?
Montrer la double inclusion
- Comment montrer qu'une famille est libre?
 - Résoudre un système
 - Prendre des valeurs particulières, dériver ou passer à la limite lorsque c'est une famille de fonctions.
 - Reconnaître une famille libre, à permutation près (polynômes de degrés échelonnés, famille échelonnée de R^n)
- Comment montrer que deux sous-espaces vectoriels sont en somme directe?
Prendre un élément de l'intersection et montrer qu'il est nul.
- Comment montrer que deux sous-espaces de E sont supplémentaires dans E ?
 - Utiliser l'unicité de l'écriture.
 - Procéder par analyse/synthèse (supposer que tout élément de E s'écrit comme la somme de deux éléments et expliciter ces deux éléments).
- Comment déterminer un supplémentaire dans E d'un sous-espace vectoriel F ?
Trouver F' tel que $F + F' = E$ puis montrer que $F \cap F' = \{0\}$ (ce qui peut se faire en utilisant l'unicité de l'écriture)