Devoir maison 9.

à rendre pour le 2 avril pour les trinômes pairs.

On considère l'ensemble E de toutes les suites réelles, muni de sa structure d'espace vectoriel usuelle. Il est interdit dans tout l'exercice d'avoir recours à la moindre connaissance sur les suites récurrentes linéaires d'ordre 2 .

1. Soit $p \in]0,1[$ un nombre réel fixé. On note F l'ensemble des suites (u_n) de E vérifiant la relation de récurrence $pu_{n+2} - u_{n+1} + (1-p)u_n = 0$ pour tout entier naturel n.
   (a) Montrer qu'une suite de F est définie par la donnée de ses deux premiers termes u_0 et u_1.
   (b) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
   (c) Soit $v = (v_n)$ l'unique suite de F vérifient $v_0 = 1$ et $v_1 = 0$, et $w = (w_n)$ l'unique suite de F vérifiant $w_0 = 0$ et $w_1 = 1$. Vérifier que (v, w) est une famille libre de F, puis qu'elle est génératrice de F.
   (d) En déduire une base de l'espace vectoriel F.
2. (a) Vérifier que, si $p = \frac{1}{2}$, les suites de F sont des suites arithmétiques.
   (b) On suppose $p \neq \frac{1}{2}$. Montrer que la suite géométrique $(k^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans F si et seulement si $pk^2 - k + 1 - p = 0$. En déduire l'existence d'une base de F formée de suites géométriques, et en déduire une expression générale de toutes les suites de F.
   (c) Soit i un entier fixé supérieur ou égal à 1 . On cherche à déterminer une suite $u = (u_n)$ de F vérifiant $u_0 = 1$ et $u_i = 0$. Dans le cas où $p = \frac{1}{2}$, exprimer le terme général de la suite u en fonction de n et de i.
   (d) Dans le cas où $p \neq \frac{1}{2}$, exprimer de même le terme général de u en fonction de n, de i et de $x = \dfrac{1-p}{p}$.
3. On considère désormais l'ensemble G des suites de E vérifiant la relation de récurrence $4u_{n+3} - 4u_{n+2} - u_{n+1} + u_n = 0$.
   (a) Démontrer que G est un sous-espace vectoriel de E et qu'il admet une famille génératrice de cardinal 3 (on pourra s'inspirer de la première question de l'exercice).
   (b) Déterminer les suites géométriques appartenant à G, et en déduire une base de G constituée de telles suites.
   (c) En déduire la forme générale des suites appartenant à G.
   (d) Déterminer l'unique suite (u_n) de G vérifiant $u_0 = 1, u_1 = \frac{5}{2}$ et $u_2 = \frac{7}{4}$.