

Réponses du td 18

Réponse 1 $\left(\frac{\pi}{2}\right)^2$

Réponse 2 $e^{-2} \leq f(-1) \leq e^{-1}$.

Réponse 4 $I_n \sim \frac{f(1)}{n}$.

Réponse 7 fonction constante égale à 0 ou 1.

Réponse 8 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + e^{-k/n}} = \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$.

Réponse 9 $\frac{\pi}{4}$.

Réponse 10 $4e^{-1}$.

Réponse 11 $2.g'(x) = \frac{2}{\sqrt{(2x)^4 + (2x)^2 + 1}} - \frac{1}{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}}$.

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^4 + t^2 + 1}} dt = 0$.

Réponse 12 1. impaire

2. négative puis positive

3. $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2\varphi(2x) - \varphi(x) = \frac{\text{sh}(2x) - \text{sh}(x)}{x}$.

4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Réponse 13 $3.x \mapsto \lambda \cos(x) + \mu \sin(x) + \int_0^x \sin(x-t)g(t) dt, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Réponse 14 $3.10^{-3} - \frac{9}{2}10^{-6} = 0.0029955$

Réponse 17 1. $f_0(x) = \int_0^x e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^x = 1 - e^{-x}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_0(x) = 1$

2. $f_n(x) = \left[e^{-t} \frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^x + \int_0^x \frac{t^{n+1}}{n+1} dt = \frac{x^{n+1}e^{-x}}{n+1} + \frac{1}{n+1}f_{n+1}(x)$.

4. $l_n = \frac{1}{n+1}l_{n+1}$ puis $l_n = n!$

Réponse 18 $\frac{1}{6} \leq I \leq \frac{1}{3}$

Réponse 19 $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$.

Réponse 22 1. $I_n = \frac{e}{n+1} - \frac{1}{n+1}I_{n+1}$.

2. $0 < I_n < \frac{e}{n+1}$.

3. $I_n \sim \frac{e}{n}$.

4. $D_n = n! |u_0 - I_0|$

Réponse 23 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^{\alpha+1}} \int_0^x t^\alpha f(t) dt = \frac{f(0)}{\alpha+1}$.

Réponse 24 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^3 + k^2n} = 1 - \frac{\pi}{4}$

Réponse 25 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2kn}} = \sqrt{3} - 1$.

Réponse 26 $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2e^{\frac{\pi}{2}-2}$.

Réponse 27 1. $x < 1 \Leftrightarrow f(x) \leq \ln(x)$

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

Réponse 28 1. $F \geq 0$.

3. $F(x) = \ln x \arctan x - \int_1^x g(t) dt$.

Réponse 29 1. $G'(x) = 2f(2x) - f(x)$.

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} G(x) = -\infty$.

Réponse 30 3. $\int_1^n f(t) dt = \frac{1}{2}n^2 \ln(n) + \frac{1}{4} - \frac{n^2}{4}$.

4. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{e}$.