Exercice 1.

(sujet 2)

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$ et $I =]a, b[$. Les parties 1 et 2 sont indépendantes.

Partie 1

Soit $f \in C^1(I)$ strictement croissante et convexe.

1. (a) Montrer que pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$.
 (b) Montrer que f s'annule au plus une fois sur I .
2. On suppose qu'il existe $\alpha \in I$ tel que $f(\alpha) = 0$
 - (a) Montrer que $\forall x \in]\alpha, b[, x - \frac{f(x)}{f'(x)} \in]\alpha, b[$.
 - (b) Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $x_0 \in I$ tel que $f(x_0) > 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Justifier que la suite est bien définie.

- (c) Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
- (d) Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers α .

Partie 2

Soit $f \in \mathcal{C}^2(I)$ et $\alpha \in I$ tel que $f(\alpha) = 0$, $f'(\alpha) \neq 0$.

1. Montrer qu'il existe $\eta_1 > 0$ tel que $]\alpha - \eta_1, \alpha + \eta_1[\subset I$ et

$$\forall x \in]\alpha - \eta_1, \alpha + \eta_1[, f'(x) \neq 0.$$

2. On considère la fonction F suivante :

$$F: \begin{cases}]\alpha - \eta_1, \alpha + \eta_1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x - \frac{f(x)}{f'(x)} \end{cases}$$

Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$.

3. On rappelle que toute fonction g de classe $C^2(I)$ possède un DL_2 en tout point a de I de la forme

$$g(x) = g(a) + (x - a)g'(a) + \frac{(x - a)^2}{2}g^{(2)}(a) + o((x - a)^2).$$

- (a) Calculer $F(\alpha)$ et $F'(\alpha)$.
- (b) Écrire le DL_2 de f en α et le DL_1 de f' en α .
- (c) En déduire que F admet un DL_2 en α que l'on précisera.
4. En déduire qu'il existe $\eta_2 \in]0, \eta_1[$ et $c > 1$ tel que

$$\forall x \in]\alpha - \eta_2, \alpha + \eta_2[, |F(x) - \alpha| \leq c(x - \alpha)^2.$$

5. En déduire qu'il existe $\eta \in]0, \eta_1[$ tel que
 - $]\alpha - \eta, \alpha + \eta[\subset I$,
 - $\forall x \in]\alpha - \eta, \alpha + \eta[, F(x) \in]\alpha - \eta, \alpha + \eta[$,

— $\forall x \in]\alpha - \eta, \alpha + \eta[, |F(x) - \alpha| \leq c(x - \alpha)^2$.

Dans toute la suite du problème, on considèrera η et c vérifiant ces conditions.

6. Soit (x_n) la suite définie par $x_0 \in]\alpha - \eta, \alpha + \eta[\cap]\alpha - \frac{1}{c^2}, \alpha + \frac{1}{c^2}[$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = F(x_n)$$

(a) Justifier que la suite est bien définie.

(b) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, |x_n - \alpha| \leq c^{-2^n - 1}.$$

(c) En déduire que la suite (x_n) converge vers α .

Correction du devoir d'entraînement n 7bis

Exercice 1 Partie 1

Soit $f \in C^1(I)$ strictement croissante et convexe.

1. (a) On a f strictement croissante donc $\forall x \in I, f'(x) \geq 0$. Supposons, par l'absurde, que f' s'annule. Comme f est convexe et dérivable, sa dérivée f' est croissante. Si elle s'annule, elle est donc négative avant ce point puis positive. Cela implique que f change de monotonie ce qui est absurde. On en déduit que pour tout $x \in I, f'(x) > 0$.

Attention, la stricte croissance de f n'implique pas que f' est strictement positive. Pensez à $f : x \mapsto x^3$, elle est strictement croissante mais sa dérivée s'annule en 0.

- (b) À nouveau, on raisonne par l'absurde en supposant que f s'annule en deux points distincts. En appliquant le thm de Rolle, on obtient l'annulation de f' entre ces deux points ce qui contredit la question précédente. On en déduit que f s'annule au plus une fois sur I .

2. On suppose qu'il existe $\alpha \in I$ tel que $f(\alpha) = 0$

- (a) Soit $x \in [\alpha, b[$. On sait que f est strictement croissante et $f(\alpha) = 0$ donc $f(x) > 0$. Par ailleurs, on a montré que $f'(x) > 0$ donc $\frac{f(x)}{f'(x)} > 0$. On en déduit que $x - \frac{f(x)}{f'(x)} < x \leq b$.

Montrons l'autre inégalité. On raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned} \alpha \leq x - \frac{f(x)}{f'(x)} &\Leftrightarrow f'(x)\alpha \leq xf'(x) - f(x) \text{ car } f'(x) > 0 \\ &\Leftrightarrow (\alpha - x)f'(x) + f(x) \leq 0 \\ &\Leftrightarrow (\alpha - x)f'(x) + f(x) \leq f(\alpha) \end{aligned}$$

La dernière inégalité traduit le fait que le graphe de f en le point d'abscisse α est au-dessus de la tangente en le point d'abscisse x ce qui est vrai puisque f est convexe. On en déduit, par équivalence, que $x - \frac{f(x)}{f'(x)} > \alpha$.

On a bien $\forall x \in [\alpha, b[, x - \frac{f(x)}{f'(x)} \in [\alpha, b[$.

Là pour moi, l'intervalle doit être fermé en α , je pense que c'est une erreur d'énoncé.

- (b) Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $x_0 \in I$ tel que $f(x_0) > 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

On pose $g : x \mapsto x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. On a $f(x_0) > f(\alpha)$ donc, pas stricte croissance de f , $x_0 > \alpha$ c'est-à-dire $x_0 \in [\alpha, b[$. D'après la question précédente, on a montré que $[\alpha, b[$ est stable par g et $[\alpha, b[\subset I$. On en déduit que la suite est bien définie.

Certains se sont contentés de dire que $f'(x) \neq 0$, c'est insuffisant

- (c) Soit $n \in \mathbb{N}$, alors $x_{n+1} - x_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$. Or $x_n > \alpha$ donc $f(x_n) > 0$ et on sait que $f' > 0$. On en déduit que $\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} > 0$ donc $x_{n+1} - x_n < 0$. Ceci étant vrai pour tout n , la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

(d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n > \alpha$. La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante minorée donc convergente.

Notons l sa limite. On a $x_{n+1} \rightarrow l$ et $x_{n+1} \rightarrow l - \frac{f(l)}{f'(l)}$ par continuité de f et f' . Par unicité de la limite, on a donc $l = l - \frac{f(l)}{f'(l)}$ donc $f(l) = 0$ puis $l = \alpha$ par injectivité de f . On a montré que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers α .

Partie 2

Soit $f \in \mathcal{C}^2(I)$ et $\alpha \in I$ tel que $f(\alpha) = 0$, $f'(\alpha) \neq 0$.

1. D'après la première question, on sait que $f'(x) \neq 0$, $\forall x \in I$.

On sait également que α est un point intérieur à I car I est un intervalle ouvert. Il existe η_1 tel que $]\alpha - \eta_1, \alpha + \eta_1[\subset I$.

On a alors $]\alpha - \eta_1, \alpha + \eta_1[\subset I$ et

$$\forall x \in]\alpha - \eta_1, \alpha + \eta_1[, f'(x) \neq 0.$$

2. On considère la fonction F suivante :

$$F: \begin{cases}]\alpha - \eta_1, \alpha + \eta_1[& \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto x - \frac{f(x)}{f'(x)} \end{cases}$$

Montrons que F est de classe $\mathcal{C}^1$.

D'après la question précédente, la fonction est le quotient de deux fonctions de classe C^1 dont le dénominateur ne s'annule pas, elle est donc C^1 .

3. On rappelle que toute fonction de classe $C^2(I)$ g possède un DL_2 en tout point a de I de la forme

$$g(x) = g(a) + (x - a)g'(a) + \frac{(x - a)^2}{2}g''(a) + o((x - a)^2).$$

(a) On a $F(\alpha) = \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} = \alpha$ et

$$\forall x \in]\alpha - \eta_1, \alpha + \eta_1[, F'(x) = 1 - \frac{f'(x)^2 - f(x)f''(x)}{f'(x)^2},$$

donc $F'(\alpha) = 0$.

(b) D'après la formule rappelée ci-dessus, on a

$$f(x) = f(\alpha) + f'(\alpha)(x - \alpha) + \frac{f''(\alpha)(x - \alpha)^2}{2} + o((x - \alpha)^2),$$

et

$$f'(x) = f'(\alpha) + f''(\alpha)(x - \alpha) + o(x - \alpha).$$

(c) En utilisant les DL trouvés à la question précédente, on a

$$\begin{aligned} F(x) &= x - \frac{f'(\alpha)(x - \alpha) + \frac{f''(\alpha)(x - \alpha)^2}{2} + o((x - \alpha)^2)}{f'(\alpha) + f''(\alpha)(x - \alpha) + o(x - \alpha)} \\ &= x - (x - \alpha) \left(\frac{1 + (x - \alpha) \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)} + o(x - \alpha)}{1 + \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}(x - \alpha) + o(x - \alpha)} \right) \\ &= x - (x - \alpha) \left(1 + (x - \alpha) \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)} + o(x - \alpha) \right) \left(1 + \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}(x - \alpha) + o(x - \alpha) \right) \\ &= x - (x - \alpha) \left(1 - \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}(x - \alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}(x - \alpha) + o(x - \alpha) \right) \\ &= \alpha + \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}(x - \alpha)^2 + o((x - \alpha)^2) \end{aligned}$$

On a montré que F admet un DL_2 en α .

Attention, F n'est pas C^2 , vous ne pouvez donc pas affirmer qu'elle admet un DL_2

4. D'après la question précédente, on sait que

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{F(x) - \alpha}{(x - \alpha)^2} = \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}.$$

Par définition de la limite, on sait qu'il existe $\nu > 0$ tel que

$$\forall x \in]\alpha - \nu, \alpha + \nu[\cap]\alpha - \eta_1, \alpha + \eta_1[, \left| \frac{F(x) - \alpha}{(x - \alpha)^2} - \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)} \right| < 1.$$

On pose $c = \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)} + 1 > 1$ car $\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)} > 0$, alors

$$\forall x \in]\alpha - \eta_1, \alpha + \eta_1[\cap]\alpha - \nu, \alpha + \nu[,$$

$$\left| \frac{F(x) - \alpha}{(x - \alpha)^2} \right| \leq \left| \frac{F(x) - \alpha}{(x - \alpha)^2} - \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)} \right| + \left| \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)} \right|$$

par l'inégalité triangulaire donc

$$\forall x \in]\alpha - \eta_1, \alpha + \eta_1[\cap]\alpha - \nu, \alpha + \nu[, \left| \frac{F(x) - \alpha}{(x - \alpha)^2} \right| < c.$$

On pose enfin $\eta_2 = \frac{1}{2} \min(\nu, \eta_1)$, on a bien $0 < \eta_2 < \eta_1$ et

$$\forall x \in]\alpha - \eta_2, \alpha + \eta_2[, |F(x) - \alpha| \leq c(x - \alpha)^2.$$

5. On veut montrer qu'il existe $c > 1$ et $\eta \in]0, \eta_1[$ tel que

- $]\alpha - \eta, \alpha + \eta[\subset I$,
- $\forall x \in]\alpha - \eta, \alpha + \eta[, F(x) \in]\alpha - \eta, \alpha + \eta[$,
- $\forall x \in]\alpha - \eta, \alpha + \eta[, |F(x) - \alpha| \leq c(x - \alpha)^2$.

On sait déjà qu'il existe $c > 1$ et $\eta_2 \in]0, \eta_1[$ tel que

$$\forall x \in]\alpha - \eta_2, \alpha + \eta_2[, |F(x) - \alpha| \leq c(x - \alpha)^2.$$

Reste à montrer que quitte à restreindre l'intervalle, on peut le choisir stable par F . On sait que $F'(\alpha) = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow \alpha} F'(x) = 0$ par continuité de F' . Ainsi, il existe $\eta_3 > 0$ tel que

$$\forall x \in]x - \eta_3, x + \eta_3[\cap]x - \eta_1, x + \eta_1[, |F'(x)| < 1.$$

On a donc

$$\forall (x, y) \in]x - \eta_3, x + \eta_3[\cap]x - \eta_1, x + \eta_1[, |F(x) - F(y)| \leq |x - y|,$$

puis

$$\forall x \in]x - \eta_3, x + \eta_3[\cap]x - \eta_1, x + \eta_1[, |F(x) - \alpha| \leq |x - \alpha| < \eta_3.$$

On choisit maintenant $\eta = \min(\eta_2, \eta_3)$. On a bien les trois points vérifiés.

Dans toute la suite du problème, on considèrera η et c vérifiant ces conditions.

6. Soit (x_n) la suite définie par $x_0 \in]\alpha - \eta, \alpha + \eta[\cap \left] \alpha - \frac{1}{c^2}, \alpha + \frac{1}{c^2} \right[$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = F(x_n)$$

- (a) Par définition de η , $] \alpha - \eta, \alpha + \eta [$ est stable par F et $] \alpha + \eta, \alpha - \eta [\subset I$ donc la suite est bien définie. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in] \alpha - \eta, \alpha + \eta [$
- (b) Soit $n \in \mathbb{N}$, alors $x_n \in] \alpha - \eta, \alpha + \eta [$ donc

$$|F(x_n) - \alpha| \leq c |x_n - \alpha|^2,$$

donc

$$|x_{n+1} - \alpha| \leq c |x_n - \alpha|^2.$$

On a également

$$|x_n - \alpha| \leq c |x_{n-1} - \alpha|^2,$$

donc

$$|x_{n+1} - \alpha| \leq c \cdot c^2 |x_{n-1} - \alpha|^4.$$

Par récurrence descendante, on en déduit que

$$|x_{n+1} - \alpha| \leq c \cdot c^2 \dots c^{2^n} |x_0 - \alpha|^{2^{n+1}}.$$

Soit, pour $n \geq 1$,

$$|x_n - \alpha| \leq c \cdot c^2 \dots c^{2^{n-1}} |x_0 - \alpha|^{2^n}.$$

On a $\prod_{k=0}^{n-1} c^{2^k} = c^{\sum_{k=0}^{n-1} 2^k} = c^{2^n - 1}$.

Par ailleurs, $|x_0 - \alpha| \leq \frac{1}{c^2}$ par hypothèse donc pour tout $n \geq 1$,

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{c^{2^n - 1}}{c^{2^{n+1}}}.$$

On a $2^n - 1 - 2^{n+1} = -2^n - 1$ On a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, |x_n - \alpha| \leq c^{-2^n - 1}.$$

L'inégalité reste vraie pour $n = 0$ par définition de x_0 , on a donc bien

$$\forall n \in \mathbb{N}, |x_n - \alpha| \leq c^{-2^n - 1}.$$

- (c) On a $c > 1$ donc $c^{-2^n - 1} \rightarrow 0$. On en déduit que la suite (x_n) converge vers α .