Lycée du Parc
PCSI 842 Année 2024-2025
DM 10

Devoir maison 10.

à rendre pour le 9 avril pour les trinômes impairs

Notons E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^∞ et $D : f \mapsto f'$.

1. Montrer que D est un endomorphisme de E.
2. Déterminer le noyau et l'image de D.

Soient $f_1 : t \in \mathbb{R} \mapsto e^t$, $f_2 : t \in \mathbb{R} \mapsto e^{-t/2} \sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right)$ et $f_3 : t \in \mathbb{R} \mapsto e^{-t/2} \cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right)$.

Nous noterons $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3)$ et G le sous-espace vectoriel de E engendré par $\mathcal{B}$.

3. Soient a, b et c des réels tels que $af_1 + bf_2 + cf_3$ soit la fonction nulle.
   (a) Montrer que la famille $\mathcal{B}$ est libre en prenant des valeurs particulières ou bien en passant à la limite.
   (b) Calculer le développement limité à l'ordre 2 de la fonction $af_1 + bf_2 + cf_3$ au voisinage de 0 et montrer, d'une autre manière, que la famille $\mathcal{B}$ est libre.

   La famille $\mathcal{B}$ est donc une base de G.
4. Montrer que $\forall i \in \{1, 2, 3\}$, $D(f_i) \in G$. En déduire que G est stable par D, c'est-à-dire que $\forall g \in G, D(g) \in G$.

   Nous noterons $\widehat{D}$ l'endomorphisme de G induit par D.
5. Calculer $\widehat{D}^3(f_i)$ pour i variant de 1 à 3.
6. En déduire que $\widehat{D}^3 = id_G$.
7. Montrer que $\widehat{D}$ est un automorphisme de G et exprimer $(\widehat{D})^{-1}$ en fonction de $\widehat{D}$.

Partie II

Nous nous intéressons dans cette partie à l'équation différentielle $y''' = y$, que nous noterons $(\mathcal{E})$. Une solution sur $\mathbb{R}$ de $(\mathcal{E})$ est une fonction dérivable trois fois sur $\mathbb{R}$, vérifiant $f'''(t) = f(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que toute solution f de $(\mathcal{E})$ est C^∞.
2. Montrer que la fonction nulle est la seule solution polynomiale de $(\mathcal{E})$.

Notons $T = D^3 - Id$, où Id est l'identité de E, et $D^3 = D \circ D \circ D$.

3. Montrer que le noyau de T est égal à l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$
4. Montrer que $G \subset \operatorname{Ker}(T)$.

Soit f une solution de $(\mathcal{E})$; nous noterons $g = f'' + f' + f$.

5. Montrer que g est solution de l'équation différentielle $y' = y$.
6. Décrivez rapidement l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' - y = 0$.
7. Résolvez l'équation différentielle $y'' + y' + y = 0$; vous donnerez une base de l'ensemble des solutions.
8. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Décrivez l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' + y' + y = \lambda e^t$.
9. En déduire que $\mathrm{Ker}(T) \subset G$.
10. Conclure