Correction du TD n 14

Correction 1 La manière la plus élégante est de considérer la fonction polynômiale f associée à P . Elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et son développement limité en 0 est :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n).$$

Or, $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$. Par unicité du développement limité, on peut identifier les

coefficients et on obtient $\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = a_k$, autrement dit $P^{(k)}(0) = k!a_k$.

Il est également possible d'écrire

$$\begin{aligned} P^{(j)}(X) &= \sum_{k=0}^n a_k (X^k)^{(j)} \\ &= \sum_{k=j}^n a_k \frac{k!}{(k-j)!} X^{k-j} \text{ car } (X^k)^{(j)} = 0 \text{ pour } j > k \end{aligned}$$

Le terme constant de $P^{(j)}(X)$ correspond au terme de la somme pour $k = j$ et on retrouve l'égalité souhaitée.

Correction 2 On raisonne par analyse/synthèse.

Analyse: On suppose qu'il existe un polynôme P de degré n tel que $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

$P^{(k)}(1) = k$. On pose $Q(X) = P(X+1)$ et on note $Q = \sum_{k=0}^n a_k X^k$. On a $\forall k \in$

$\mathbb{N}$, $Q^{(k)}(0) = P^{(k)}(1)$. On a donc :

$$Q^{(k)}(0) = k.$$

D'après l'exercice 1, on sait que

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, Q^{(k)}(0) = k!a_k,$$

on a donc

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, k!a_k = k,$$

d'où

$$a_0 = 0 \text{ et } \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, a_k = \frac{1}{(k-1)!}.$$

Ainsi, $Q(X) = \sum_{k=1}^n \frac{X^k}{(k-1)!}$ et $P(X) = Q(X-1) = \sum_{k=1}^n \frac{(X-1)^k}{(k-1)!}$.

Synthèse: Réciproquement, on pose $P(X) = \sum_{j=1}^n \frac{(X-1)^j}{(j-1)!}$. Le polynôme P est bien

de degré n . De plus, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$P^{(k)}(X) = \sum_{j=k}^n \frac{j!(X-1)^{j-k}}{(j-k)!(j-1)!} = \sum_{j=k}^n \frac{j(X-1)^{j-k}}{(j-k)!},$$

on a donc

$$P^{(k)}(1) = \frac{k}{0!} = k.$$

On a montré l'existence d'un tel polynôme. De plus, la phase d'analyse montre que ce polynôme est unique.

Correction 3 1. On a $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ et $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$ donc

$$\begin{aligned} \ln(1+x) \cos(x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^3}{2} + o(x^3) \\ &= x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \end{aligned}$$

2. On va multiplier le DL de $x \mapsto e^x$ et celui de $\frac{1}{1+x}$. Comme on veut un DL à l'ordre 3, on fait un DL à l'ordre 3 des deux fonctions :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3),$$

et

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3).$$

On a donc

$$\begin{aligned} \frac{e^x}{1+x} &= 1 - x + x^2 - x^3 + x - x^2 + x^3 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + \frac{x^3}{3!} o(x^3) \\ &= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{4x^3}{3} + o(x^3) \end{aligned}$$

3. On a

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3),$$

donc $\sin(2x) = 2x - \frac{4x^3}{3} + o(x^3)$. Ici, on peut appliquer la formule du DL en 0 de sinus à $2x$ car $2x \rightarrow 0$. Notez que $o(8x^3) = o(x^3)$ donc on écrit simplement $o(x^3)$.

4. Attention, $2x+1 \rightarrow 1$ quand $x \rightarrow 0$, on ne peut donc pas remplacer x par $2x+1$ dans le DL en 0 de exponentielle ! On écrit

$$xe^{2x+1} = xe \cdot e^{2x},$$

puis on utilise le DL de e^x :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2),$$

donc

$$e^{2x} = 1 + 2x + 2x^2 + o(x^2).$$

(on fait un DL à l'ordre 2 car, en multipliant par x , on obtiendra un DL à l'ordre 3).

On a donc:

$$xe^{2x+1} = ex + 2ex^2 + 2ex^3 + o(x^3).$$

5. On va diviser par x^2 , il nous faut donc un DL à l'ordre 5 de $1 - \cos(x)$.

On a

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)$$

(car le terme en x^5 est nul) donc

$$1 - \cos(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} + o(x^5),$$

puis

$$\frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2} - \frac{x^2}{4!} + o(x^3).$$

On sait que la limite de $\frac{1 - \cos(x)}{x^2}$ est $\frac{1}{2}$ donc le premier terme du DL est juste !

6. On va intégrer le DL de $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$. Comme on veut un DL à l'ordre 3, il suffit d'intégrer un DL à l'ordre 2 de $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$.

On écrit

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + o(x^2),$$

en intégrant, on obtient :

$$\arctan(x) = \arctan(0) + x - \frac{x^3}{3} + o(x^3) = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

Correction 4 La fonction $\tan$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, elle admet donc un DL à tout ordre. On sait que $\tan(x) \sim x$ donc $\tan(x) = x + o(x)$. En élevant au carré, on obtient $\tan^2(x) = x^2 + o(x^2)$ donc $1 + \tan^2(x) = 1 + x^2 + o(x^2)$. Comme $\tan' = 1 + \tan^2$, on a le DL de $\tan'$ que l'on peut intégrer. On obtient, puisque $\tan(0) = 0$, $\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$. Pour obtenir un DL d'ordre plus grand, on recommence :

$$\tan^2(x) = x^2 + \frac{2x^4}{3} + o(x^4),$$

d'où $\tan'(x) = 1 + x^2 + \frac{2x^4}{3} + o(x^4)$ et, en intégrant, $\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)$. On recommence une dernière fois :

$$\tan^2(x) = x^2 + \frac{x^6}{9} + \frac{2x^4}{3} + \frac{4x^6}{15} + o(x^6) = x^2 + \frac{2x^4}{3} + \frac{17x^6}{45} + o(x^6).$$

d'où $1 + \tan^2(x) = 1 + x^2 + \frac{2x^4}{3} + \frac{17x^6}{45} + o(x^6)$ et, en intégrant : $\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + o(x^7)$.

Correction 5 On pose $x = 1 + h$, on a $h \rightarrow 0$ et $x^3 = 1 + 3h + 3h^2 + h^3$. On commence par chercher un DL3 en 0 de $y \mapsto \arctan(1 + y)$. On va, pour cela, calculer un DL2 de sa dérivée. On écrit :

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 + (1 + y)^2} &= \frac{1}{2} \frac{1}{1 + y + \frac{y^2}{2}} = \frac{1}{2} \left(1 - y - \frac{y^2}{2} + y^2 + o(y^2) \right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{y}{2} + \frac{y^2}{4} + o(y^2) \end{aligned}$$

On intègre et on obtient :

$$\arctan(y + 1) = \arctan(1) + \frac{y}{2} - \frac{y^2}{4} + \frac{y^3}{12} + o(y^3)$$

Enfin, on pose $y = 3h + 3h^2 + h^3$, on obtient :

$$\begin{aligned} \arctan((1+h)^3) &= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(3h + 3h^2 + h^3) - \frac{1}{4}(9h^3 + 18h^3) + \frac{9h^3}{4} + o(h^3) \\ &= \frac{\pi}{4} + \frac{3h}{2} - \frac{3h^2}{4} - \frac{3h^3}{4} + o(h^3) \end{aligned}$$

Il suffit maintenant de remplacer h par $x-1$ pour avoir le DL souhaité :

$$\arctan(x^3) = \frac{\pi}{4} + \frac{3(x-1)}{2} - \frac{3(x-1)^2}{4} - \frac{3(x-1)^3}{4} + o((x-1)^3).$$

Correction 6 On a $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$ et $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)$ donc :

$$\begin{aligned} \sin(\ln(x+1)) &= \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right) - \frac{1}{6} \left(\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\right)^3 + o(x^4) \\ &= \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right) - \frac{1}{6} \left(x^3 - 3x^2 \frac{x^2}{2}\right) + o(x^4) \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^4) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \ln(\sin(x)+1) &= \left(x - \frac{x^3}{6}\right) - \frac{1}{2} \left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2 + \frac{1}{3} \left(x - \frac{x^3}{6}\right)^3 - \frac{1}{4} \left(x - \frac{x^3}{6}\right)^4 + o(x^4) \\ &= \left(x - \frac{x^3}{6}\right) - \frac{1}{2} \left(x^2 - 2x \frac{x^3}{6}\right) + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4) \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} + o(x^4) \end{aligned}$$

On a donc $\sin(\ln(1+x)) - \ln(\sin(x)+1) = \frac{x^4}{12} + o(x^4)$ d'où :

$$\sin(\ln(1+x)) - \ln(\sin(x)+1) \sim \frac{x^4}{12}.$$

Correction 7 On a $\cos(x) - 1 = -\frac{x^2}{2} + o(x^3)$ et $\sin^2(x) = x^2 + o(x^3)$. On en déduit que :

$$f(x) = \frac{-\frac{x^2}{2} + o(x^3)}{x^2 + o(x^3)} = \frac{-\frac{1}{2} + o(x)}{1 + o(x)} = -\frac{1}{2} + o(x).$$

On en déduit que f admet une limite finie en 0 égale à $-\frac{1}{2}$, elle est donc prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = -\frac{1}{2}$. De plus, la fonction prolongée est continue et admet un DL1 en 0, on peut donc affirmer qu'elle est dérivable.

Correction 8 On écrit $f(x) = \frac{\cos x - \sqrt{1-x^2}}{x^4} = \frac{1}{6} + o(x^2) = \frac{1}{6} + o(x)$. On en déduit que f admet une limite finie en 0 donc elle est prolongeable par continuité en posant $f(0) = \frac{1}{6}$. Le prolongement continu de f admet un DL d'ordre 1 en 0, il est donc dérivable en 0 et $f'(0) = 0$ car le coefficient devant x est nul.

Correction 9 La difficulté de cet exercice est de déterminer à quel ordre on doit faire le DL.

1. On divise par x^2 , il faut donc avoir au moins un DL d'ordre 2 au numérateur pour éviter de tomber sur une forme indéterminée.

On écrit $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ donc $\ln(1+x) - x = -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$ d'où $\frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = -\frac{1}{2} + o(1)$, ce qui montre que la limite recherchée est $-\frac{1}{2}$.

2. On a $e^x - 1 = x + o(x)$ donc $x(e^x - 1) = x^2 + o(x^2)$.

On a aussi $(x-1) \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) + 1 = x + x^2 - 1 - x - \frac{x^2}{2} + 1 + o(x^2) = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$.

On a donc

$$\frac{(x-1)e^x + 1}{x(e^x - 1)} = \frac{x^2/2 + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} = \frac{1/2 + o(1)}{1 + o(1)}$$

donc la limite recherchée est $\frac{1}{2}$.

Attention, en faisant un DL1 de exponentielle au numérateur, cela ne marche pas ! En effet, on $(x-1)(1+x+o(x)) = x-1+x^2-x+o(x)+o(x^2) = -1+o(x)$. On ne pourra alors pas conclure quant à la limite !

3. Comme on divise par x^2 , on cherche à faire un DL2 du numérateur. On a

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2),$$

donc

$$\sqrt{1+2x} = 1 + x - \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Ainsi, on a $\sqrt{1+2x} - 1 - x = -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$ donc la limite recherchée est $-\frac{1}{2}$.

4. On écrit

- $\cos(x) - 1 = -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$,
- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ et
- $\sin(x) = x + o(x^2)$ (car le terme en x^2 est nul).

On a donc $e^x - 1 - \sin(x) = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ et la limite cherchée est -1 .

5. On met au même dénominateur:

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)} = \frac{\sin(x) - x}{x \sin(x)}.$$

On sait que le dénominateur est équivalent à x^2 (car $\sin(x) \sim x$) donc on va faire un DL 2 du numérateur. Pour cela, il suffit d'écrire $\sin(x) = x + o(x^2)$, donc $\sin(x) - x = o(x^2)$ et au numérateur, $\sin(x) = x + o(x)$ donc $x \sin(x) = x^2 + o(x^2)$. En divisant par x^2 le numérateur et le dénominateur, on trouve que la limite vaut 0.

6. On réduit au même dénominateur :

$$\frac{-\sin^2(x) + x^2 \cos(x)}{x^2 \sin^2(x)}.$$

Comme le dénominateur est équivalent à x^4 , il faut faire un DL à l'ordre 4 du numérateur pour éviter d'avoir une forme indéterminée. On a $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ donc

$$\sin^2(x) = x^2 - 2x \cdot \frac{x^3}{6} + o(x^4) = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)$$

et $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ donc

$$x^2 \cos(x) = x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4).$$

On a donc

$$-\sin^2(x) + x^2 \cos(x) = \frac{x^4}{3} - \frac{x^4}{2} + o(x^4) = -\frac{x^4}{6} + o(x^4).$$

On a $\sin^2(x) = x^2 + o(x^2)$ donc $x^2 \sin^2(x) = x^4 + o(x^4)$, ainsi, on a :

$$\frac{-\sin^2(x) + x^2 \cos(x)}{x^2 \sin^2(x)} = \frac{-\frac{x^4}{6} + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)}$$

En divisant numérateur et dénominateur par x^4 , on trouve que la limite vaut $-\frac{1}{6}$.

Correction 10 On a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1+x)^2} &= \frac{1}{x^2} \left(\frac{1}{1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} \right) \\ &= \frac{1}{x^2} \left(1 - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{4}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) \text{ car } \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} \rightarrow 0 \\ &= \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) \end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} e^{\frac{1}{x^2}} - e^{\frac{1}{(x+1)^2}} &= e^{\frac{1}{x^2}} - e^{\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)} \\ &= 1 + \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) - \left(1 + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) \right) \\ &= \frac{2}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) \end{aligned}$$

On en déduit qu'un équivalent en $+\infty$ de $e^{\frac{1}{x^2}} - e^{\frac{1}{(x+1)^2}}$ est $\frac{2}{x^3}$.

Correction 11 On écrit $\left(\frac{x^2 + 3x - 1}{x^2 + x + 1}\right)^x = \exp\left(x \ln\left(\frac{x^2 + 3x - 1}{x^2 + x + 1}\right)\right) = \exp\left(x \ln\left(\frac{1 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}\right)\right)$. On a :

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = 1 - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

donc :

$$\frac{1 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \left(1 + \frac{3}{x}\right) \left(1 - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 1 + \frac{2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

On en déduit que :

$$\ln\left(\frac{1 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}\right) = \ln\left(1 + \frac{2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right),$$

puis $x \ln\left(\frac{1 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}\right) = 2 + o(1)$. Ainsi, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(\frac{1 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}\right) = 2$ d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = e^2$.

Correction 12 On écrit $\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^N (-1)^k x^k + o(x^N)$, donc

$$\frac{1}{1+x^6} = \sum_{k=0}^N (-1)^k x^{6k} + o(x^{6N}),$$

puis

$$f(x) = \sum_{k=0}^N (-1)^k x^{6k+3} + o(x^{6N+3}).$$

On voit que le développement limité n'a pas de terme en x^n si n n'est pas de la forme $6k+3$. Cela signifie que le coefficient devant x^n est alors nul. Or, ce coefficient vaut $\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ donc, par unicité du DL, si n n'est pas congru à 3 modulo 6, on a $f^{(n)}(0) = 0$. De plus, si $n = 6k+3$, le coefficient devant x^n vaut $(-1)^k$ (d'après le DL trouvé ci-dessus). Or ce coefficient vaut aussi $\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ (par unicité du DL) donc $\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = (-1)^k$ puis $f^{(n)}(0) = n!(-1)^k$.

Correction 13 La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ donc elle admet un DL à tout ordre en 0. On détermine un DL de f à l'ordre 2 en 0. On sait que $\ln(1+h) \sim h$ lorsque h tend vers 0 donc $\ln(\cos(x)) = \ln(1 + (\cos(x) - 1)) \sim \cos(x) - 1$, car $\cos(x) - 1 \rightarrow 0$. Par ailleurs, on a $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ donc $\cos(x) - 1 \sim -\frac{x^2}{2}$. On en déduit que

$$\ln(\cos(x)) \sim -\frac{x^2}{2} \text{ donc } \ln(\cos(x)) = -\frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

On utilise maintenant l'unicité des coefficients du DL, on a

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + o(x^2),$$

donc, en identifiant les coefficients, on a $f'(0) = 0$ et $\frac{f''(0)}{2} = -\frac{1}{2}$ donc $f''(0) = -1$.

Correction 14 On pose $x = 1 + h$ avec h qui tend vers 0. On a alors :

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= \ln(2+h) = \ln(2) + \ln\left(1 + \frac{h}{2}\right) = \ln(2) + \frac{h}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2}\right)^2 + o(h^2) \\ &= \ln(2) + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{8} + o(h^2) \ln(2) + \frac{(x-1)}{2} - \frac{(x-1)^2}{8} + o((x-1)^2) \end{aligned}$$

On en déduit que l'équation de la tangente à f en $x = 1$ est $y = \ln(2) + \frac{(x-1)}{2}$.

On a $f(x) - \left(\ln(2) + \frac{(x-1)}{2}\right) \underset{1}{\sim} -\frac{(x-1)^2}{8}$ et $x \mapsto -\frac{(x-1)^2}{8}$ est négative donc,

au voisinage de 1, on a $f(x) \leq \ln(2) + \frac{(x-1)}{2}$, ce qui montre que la tangente est au-dessus de la courbe.

Correction 15 On pose $x = 2 + h$ avec h qui tend vers 0. On écrit :

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} &= \frac{1}{2+h} = \frac{1}{2} \frac{1}{1+\frac{h}{2}} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{4} + o(h^2)\right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{h}{4} + \frac{h^2}{8} + o(h^2) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{x-2}{4} + \frac{(x-2)^2}{8} + o((x-2)^2). \end{aligned}$$

On en déduit que l'équation de la tangente à f en $x = 2$ est $y = \frac{1}{2} - \frac{x-2}{4}$. Comme $f(x) - \left(\frac{1}{2} - \frac{x-2}{4}\right) \underset{2}{\sim} \frac{(x-2)^2}{8}$, au voisinage de 2, on a $f(x) \geq \frac{1}{2} - \frac{x-2}{4}$ donc la courbe est au-dessus de la tangente.

Correction 16 1. On a $e^x - e^{-x} = 2x + o(x)$ donc $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{2x}$. On a $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ donc f est prolongeable par continuité en posant $f(0) = 0$.

2. On a fait un DL à l'ordre 3 du dénominateur. On a :

$$e^x - e^{-x} = 2x - \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

On en déduit que :

$$f(x) = \frac{x^2}{2x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)} = \frac{1}{2} \frac{x}{1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)}.$$

On pose $X = \frac{x^2}{6} + o(x^3)$. Comme $X \rightarrow 0$, on a :

$$f(x) = \frac{1}{2} x \left(1 + \frac{x^2}{12} + o(x^3)\right) = \frac{x}{2} + \frac{x^3}{12} + o(x^3).$$

3. D'après ce qui précède, on a $f(x) = \frac{x}{2} + o(x)$ donc f est dérivable en 0 et

$$f'(0) = \frac{1}{2}.$$

4. On sait que $f(x) - \frac{x}{2} \sim \frac{x^3}{12}$ donc $f(x) - \frac{x}{2}$ est du signe de $\frac{x^3}{12}$ au voisinage de 0. La tangente est donc en dessous puis au-dessus du graphe. On dit que f admet un point d'inflexion en 0.

Correction 17 1. On a $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + o(t^4)$ et $\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} = (1+t^2)^{-1/2} = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{8} + o(t^4)$. On en déduit que

$$\frac{e^t}{\sqrt{1+t^2}} = 1 + t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{6} + o(t^4).$$

2. Notons F une primitive de $t \mapsto \frac{e^t}{\sqrt{1+t^2}}$, alors

$$F(x) = x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{30} + o(x^5),$$

donc

$$h(x) = F(x) - F(-x) = 2x + \frac{x^5}{15} + o(x^5).$$

Remarque: On accepterait aussi une rédaction du type :

$$h(x) = \int_{-x}^x \left(1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{8} + o(t^4)\right) dt = \left[t + \frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{12} + \frac{t^5}{30} + o(t^5) \right]_{-x}^x = 2x + \frac{x^5}{15} + o(x^5).$$

Correction 18 On écrit

$$\int_0^1 \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt = \left[-\frac{e^{-xt}}{x} \times \frac{1}{1+t^2} \right]_0^1 - \frac{1}{x} \int_0^1 \frac{te^{-xt}}{(1+t^2)^2} dt.$$

or

$$\left| \int_0^1 \frac{te^{-xt}}{(1+t^2)^2} dt \right| \leq \int_0^1 e^{-xt} dt = \frac{1-e^{-x}}{x} \leq \frac{1}{x}.$$

On a donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{te^{-xt}}{(1+t^2)^2} dt = O\left(\frac{1}{x}\right),$$

d'où

$$\int_0^1 \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt = \frac{1}{x} - \frac{e^{-x}}{2x} + \frac{1}{x} O\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right),$$

car $\frac{e^{-x}}{2x} = o\left(\frac{1}{x^2}\right) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ par croissances comparées.

Correction 19 1. On remarque tout d'abord que (u_n) est bien définie car pour tout $x \geq 0$, $x + n^2 \geq 0$ et $u_0 \geq 0$. On écrit ensuite $u_n = \sqrt{u_{n-1}^2 + (n-1)^2} \geq n-1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ par le thm de minoration.

2. On le montre par récurrence sur n , l'initialisation étant claire. On suppose $u_n \leq n$, alors $u_{n+1} = \sqrt{u_n + n^2} \leq \sqrt{n + n^2} \leq \sqrt{n^2 + 2n + 1} = n + 1$. La propriété est donc héréditaire, par le principe de récurrence, elle est vraie pour tout n .

3. On a déjà $n-1 \leq u_n \leq n$ donc $u_n \sim n$. On écrit $u_n = n + o(n)$, on a donc

$$\begin{aligned} u_n &= \sqrt{u_{n-1} + (n-1)^2} \\ &= \sqrt{n-1 + (n-1)^2 + o(n)} \\ &= n \sqrt{n^2 - n + o(n)} \\ &= n \sqrt{1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)} \\ &= n \left(1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right). \end{aligned}$$

On a donc $u_n = n - \frac{1}{2} + o(1)$. On recommence avec ce nouveau développement :

$$\begin{aligned} u_n &= \sqrt{u_{n-1} + (n-1)^2} \\ &= \sqrt{(n-1) - \frac{1}{2} + o(1) + (n-1)^2} \\ &= \sqrt{n^2 - n - \frac{1}{2} + o(1)} \\ &= n \sqrt{1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)} \\ &= n \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2}\right) - \frac{1}{8} \left(\frac{1}{n^2}\right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= n - \frac{1}{2n} - \frac{3}{4n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

Correction 20 On remarque tout d'abord que, pour tout $\epsilon > 0$, la fonction $f_\epsilon : x \mapsto e^{-\epsilon x} - x$ est décroissante en tant que somme de fonctions décroissantes. Par ailleurs, $f_\epsilon(0) = 1$ et $f_\epsilon(1) < 0$. On en déduit, par le TVI qu'il existe $x_\epsilon \in]0, 1[$ tel que $f_\epsilon(x_\epsilon) = 0$. Ce réel est unique par injectivité de la fonction.

On a $0 < \epsilon x_\epsilon < \epsilon$ donc $\epsilon x_\epsilon \rightarrow 0$. On peut donc faire un DL1 de l'exponentielle:

$$e^{-\epsilon x_\epsilon} = 1 - \epsilon x_\epsilon + o(\epsilon x_\epsilon).$$

On sait que $x_\epsilon = e^{-\epsilon x_\epsilon}$ donc $x_{\epsilon-} > 1$ par continuité de l'exponentielle. On peut donc écrire $x_\epsilon = 1 + o(1)$. En remplaçant x_ϵ par son DL0, on obtient

$$e^{-\epsilon x_\epsilon} = 1 - \epsilon + o(\epsilon).$$

On fait maintenant un DL2 de l'exponentielle:

$$e^{-\epsilon x_\epsilon} = 1 - \epsilon x_\epsilon + \frac{1}{2}(\epsilon x_\epsilon)^2 + o(\epsilon x_\epsilon)^2.$$

puis on remplace x_ϵ par son DL1:

$$e^{-\epsilon x_\epsilon} = 1 - \epsilon(1 - \epsilon + o(\epsilon)) + \frac{1}{2}\epsilon^2(1 + o(1)) + o(\epsilon^2) = 1 - \epsilon + \frac{3}{2}\epsilon^2 + o(\epsilon^2).$$

Comme $x_\epsilon = e^{-\epsilon x_\epsilon}$, on a bien le DL2 souhaité.

Correction 21 La fonction f est dérivable et sa dérivée f' est positive, f est donc strictement croissante. Par le théorème de croissances comparées, on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x (1 - e^{-2x} - xe^{-x}) = +\infty.$$

Comme f est impaire, on en déduit que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$. La fonction f étant continue, son image est un intervalle de $\mathbb{R}$ et nous venons de montrer que son image n'est ni majorée, ni minorée, on a donc $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$ et f est bien bijective.

On sait que $f(0) = 0$ donc $f^{-1}(0) = 0$. Comme f est continue, f^{-1} aussi donc $f^{-1}(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0$. On a $f(x) \sim_0 x$ donc $f^{-1}(y) \sim_0 y$. On veut maintenant un équivalent de $f^{-1}(y) - y$. Pour cela, on calcule un équivalent de $f(x) - x$. On a :

$$f(x) - x = 2\text{sh}(x) - 2x = \frac{x^3}{3} + o(x^3),$$

donc :

$$f(x) - x \sim_0 \frac{x^3}{3},$$

ce qui implique, en posant $x = f^{-1}(y)$,

$$y - f^{-1}(y) \sim_0 \frac{(f^{-1}(y))^3}{3}.$$

Comme $f^{-1}(y) \sim_0 y$, on obtient :

$$f^{-1}(y) - y \sim_0 -\frac{y^3}{3},$$

d'où :

$$f^{-1}(y) = y - \frac{y^3}{3} + o(y^3).$$

On remarque, enfin, que f^{-1} est impaire puisque f l'est et qu'elle est 4 fois dérivable puisque $f' \neq 0$. On en déduit qu'elle admet un DL4 avec uniquement des termes impairs. Le DL obtenu est en réalité un DL4.

On peut aussi dire que $f^{-1}(x) \sim_0 x$ et $f'(x) = 1 + x^2 + o(x^2)$ donc

$$f' \circ f^{-1}(x) = 1 + f^{-1}(x)^2 + o(f^{-1}(x)^2) = 1 + x^2 + o(x^2).$$

On en déduit que

$$\frac{1}{f' \circ f^{-1}(x)} = \frac{1}{1 + x^2 + o(x^2)} = 1 - x^2 + o(x^2).$$

On intègre ce DL : $f^{-1}(x) = f^{-1}(0) + x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$. On retrouve bien le même DL.

Enfin, on peut utiliser l'unicité du DL en disant que f^{-1} est 4 fois dérivable puisque $f' \neq 0$ donc elle admet un DL4. Comme elle est impaire, elle admet un DL de la forme $ax + bx^3 + o(x^4)$.

On écrit $f(x) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$ puis

$$\begin{aligned} f \circ f^{-1}(x) &= f^{-1}(x) + \frac{1}{3}f^{-1}(x)^3 + o(f^{-1}(x)^4) \\ &= (ax + bx^3 + o(x^4)) + \frac{1}{3} + (ax + bx^3 + o(x^4))^3 + o(x^4) . \\ &= ax + bx^3 + \frac{a^3 x^3}{3} + o(x^4) \end{aligned}$$

Or $f \circ f^{-1}(x) = x$, on a donc

$$x = ax + \left(b + \frac{a^3}{3}\right)x^3 + o(x^4),$$

donc, par unicité du DL (de $f \circ f^{-1}$), on a

$$\begin{cases} a = 1 \\ b + \frac{a^3}{3} = 0 \end{cases}$$

d'où $a = 1$ et $b = -\frac{1}{3}$. On retrouve bien le DL $f^{-1}(x) = x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)$.

Correction 22 1. On fait un DL à l'ordre 2 de f en 0. On a $\sqrt{1+2x^2} = 1 + x^2 + o(x^2)$ donc :

$$\begin{aligned} f(x) &= -x \frac{\sqrt{1+2x^2}}{1-x} \\ &= -x(1+x^2+o(x^2))(1+x+x^2+o(x^2)) \\ &= -x(1+x^2+x+x^2+o(x^2)) \\ &= -x(1+x+2x^2+o(x^2)) \\ &= -x-x^2+o(x^2) \end{aligned}$$

On en déduit que l'équation de la tangente en 0 de f est $y = -x$. On a $f(x) + x \underset{0}{\sim} -x^2$ donc, au voisinage de 0, $x \mapsto f(x) + x$ est du même signe que $x \mapsto -x^2$. Localement, la courbe est donc en dessous de sa tangente en 0.

2. On écrit $f(x) = \frac{\sqrt{1+2x^2}}{1-\frac{1}{x}} = \frac{x\sqrt{2}\sqrt{1+\frac{1}{2x^2}}}{1-\frac{1}{x}}$. On a :

$$\sqrt{1+\frac{1}{2x^2}} = 1 + \frac{1}{4x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \text{ et } \frac{1}{1-\frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

d'où :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{2}x \left(1 + \frac{1}{4x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\ &= \sqrt{2}x \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{4x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\ &= \sqrt{2}x \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{5}{4x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\ &= \sqrt{2}x + \sqrt{2} + \frac{5\sqrt{2}}{4x} + o\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

On en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (\sqrt{2}x + \sqrt{2}) = 0$ donc la droite d'équation $y = \sqrt{2}x + \sqrt{2}$ est une asymptote. De plus, $f(x) - (\sqrt{2}x + \sqrt{2}) \underset{+\infty}{\sim} \frac{5\sqrt{2}}{4x}$ donc

$f(x) - (\sqrt{2}x + \sqrt{2})$ est du même signe que $\frac{5\sqrt{2}}{4x}$ au voisinage de $+\infty$. On en déduit que la courbe est au-dessus de son asymptote en $+\infty$.

Correction 23 On écrit :

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{x^3+1}e^{-1/x} &= x \sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}}e^{-\frac{1}{x}} \\ &= x \left(1 + \frac{1}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right) \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\ &= x \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\ &= x - 1 + \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

On en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x-1) = 0$ donc le graphe de f admet la droite $y = x - 1$ pour asymptote au voisinage de $+\infty$. De plus, on a $f(x) - (x-1) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2x}$ donc $f(x) - (x-1)$ est positif au voisinage de $+\infty$. Le graphe de f est donc au-dessus de l'asymptote.

Correction 24 La fonction th est de classe $\mathcal{C}^\infty$ donc elle admet un développement limité en 0 à tout ordre. On sait que $\text{th}(x) \underset{0}{\sim} x$ donc $\text{th}(x) = x + o(x)$. On en déduit que $1 - \text{th}^2(x) = 1 - x^2 + o(x^2)$. On a le développement limité de $\text{th}'(x)$ puisque $\text{th}'(x) = 1 - \text{th}^2(x)$, on peut en déduire que

$$\text{th}(x) = \text{th}(0) + x - \frac{x^3}{3} + o(x^3) = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

En partant d'un DL à l'ordre 1, on a obtenu un DL à l'ordre 3. On recommence : $(\text{th}^2)'(x) = x^2 - \frac{2x^4}{3} + o(x^4)$ donc $1 - \text{th}^2(x) = 1 - x^2 + \frac{2x^4}{3} + o(x^4)$ puis, en intégrant :

$$\text{th}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5).$$

Comme th est impair, les termes d'ordre pair de son DL sont nuls donc on a :

$$\text{th}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^6).$$

Correction 25 On a $\arctan(x) = x + o(x)$ et, comme arctan est impaire, on a $\arctan(x) = x + o(x^2)$. On en déduit que $\arctan(x^3) = x^3 + o(x^6)$;

Correction 26 On a $\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} + o(x^3)$ d'où :

$$\begin{aligned}\sqrt{2-\sqrt{1-x}} &= \sqrt{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3)} \\ &= 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3) \right) - \frac{1}{8} \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3) \right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{16} \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3) \right)^3 \\ &= 1 + \frac{x}{4} + \frac{x^2}{16} + \frac{x^3}{32} - \frac{1}{8} \left(\frac{x^2}{4} + 2 \frac{x x^2}{8} \right) \\ &\quad + \frac{1}{16} \left(\frac{x}{2} \right)^3 + o(x^3) \\ &= 1 + \frac{x}{4} + \frac{x^2}{32} + \frac{3x^3}{128} + o(x^3)\end{aligned}$$

Correction 27 On écrit $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ puis :

$$\cos \ln(1+x) = 1 - \frac{1}{2} \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right)^2 + o(x^3),$$

car $o(\ln(1+x)^3) = o(x^3)$. On a donc :

$$\cos(\ln(1+x)) = 1 - \frac{1}{2} \left(x^2 - 2x \cdot \frac{x^2}{2} + o(x^3) \right) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + o(x^3).$$

On utilise maintenant le DL de $\frac{1}{1-X}$ avec $X = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + o(x^3)$, on obtient :

$$\frac{1}{\cos \ln(1+x)} = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + o(x^3)$$

Correction 28 On pose $x = \frac{1}{2} + h$, on a $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} h = 0$. De plus, $x(1-x) = \frac{1}{4} - h^2$ donc :

$$\cos(\pi x(1-x)) = \cos\left(\pi\left(\frac{1}{4} - h^2\right)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \pi h^2\right).$$

On développe le cosinus, on obtient :

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cos(\pi h^2) - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(\pi h^2).$$

On fait ensuite un DL de $\cos$ et $\sin$. On a :

$$\cos(\pi h^2) = 1 - \frac{1}{2} (\pi h^2)^2 = 1 + o(h^3),$$

et

$$\sin(\pi h^2) = (\pi h^2) + o(h^3),$$

d'où :

$$\cos \pi \left(\frac{1}{4} - h^2 \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}\pi h^2}{2} + o(h^3).$$

En revenant à la variable x , on obtient :

$$\cos(\pi x(1-x)) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}\pi}{2} \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + o\left(x - \frac{1}{2} \right)^3.$$

Correction 29 On écrit :

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{\operatorname{sh}^2(x)} &= \frac{x^2}{\left(x + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right)^2} = \frac{x^2}{x^2 + \frac{x^4}{3} + o(x^4)} = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{3} + o(x^2)} \\ &= 1 - \frac{x^2}{3} + o(x^2).\end{aligned}$$

Un DL3 en 0 de f est $1 - \frac{x^2}{3} + o(x^2)$.

Correction 30 On écrit :

$$\begin{aligned}\cos(x)^x &= \exp(x \ln \cos(x)) \\ &= \exp\left(x \ln\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)\right) \\ &= \exp\left(x\left(-\frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)\right) \\ &= \exp\left(-\frac{x^3}{2} + o(x^4)\right) \\ &= 1 - \frac{x^3}{2} + o(x^4).\end{aligned}$$

Un DL4 en 0 de f est $1 - \frac{x^3}{2} + o(x^4)$.

Correction 31 On écrit :

$$\begin{aligned}
& \sqrt{1 + \sqrt{1 + 4 \sin x}} \\
= & \sqrt{1 + \sqrt{1 + 4\left(x - \frac{x^3}{6}\right) + o(x^3)}} \\
= & \sqrt{1 + \sqrt{1 + 4x - \frac{2x^3}{3} + o(x^3)}} \\
= & \sqrt{2 + \frac{1}{2}\left(4x - \frac{2x^3}{3}\right) - \frac{1}{8}\left(4x - \frac{2x^3}{3}\right)^2 + \frac{1}{16}\left(4x - \frac{2x^3}{3}\right)^3 + o(x^3)} \\
= & \sqrt{2 + 2x - \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x^3 + o(x^3)} \\
= & \sqrt{2 + 2x - 2x^2 + \frac{11x^3}{3} + o(x^3)} \\
= & \sqrt{2}\sqrt{1 + x - x^2 + \frac{11x^3}{6} + o(x^3)} \\
= & \sqrt{2}\left(1 + \frac{1}{2}\left(x - x^2 + \frac{11x^3}{6}\right) - \frac{1}{8}\left(x - x^2 + \frac{11x^3}{6}\right)^2 + \frac{1}{16}\left(x - x^2 + \frac{11x^3}{6}\right)^3 + o(x^3)\right) \\
= & \sqrt{2}\left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{11x^3}{12} - \frac{1}{8}(x^2 - 2x^3) + \frac{x^3}{16} + o(x^3)\right) \\
= & \sqrt{2}\left(1 + \frac{x}{2} - \frac{7x^2}{8} + \frac{19x^3}{48} + o(x^3)\right)
\end{aligned}$$

Correction 32 La dérivée de $\ln(\cos x)$ vaut $-\tan x$ dont le DL à l'ordre 6 est :

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^6).$$

On intègre et on obtient : $\ln(\cos x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{45}x^6 + o(x^6)$.

On peut aussi poser $X = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + o(x^6)$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\ln(\cos x) &= \ln\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + o(x^6)\right) \\
&= \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + o(x^6)\right) \\
&\quad - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + o(x^6)\right)^2 \\
&\quad + \frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + o(x^6)\right)^3 \\
&= \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + o(x^6) - \frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{4!}\right) - \frac{x^6}{24} \\
&= -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{45}x^6 + o(x^6)
\end{aligned}$$

Correction 33 On a $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)$ et $\tan x \rightarrow 0$ donc :

$$\begin{aligned}
\sin(\tan x) &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5) \\
&\quad - \frac{1}{3!}\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)\right)^3 \\
&\quad + \frac{1}{5!}\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)\right)^5 \\
&= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \frac{1}{6}\left(x^3 + 3x^2 \cdot \frac{x^3}{3}\right) + \frac{1}{5!}x^5 + o(x^5) \\
&= x + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{40}x^5 + o(x^5)
\end{aligned}$$

Correction 34 On a

$$\begin{aligned}
(\ln(1+x))^2 &= \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)^2 \\
&= x^2 + \frac{x^4}{4} - 2x \cdot \frac{x^2}{2} + 2x \frac{x^3}{3} + o(x^4) \\
&= x^2 - x^3 + \frac{11}{12}x^4 + o(x^4)
\end{aligned}$$

Correction 35 On a

$$\begin{aligned}
\exp(\sin x) &= 1 + \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right)^3 \\
&= x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \\
&= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)
\end{aligned}$$

Correction 36 On sait que $\sin(x) \underset{0}{\sim} x$ donc $\sin^6(x) \underset{0}{\sim} x^6$ d'où $\sin^6 x = x^6 + o(x^6)$.

Correction 37 On a $\frac{\cos x - 1}{2} \rightarrow 0$ donc

$$\begin{aligned} \ln(1 + \cos x) &= \ln(2 + (\cos x - 1)) \\ &= \ln 2 + \ln\left(1 + \frac{\cos x - 1}{2}\right) \\ &= \ln 2 + \ln\left(1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{2.4!} + o(x^4)\right) \\ &= \ln 2 + \left(-\frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{2.4!}\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{2.4!}\right)^2 + o(x^4) \\ &= \ln 2 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{2.4!} - \frac{x^4}{32} + o(x^4) \\ &= \ln 2 - \frac{x^2}{4} - \frac{1}{96}x^4 + o(x^4). \end{aligned}$$

Correction 38 On a $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$ et :

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 + \sin x} &= \frac{1}{1 + x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)} \\ &= 1 - \left(x - \frac{x^3}{6}\right) + \left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2 - \left(x - \frac{x^3}{6}\right)^3 + o(x^3) \\ &= 1 - x + \frac{x^3}{6} + x^2 - x^3 + o(x^3) \\ &= 1 - x + x^2 - \frac{5}{6}x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} \frac{\cos x}{1 + \sin x} &= \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) \left(1 - x + x^2 - \frac{5}{6}x^3 + o(x^3)\right) \\ &= 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3) \end{aligned}$$

Correction 39 On a $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3)$ et

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 + \operatorname{ch} x} &= \frac{1}{2 + \frac{x^2}{2} + o(x^3)} = \frac{1}{2} \frac{1}{1 + \frac{x^2}{4} + o(x^3)} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x^2}{4} + o(x^3)\right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^3). \end{aligned}$$

On a donc :

$$\frac{\sqrt{1+x}}{1 + \operatorname{ch} x} = \left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3)\right) \left(\frac{1}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^3)\right) = \frac{1}{2} + \frac{x}{4} - \frac{3x^2}{16} - \frac{x^3}{32} + o(x^3).$$

Correction 40 On écrit $e^{3+x^2} = e^3 e^{x^2}$. On a $x^2 \rightarrow 0$ donc :

$$e^{3+x^2} = e^3 \left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^5)\right) = e^3 + e^3 x^2 + \frac{e^3 x^4}{2} + o(x^5).$$

Correction 41 On pose $\operatorname{ch}(x) = e^x + e^{-x}$. On calcule son taux d'accroissement en 0 :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\operatorname{ch}(x) - 1}{x^2},$$

et comme $\operatorname{ch}(x) - 1 \sim \frac{x^2}{2}$, on en déduit que le taux d'accroissement admet une limite finie en 0, égale à $\frac{1}{2}$ donc f est bien dérivable.

Correction 42 On calcule son taux d'accroissement en 0 :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\operatorname{ch}(x) - 1}{x^2},$$

et comme $\operatorname{ch}(x) - 1 \sim \frac{x^2}{2}$, on en déduit que le taux d'accroissement admet une limite finie en 0, égale à $\frac{1}{2}$ donc f est bien dérivable.

Correction 43 La fonction f est la composée de $\cos$, dérivable sur $\mathbb{R}$ et de la fonction racine carrée, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Étudions sa dérivabilité en 0. On a

$$\frac{\cos \sqrt{x} - 1}{x} \sim -\frac{(\sqrt{x})^2}{x} = -\frac{1}{2},$$

donc le taux d'accroissement en 0 admet une limite finie ce qui montre que f est dérivable en 0 de dérivée $-\frac{1}{2}$.

Correction 44 On a $\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} = 1 + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{8n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)$ et $e^{\frac{1}{2n^2}} = 1 + \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{8n^2} + o\left(\frac{1}{8n^2}\right)$ donc :

$$\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} - e^{\frac{1}{2n^2}} = -\frac{1}{4n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right).$$

On a également $\ln\left(1 + \frac{1}{n^2\sqrt{n}}\right) \sim \frac{1}{n^2\sqrt{n}}$ donc :

$$\frac{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} - e^{\frac{1}{2n^2}}}{\ln\left(1 + \frac{1}{n^2\sqrt{n}}\right)} \underset{0}{\sim} -\frac{1}{4n\sqrt{n}}.$$

Correction 45 On écrit :

$$\begin{aligned}\sin(x) - \tan(x) &= x - \frac{x^3}{6} - \left(x + \frac{x^3}{3}\right) + o(x^3) = -\frac{x^3}{2} + o(x^3), \\ \sqrt{1+2x} - 1 &= x - \frac{(2x)^2}{8} + \frac{(2x)^3}{16} + o(x^3) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + o(x^3),\end{aligned}$$

et

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

On a donc :

$$\sqrt{1+2x} - 1 - \ln(1+x) = \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

On en déduit que $\sin(x) - \tan(x) \underset{0}{\sim} -\frac{x^3}{2}$ et $\sqrt{1+2x} - 1 - \ln(1+x) \underset{0}{\sim} \frac{x^3}{6}$ d'où :

$$\frac{\sin(x) - \tan(x)}{\sqrt{1+2x} - \ln(1+x) - 1} \underset{0}{\sim} -3,$$

et, par suite, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - \tan(x)}{\sqrt{1+2x} - \ln(1+x) - 1} = -3$.

Correction 46 On écrit :

$$f(x) = \frac{\tan^2(x) - \ln(1+x^2)}{\tan^2(x) \ln(1+x^2)}.$$

Le dénominateur est équivalent à x^4 , il faut donc faire un DL d'ordre 4 du numérateur pour lever l'indétermination.

On écrit :

$$\begin{aligned}\tan^2(x) - \ln(1+x^2) &= \left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)\right)^2 - \left(x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)\right) \\ &= x^2 + \frac{2x^4}{3} - x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4) \\ &= \frac{7x^4}{6} + o(x^4).\end{aligned}$$

On en déduit que $\tan^2(x) - \ln(1+x^2) \underset{0}{\sim} \frac{7x^4}{6}$ donc $f(x) \underset{0}{\sim} \frac{7}{6}$ d'où $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{7}{6}$.

Correction 47 On écrit $(\cos(x))^{\frac{1}{x}} = \exp\left(\frac{1}{x} \ln(\cos(x))\right)$. On sait que $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$ donc $\ln(\cos(x)) = \ln\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) = -\frac{x^2}{2} + o(x^3)$ puis

$\frac{1}{x} \ln(\cos(x)) = -\frac{x}{2} + o(x^2)$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\exp\left(\frac{1}{x} \ln(\cos(x))\right) &= \exp\left(-\frac{x}{2} + o(x^2)\right) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{2}\right)^2 + o(x^2) \\ &= 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + o(x^2).\end{aligned}$$

$$(\cos(x))^{\frac{1}{x}} - \sqrt{1-x} = \frac{x^2}{4} + o(x^2).$$

Pour le dénominateur, on écrit :

$$\begin{aligned}(1 + \sin(x))^{\frac{1}{x}} &= \exp\left(\frac{1}{x} \ln(1 + \sin(x))\right) \\ &= \exp\left(\frac{1}{x} \ln\left(1 + x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)\right) \\ &= \exp\left(\frac{1}{x} \left(x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)\right) \\ &= \exp\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right) \\ &= e \left(\exp\left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right)\right) \\ &= e \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{2}\right)^2 + o(x^2)\right)\end{aligned}$$

Comme on a :

$$e^{1-\frac{x}{2}} = e \cdot e^{-\frac{x}{2}} = e \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{2}\right)^2 + o(x^2)\right)$$

On en déduit que :

$$(1 + \sin(x))^{\frac{1}{x}} - e^{1-\frac{x}{2}} = \frac{ex^2}{6} + o(x^2).$$

Ainsi,

$$\frac{(\cos(x))^{1/x} - \sqrt{1-x}}{(1 + \sin(x))^{\frac{1}{x}} - e^{1-\frac{x}{2}}} \underset{0}{\sim} \frac{\frac{x^2}{4}}{\frac{ex^2}{6}},$$

donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos(x))^{1/x} - \sqrt{1-x}}{(1 + \sin(x))^{\frac{1}{x}} - e^{1-\frac{x}{2}}} = \frac{3}{2e}$.

Correction 48 On écrit :

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &= \exp\left(x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right) \\ &= \exp\left(x\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)\right) \\ &= \exp\left(1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{3x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\ &= e \cdot \exp\left(-\frac{1}{2x} + \frac{1}{3x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\ &= e \cdot \left(1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{3x^2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2x}\right)^2 + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \\ &= e - \frac{e}{2x} + \frac{11e}{24x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \end{aligned}$$

puis :

$$\sqrt{1 - \frac{1}{x}} = 1 - \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

d'où :

$$\begin{aligned} &x^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x - ex^2 \sqrt{1 - \frac{1}{x}} \\ &= x^2 \left(e - \frac{e}{2x} + \frac{11e}{24x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\ &\quad - ex^2 \left(1 - \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\ &= \frac{7e}{12} + o(1) \end{aligned}$$

On en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x - ex^2 \sqrt{1 - \frac{1}{x}} = \frac{7e}{12}$.

Correction 49 On a $\cos(x) - 1 \rightarrow 0$ donc $\sin(\cos(x) - 1) \sim \cos(x) - 1$ et $\cos(x) - 1 \sim -\frac{x^2}{2}$ d'où $\sin(\cos(x) - 1) \sim_0 -\frac{x^2}{2}$.

On sait, de plus, que $\sqrt{1 + x^2} - 1 \sim_0 \frac{x^2}{2}$. On en déduit que :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\cos(x) - 1)}{\sqrt{1 + x^2} - 1} = -1.$$

Correction 50 On écrit :

$$\sqrt[3]{x^3 + x^2} - x = x \left(\sqrt[3]{1 + \frac{1}{x}} - 1\right) = x \left(1 + \frac{1}{3x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) - 1\right) = \frac{1}{3} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

On en déduit que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 + x^2} - x = \frac{1}{3}.$$

Correction 51 On a $\sqrt{1 + x^2} - 1 \sim_0 \frac{x^2}{2}$ et $\cos(x) - 1 \sim_0 -\frac{x^2}{2}$. On en déduit que $\frac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{\cos(x) - 1} \sim_0 -1$, donc :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{\cos(x) - 1} = -1.$$

Correction 52 On a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\ln(1 + x^2)} &= \frac{1}{x^2} \left(1 - \frac{x^2}{\ln(1 + x^2)}\right) = \frac{1}{x^2} \left(1 - \frac{x^2}{x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)}\right) \\ &= \frac{1}{x^2} \left(1 - \frac{1}{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)}\right) = \frac{1}{x^2} \left(1 - \left(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)\right) \\ &= \frac{1}{2} + o(1) \end{aligned}$$

On a donc $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\ln(1 + x^2)}\right) = \frac{1}{2}$.

Correction 53 On pose $h = \frac{1}{x}$. On a :

$$x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\sin h}{h} = 1 - \frac{h^2}{6} + o(h^2)$$

donc :

$$\ln\left(\frac{\sin h}{h}\right) = -\frac{1}{6}h^2 + o(h^2)$$

et

$$\frac{1}{h^2} \ln\left(\frac{\sin h}{h}\right) = -\frac{1}{6} + o(1).$$

On en déduit, par composition des limites, que $\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(h)}{h}\right)^{\frac{1}{h^2}} = e^{-\frac{1}{6}}$. Comme

$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(h)}{h}\right)^{\frac{1}{h^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{x^2}$, on a la limite souhaitée.

Correction 54 La fonction arcsin est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -1, 1[$, elle admet donc un DL en 0 à tout ordre. Pour le déterminer, on va intégrer celui de sa dérivée. On sait que $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1 \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2}$, donc $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ et, en intégrant :

$$\arcsin(x) = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

De même, la fonction arctan est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, elle admet donc un DL en 0 à tout ordre. Pour le déterminer, on va intégrer celui de sa dérivée. On sait que $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + o(x^2)$ donc $\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$. On écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\tan(x) - \sin(x)}{\arcsin(x) - \arctan(x)} &= \frac{x + \frac{x^3}{3} - x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x + \frac{x^3}{6} - x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)} \\ &= \frac{\frac{x^3}{2} + o(x^3)}{\frac{x^3}{2} + o(x^3)} \\ &= 1 + o(1). \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x) - \sin(x)}{\arcsin(x) - \arctan(x)} = 1.$$

Correction 55 On écrit $\sin^4(x) \underset{0}{\sim} x^4$, déterminons un équivalent du numérateur. On écrit :

$$\begin{aligned} &\text{ch}(\sin(x)) - \text{ch}(x) \\ &= \text{ch}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) - \text{ch}(x) \\ &= 1 + \frac{1}{2} \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 + \frac{1}{4!} \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^4 - 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} + o(x^4) \\ &= 1 + \frac{1}{2} \left(x^2 - \frac{2x^4}{6} + o(x^4)\right) + \frac{x^4}{4!} - 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} + o(x^4) \\ &= -\frac{x^4}{6} + o(x^4). \end{aligned}$$

On en déduit que $\text{ch}(\sin(x)) - \text{ch}(x) \underset{0}{\sim} -\frac{x^4}{6}$ d'où :

$$\frac{\text{ch}(\sin(x)) - \text{ch}(x)}{\sin^4(x)} \underset{0}{\sim} -\frac{1}{6},$$

ce qui implique $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin(x))^{-4} (\text{ch}(\sin(x)) - \text{ch}(x)) = -\frac{1}{6}$.

Correction 56 On a $\sin(x) - \tan(x) = x - \frac{x^3}{6} - x - \frac{x^3}{3} + o(x^3) = -\frac{x^3}{2} + o(x^3)$. On a également :

$$\begin{aligned} e^{\sin x} &= e^{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)} \\ &= 1 + \left(x - \frac{x^3}{6}\right) + \frac{1}{2} \left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2 + \frac{1}{6} \left(x - \frac{x^3}{6}\right)^3 + o(x^3) \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^3) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} e^{\tan x} &= e^{x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)} \\ &= 1 + \left(x + \frac{x^3}{3}\right) + \frac{1}{2} \left(x + \frac{x^3}{3}\right)^2 + \frac{1}{6} \left(x + \frac{x^3}{3}\right)^3 \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + o(x^3) \end{aligned}$$

On en déduit que $e^{\sin(x)} - e^{\tan(x)} = -\frac{x^3}{2} + o(x^3)$. Le quotient est équivalent à 1, c'est par conséquent sa limite.

Correction 57 On a :

$$\begin{aligned} e^x - \cos x - x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - 1 + \frac{x^2}{2} - x + o(x^3) \\ &= x^2 + o(x^3). \end{aligned}$$

On en déduit que la limite est 1.

Correction 58 La fonction arcsin est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -1, 1[$, elle admet donc un DL en 0 à tout ordre. Pour le déterminer, on va intégrer celui de sa dérivée. On sait que $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1 \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2}$, donc $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ et, en intégrant :

$$\arcsin(x) = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

Le numérateur est donc équivalent à $-\frac{x^3}{6}$ et le dénominateur est équivalent à x^3 donc la limite vaut $-\frac{1}{6}$.

Correction 59 On pose $x = 1 + h$ avec h qui tend vers 0. On écrit :

$$\begin{aligned} x^x - x &= \exp((1+h)\ln(1+h)) - (1+h) \\ &= \exp\left((1+h)\left(h - \frac{h^2}{2} + o(h^2)\right)\right) - 1 - h \\ &= \exp\left(h - \frac{h^2}{2} + h^2 + o(h^2)\right) - 1 - h \\ &= \exp\left(h + \frac{h^2}{2} + o(h^2)\right) - 1 - h \\ &= 1 + \left(h + \frac{h^2}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(h + \frac{h^2}{2}\right)^2 - 1 - h + o(h^2) \\ &= 1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^2}{2} - 1 - h + o(h^2) \\ &= h^2 + o(h^2) \\ &= (x-1)^2 + o((x-1)^2). \end{aligned}$$

On a donc $x^x - x \underset{1}{\sim} (x-1)^2$.

On écrit ensuite :

$$\begin{aligned} 1 - x + \ln(x) &= -h + \ln(1+h) = -h + h - \frac{h^2}{2} + o(h^2) = -\frac{h^2}{2} + o(h^2) \\ &= -\frac{(x-1)^2}{2} + o((x-1)^2). \end{aligned}$$

On en déduit que $1 - x + \ln(x) \underset{1}{\sim} -\frac{(x-1)^2}{2}$. En faisant le quotient, on obtient $\frac{x^x - x}{1 - x + \ln(x)} \underset{1}{\sim} -2$ donc $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - x}{1 - x + \ln(x)} = -2$.

Correction 60 On a $\tan(x) = \frac{2 \tan(\frac{x}{2})}{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}$ donc :

$$\tan(x) \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \frac{2 \tan\left(\frac{x}{2}\right) \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}.$$

Quand x tend vers 0, le dénominateur tend vers 1 et le numérateur tend vers 0 par le théorème de croissances comparées. En passant à l'exponentielle, on en déduit que :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\tan \frac{x}{2}\right)^{\tan x} = 1.$$

Correction 61 On écrit $f(x) = \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2} = \frac{3}{2} + \frac{11}{24}x^2 + o(x^2)$. Il est alors clair que f est continue en 0 et, comme elle admet un DL à l'ordre 1 en 0, elle est dérivable en 0. On peut, de plus, affirmer que $f'(0) = 0$ car le coefficient devant x est nul.

Correction 62 On a $\cos(x) - 1 = -\frac{x^2}{2} + o(x^3)$ et $\sin^2(x) = x^2 + o(x^3)$. On en déduit que :

$$f(x) = \frac{-\frac{x^2}{2} + o(x^3)}{x^2 + o(x^3)} = \frac{-\frac{1}{2} + o(x)}{1 + o(x)} = -\frac{1}{2} + o(x).$$

On en déduit que f admet une limite finie en 0 égale à $-\frac{1}{2}$, elle est donc prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = -\frac{1}{2}$. De plus, la fonction prolongée est continue et admet un DL1 en 0, on peut donc affirmer qu'elle est dérivable.

Correction 63 On écrit $f(x) = \frac{\ln(1+x) - \sin x}{x} = -\frac{1}{2}x + o(x)$. Il est alors clair que f est continue en 0 et, comme elle admet un DL à l'ordre 1 en 0, elle est dérivable en 0. On peut, de plus, affirmer que $f'(0) = -\frac{1}{2}$ en identifiant le coefficient devant x .

Correction 64 On écrit :

$$\begin{aligned} e^{\cos(x)} &= e^{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)} = e \cdot e^{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)} = e \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) \\ &= e - \frac{ex^2}{2} + o(x^2). \end{aligned}$$

On en déduit que l'équation de la tangente à f en $x = 0$ est la droite d'équation $y = e$. Au voisinage de 0, on a $x \mapsto f(x) - e$ du même signe que son équivalent (qui est $-\frac{ex^2}{2}$) donc la tangente est au-dessus de la courbe.

Correction 65 On écrit :

$$\begin{aligned} \frac{1}{3 + \sin(x)} &= \frac{1}{3} \frac{1}{1 + \frac{\sin(x)}{3}} = \frac{1}{3} \frac{1}{1 + \frac{x}{3} + o(x^2)} = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{x}{3} + \left(\frac{x}{3}\right)^2 + o(x^2)\right) \\ &= \frac{1}{3} - \frac{x}{9} + \frac{x^2}{27} + o(x^2). \end{aligned}$$

On en déduit que l'équation de la tangente à f en $x = 0$ est $y = \frac{1}{3} - \frac{x}{9}$. On a, de plus, $f(x) - \left(\frac{1}{3} - \frac{x}{9}\right) \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{27}$ donc, au voisinage de 0, on a $f(x) \geq \frac{1}{3} - \frac{x}{9}$ et la courbe est au-dessus de la tangente.

Correction 66 On a f dérivable de dérivée positive s'annulant ponctuellement donc f est strictement croissante. Ainsi, f est injective. De plus, $\forall x \in \mathbb{R}, x - 1 \leq f(x) \leq$

$x+1$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$. La fonction f étant continue, son image vaut $\mathbb{R}$ donc elle est surjective. On a montré que f est bijective, déterminons un DL3 de sa réciproque en 0. On a $f(0) = 0$ donc $f^{-1}(0) = 0$.

On a $f(x) = x + x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$ donc $f(x) \underset{0}{\sim} 2x$. On pose $y = f(x)$, on a $y \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0$ ce qui permet d'obtenir $f^{-1}(y) \underset{0}{\sim} \frac{y}{2}$. Cherchons maintenant un équivalent de $f^{-1}(y) - \frac{y}{2}$. Avec le même changement de variable, on a $f^{-1}(y) - \frac{y}{2} = x - \frac{f(x)}{2}$ et on sait que $x - \frac{f(x)}{2} \underset{0}{\sim} \frac{x^3}{12}$ en utilisant le DL de f . On a donc :

$$f^{-1}(y) - \frac{y}{2} \underset{0}{\sim} \frac{(f^{-1}(y))^3}{12},$$

et comme on a montré que $f^{-1}(y) \underset{0}{\sim} \frac{y}{2}$, on a en déduit que $\frac{(f^{-1}(y))^3}{6} \underset{0}{\sim} \frac{y^3}{96}$. Ainsi, on a le DL suivant :

$$f^{-1}(y) = \frac{y}{2} + \frac{y^3}{96} + o(y^3).$$

On peut aussi dire que sur $] -\pi, \pi[$, la dérivée de f ne s'annule pas donc f^{-1} est dérivable 3 fois et admet donc un DL3 de la forme $f^{-1}(x) = ax + bx^3 + o(x^4)$ puisque f est impaire (et donc f^{-1} aussi).

On a $f(x) = 2x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$ donc

$$\begin{aligned} f \circ f^{-1}(x) &= 2f^{-1}(x) - \frac{1}{6}f^{-1}(x)^3 + o(f^{-1}(x)^4) \\ &= 2(ax + bx^3 + o(x^4)) - \frac{1}{6}(ax + bx^3 + o(x^4))^3 + o(x^4) \\ &\quad \text{car } f^{-1}(x) \underset{0}{\sim} \frac{x}{2} \\ &= 2ax + 2bx^3 - \frac{a^3x^3}{x^3} + o(x^4) \end{aligned}$$

Comme $f^{-1} \circ f(x) = x$, on a, par unicité du DL (de $f \circ f^{-1}$),

$$\begin{cases} 2a = 1 \\ 2b - \frac{a^3}{6} = 0 \end{cases}$$

d'où $a = \frac{1}{2}$ et $b = \frac{1}{12 \times 8} = \frac{1}{96}$. On retrouve bien le même DL que ci-dessus.

Enfin, on peut utiliser la dérivée.

On a $f'(x) = 2 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ donc

$$\begin{aligned} f' \circ f^{-1}(x) &= 2 - \frac{f^{-1}(x)^2}{2} + o(f^{-1}(x)^2) \\ &= 2 - \frac{x^2}{8} + o(x^2) \\ &\quad \text{car } f^{-1}(x) \underset{0}{\sim} \frac{x}{2} \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \frac{1}{f' \circ f^{-1}(x)} &= \frac{1}{2 - \frac{x^2}{8} + o(x^2)} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{1 - \frac{x^2}{16} + o(x^2)} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{x^2}{16} + o(x^2) \right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{x^2}{32} + o(x^2) \end{aligned}$$

On intègre:

$$f^{-1}(x) = \frac{x}{2} + \frac{x^3}{96} + o(x^3).$$

Correction 67 On a :

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &= \exp\left(x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right) \\ &= \exp\left(x \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\right) \\ &= \exp\left(1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{3x^2} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) \\ &= e \cdot \exp\left(-\frac{1}{2x} + \frac{1}{3x^2} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) \\ &= e \left(1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{3x^2} + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2x} + \frac{1}{3x^2}\right)^2 + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\ &= e \left(1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{3x^2} + \frac{1}{8x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\ &= e \left(1 - \frac{1}{2x} + \frac{11}{24x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right). \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$e - \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \frac{e}{2x} - \frac{11e}{24x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

On écrit :

$$\frac{1}{x} \ln \left(\frac{e}{2x} - \frac{11e}{24x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) = \frac{1}{x} \ln \left(\frac{e}{2x} \right) + \frac{1}{x} \ln \left(1 - \frac{11}{12x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right).$$

On a $\frac{1}{x} \ln \left(1 - \frac{11}{12x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{11}{12x^2}$ et, par le théorème de croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \ln \left(\frac{e}{2x} \right) = 0$ donc la limite est également nulle. En passant à l'exponentielle, on obtient que la limite recherchée est 1.

Correction 68 1. On a $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ donc f est continue en 0. On forme le taux d'accroissement en 0, on a $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} = x^{1/x}$ ce qui tend, à nouveau, vers 0 en 0 donc f est dérivable en 0 (et $f'(0) = 0$). Sur $\mathbb{R}_+^*$, f est dérivable par les théorèmes usuels.

2. On pose $x = 1 + y$, $y \rightarrow 0$. On a donc :

$$\begin{aligned} \left(x + \frac{1}{x}\right) \ln(x) &= \left(1 + \frac{1}{1+y}\right) \ln(1+y) \\ &= (1 + (1 - y + y^2 - y^3 + o(y^3))) \left(y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + o(y^3)\right) \\ &= 2y - 2y^2 + \frac{13}{6}y^3 + o(y^3). \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} &\exp \left(\left(1 + \frac{1}{1+y}\right) \ln(1+y) \right) \\ &= 1 + 2y - 2y^2 + \frac{13}{6}y^3 + \frac{1}{2}(4y^2 - 8y^3) + \frac{1}{6}8y^3 + o(y^3) \\ &= 1 + 2y - \frac{1}{2}y^3 + o(y^3). \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$f(x) = 1 + 2(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^3 + o((x-1)^3).$$

3. On a $f(x) - (1 + 2(x-1)) \sim -\frac{1}{2}(x-1)^3$ et $x \mapsto -\frac{1}{2}(x-1)^3$ change de signe au voisinage de 1. Le graphe de f admet un point d'inflexion en 1.

Correction 69 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : x \mapsto x^n + x - 1$. La fonction est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et $f_n(0) = -1$, $f_n(1) = 1$. On en déduit, par le TVI, que f_n s'annule entre 0 et 1. Comme elle est strictement croissante, ce point d'annulation est unique.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \in]0, 1[$ donc $x_n^{n+1} < x_n^n$. On a donc $f_{n+1}(x_n) < f_n(x_n)$. Or $f_n(x_n) = 0 = f_{n+1}(x_{n+1})$. On en déduit, comme f_{n+1} est croissante, que $x_n < x_{n+1}$ donc la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien croissante. On a déjà montré à la question précédente qu'elle était majorée par 1.

3. D'après le thm de limite monotone, la suite converge vers un réel $\ell \leq 1$. Si on suppose, par l'absurde, que $\ell \neq 1$, alors $x_n^n = e^{n \ln(x_n)} \rightarrow 0$ d'où $x_n^n + x_n \rightarrow \ell$. Or, $x_n^n + x_n = 1$, on obtient une contradiction. On a donc bien $x_n \rightarrow 1$.

4. On a $x_n^n = 1 - x_n$ donc $n \ln(x_n) = \ln(1 - x_n)$. En posant $y_n = 1 - x_n$, on a $y_n \rightarrow 0$ donc $\ln(1 - y_n) \sim -y_n$. Comme $n \ln(1 - y_n) = \ln(y_n)$ on en déduit $\ln(y_n) \sim -ny_n$. On a donc bien $y_n \sim -\frac{\ln(y_n)}{n}$.

On écrit $ny_n \sim -\ln(y_n)$, on a donc $ny_n = -\ln(y_n) + o(\ln(y_n))$ puis

$$\ln(ny_n) = \ln(-\ln(y_n) + o(\ln(y_n))),$$

ou encore

$$\ln(n) + \ln(y_n) = \ln(-\ln(y_n) + o(\ln(y_n))).$$

On divise par $\ln(y_n)$ l'égalité précédente, on a

$$\frac{\ln(n)}{\ln(y_n)} + 1 = \frac{\ln(-\ln(y_n) + o(\ln(y_n)))}{\ln(y_n)}.$$

Reste à montrer que le membre de droite tend vers 0 ce qui peut se voir en posant $a_n = \ln(-\ln(y_n) + o(\ln(y_n)))$. Alors $\frac{\ln(-\ln(y_n) + o(\ln(y_n)))}{\ln(y_n)} \sim \frac{\ln(a_n)}{-a_n}$ et comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$ puisque $y_n \rightarrow 1$, on a, par croissances comparées, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(a_n)}{a_n} = 0$.

Ainsi, $\frac{\ln(n)}{\ln(y_n)} + 1 \rightarrow 0$ d'où $\ln(n) \sim -\ln(y_n)$.

5. En combinant les deux équivalents de la question précédente, on obtient $y_n \sim \frac{\ln(n)}{n}$ donc

$$y_n = \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right),$$

on en déduit que

$$x_n = 1 - \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right).$$

Correction 70 On écrit

$$\frac{1}{x-1} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{x}} = \frac{1}{x} \left(1 + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

On fait ensuite un DL de exponentielle en 0 :

$$\begin{aligned} e^{\frac{1}{x-1}} &= e^{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)} \\ &= 1 + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right)^2 \\ &= 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{3}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right). \end{aligned}$$

Enfin, on multiplie par $x+1$. On obtient :

$$\begin{aligned} (x+1)e^{\frac{1}{x-1}} &= (x+1) \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{3}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) \\ &= x+1 + 1 + \frac{1}{x} + \frac{3}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= x+2 + \frac{5}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

On en déduit que $f(x) - (x+2) \rightarrow 0$ donc le graphe de f admet pour asymptote la droite d'équation $y = x+2$. De plus, $f(x) - (x+2) \sim_{+\infty} \frac{5}{2x}$ donc $f(x) - (x+2)$ est positif au voisinage de $+\infty$. On en déduit que le graphe de f est au-dessus de l'asymptote.

Correction 71 On écrit $\arctan \sqrt{\frac{x+2}{x+1}} = \arctan \sqrt{\frac{1+\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x}}}$.

On a $\frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ donc :

$$\begin{aligned} \frac{1+\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x}} &= \left(1 + \frac{2}{x}\right) \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\ &= 1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right). \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{1+\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x}}} &= \sqrt{1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)} \\ &= 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) - \frac{1}{8} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right)^2 \\ &= 1 + \frac{1}{2x} - \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{8x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{2x} - \frac{5}{8x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right). \end{aligned}$$

Enfin, on doit calculer un DL à l'ordre 2 de $h \mapsto \arctan(1+h)$ en 0. Pour cela, on fait un DL à l'ordre 1 en 0 de $h \mapsto \frac{1}{1+(1+h)^2}$. On écrit :

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+(1+h)^2} &= \frac{1}{2+2h+h^2} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+h+\frac{h^2}{2}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \left(h + \frac{h^2}{2} \right) + o(h) \right) \\ &= \frac{1}{2} (1 - h + o(h)) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{h}{2} + o(h). \end{aligned}$$

On intègre le développement limité, on obtient :

$$\arctan(1+h) = \arctan(1) + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{4} + o(h^2) = \frac{\pi}{4} + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{4} + o(h^2).$$

On pose $h = \frac{1}{2x} - \frac{5}{8x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$. Ainsi, $o(h^2) = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ d'où :

$$\begin{aligned} \arctan \sqrt{\frac{x+2}{x+1}} &= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2x} - \frac{5}{8x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2x} - \frac{5}{8x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right)^2 \\ &= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4x} - \frac{5}{16x^2} - \frac{1}{16x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \\ &= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4x} - \frac{3}{8x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right). \end{aligned}$$

Le graphe admet la droite $y = \frac{\pi}{4}$ pour asymptote horizontale (ce que l'on savait déjà) et grâce au développement asymptotique, on sait que le graphe est au-dessus

de l'asymptote au voisinage de $+\infty$ car la fonction $x \mapsto f(x) - \frac{\pi}{4}$ est du même signe que $x \mapsto \frac{1}{4x}$ au voisinage de $+\infty$.

Correction 72 1. On écrit

$$\begin{aligned}\tan\left(y + \frac{\pi}{4}\right) &= \frac{\tan y + 1}{1 - \tan y} \\ &= (1 + \tan y)(1 + \tan y + \tan^2 y + o(\tan^2 y)) \\ &= (1 + y + o(y^2))(1 + y + y^2 + o(y^2)) \\ &= 1 + 2y + 2y^2 + o(y^2)\end{aligned}$$

On en déduit que $\tan\left(y + \frac{\pi}{4}\right) - 1 \sim 2y$ quand y tend vers 0.

2. On pose $y + \frac{\pi}{4} = \arctan(X + 1)$. On a bien $y \rightarrow 0$ quand $X \rightarrow 0$. De plus, on a $X + 1 = \tan\left(y + \frac{\pi}{4}\right)$ et $y = \arctan(X + 1) - \frac{\pi}{4}$. D'après ce qui précède, on a $\tan\left(y + \frac{\pi}{4}\right) - 1 \sim 2y$. On en déduit que $(X + 1) - 1 \sim 2\left(\arctan(X + 1) - \frac{\pi}{4}\right)$ soit encore $\arctan(X + 1) - \frac{\pi}{4} \sim \frac{X}{2}$ quand X tend vers 0.

3. On cherche à déterminer l'équation de l'asymptote en $-\infty$. On écrit :

$$\frac{x}{x-1} = \frac{1}{1-\frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

quand $x \rightarrow -\infty$. On pose $X = \frac{x}{x-1} - 1$. On a bien $X \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow -\infty$ et d'après la question précédente, on a donc :

$$\arctan\left(\frac{x}{x-1}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) + o(X-1) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

On a donc $x \arctan\left(\frac{x}{x-1}\right) = \frac{1}{2} + \frac{x\pi}{4} + o(1)$. On en déduit que la droite d'équation $y = \frac{1}{2} + \frac{\pi x}{4}$ est asymptote au graphe de la fonction quand x tend vers $-\infty$.

4. Pour déterminer la position de l'asymptote par rapport au graphe, il faut déterminer le signe de $x \arctan\left(\frac{x}{x-1}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{x\pi}{4}\right)$ au voisinage de $-\infty$. D'après la question 1, on sait que $\tan\left(y + \frac{\pi}{4}\right) - 1 - 2y \sim 2y^2$ donc :

$$X - 2\left(\arctan(X + 1) - \frac{\pi}{4}\right) \sim 2\left(\arctan(X + 1) - \frac{\pi}{4}\right)^2 \sim 2\left(\frac{X}{2}\right)^2 \sim \frac{X^2}{2}.$$

On en déduit que :

$$\arctan(X + 1) - \frac{\pi}{4} - \frac{X}{2} \sim -\frac{X^2}{4}.$$

donc

$$\arctan(X + 1) = \frac{\pi}{4} + \frac{X}{2} - \frac{X^2}{4} + o(X^2).$$

On va y injecter le développement en $o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ de $\frac{x}{x-1}$. On a

$$\frac{x}{x-1} = \frac{1}{1-1/x} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right),$$

donc :

$$\arctan\left(\frac{x}{x-1}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2x} + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right),$$

d'où :

$$x \arctan\left(\frac{x}{x-1}\right) = \frac{x\pi}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

On en déduit que la différence entre la fonction et l'équation de l'asymptote est équivalente, en $-\infty$ à $\frac{1}{4x}$. La fonction $x \mapsto \frac{1}{4x}$ étant négative au voisinage de $-\infty$, on en déduit que le graphe est en-dessous de l'asymptote.