

Devoir surveillé 7, sujet 1 .

Chaque résultat doit être justifié, les réponses doivent être soulignées ou encadrées, vos pages (et pas vos copies) doivent être numérotées, votre nom et classe doivent être mentionnés et tout ceci doit être fait durant le temps de composition. Les étapes des éventuels calculs doivent apparaître sur la copie. On peut admettre un résultat ou une question en le précisant explicitement. La clarté et la précision de la rédaction ainsi que la présentation de la copie seront prises en compte dans l'évaluation.

Calculatrice interdite.

Exercice 1.

On considère la fonction

$$f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 \arctan\left(\frac{1}{1+x}\right)$$

On note Γ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal du plan.

1. (a) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
- (b) Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, déterminer le réel ¹ $g(x)$ tel que $f'(x) = 2xg(x)$.
- (c) Montrer que la fonction $g : x \mapsto g(x)$ ainsi définie est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, que sa dérivée vérifie $g'(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{(1+(1+x)^2)^2} P(x)$ avec $x \mapsto P(x)$ une fonction polynôme du second degré et qu'elle vérifie aussi

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \quad g'(x) < 0.$$

- (d) Étudier le signe de g sur $] -\infty; -1[$ et sur $] -1; +\infty[$.
- (e) En déduire le tableau des variations de f sur ces intervalles.
2. (a) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
- (b) Déterminer les réels ℓ_G et ℓ_D , limites respectives de f en $(-1)^-$ et $(-1)^+$.
3. On considère les fonctions

$$f_G :] -\infty; -1] \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad f_D : [-1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x < -1 \\ \ell_G & \text{si } x = -1 \end{cases} \quad x \longmapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x > -1 \\ \ell_D & \text{si } x = -1 \end{cases}$$

- (a) Montrer que pour $h \in \mathbb{R}_+ : f_D(-1+h) = (1-2h+h^2) \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(h) \right)$.
Donner alors le DL_2 de f_D en -1 .
- (b) Justifier que f_D est dérivable en -1 et donner $f'_D(-1)$.
Préciser ensuite la position de Γ par rapport à sa demi-tangente au point $A(-1, \ell_D)$.
- (c) Déterminer le DL_2 de f_G en -1 .
Préciser alors l'allure de Γ au voisinage du point $B(-1, \ell_G)$.

1. sans vouloir porter de jugement, il est moche.

4. (a) Déterminer le DL_3 de $y \mapsto \frac{y}{1+y}$ en 0, puis le DL_3 de $x \mapsto \arctan\left(\frac{y}{1+y}\right)$ en 0.
- (b) En remarquant que, pour $X \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$, $\arctan\left(\frac{1}{1+1/X}\right) = \arctan\left(\frac{X}{1+X}\right)$, donner un développement asymptotique de $f(x)$ à la précision $\frac{1}{x}$ lorsque $x \rightarrow +\infty$.
- (c) Que peut-on en déduire?

Exercice 2.

On rappelle que les polynômes de Tchébychev sont définis par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, T_n(\cos(x)) = \cos(nx),$$

ils vérifient $\forall n \in \mathbb{N}, T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$ et pour tout $n \geq 1$, le terme dominant de T_n est $2^{n-1}X^n$.

1. Dériver deux fois la relation définissant les T_n , puis montrer que $\cos\theta$ est racine de

$$-(1-X^2)T''_n(X) + XT'_n(X) - n^2T_n(X)$$

2. En déduire que T_n est solution d'une équation différentielle d'ordre 2.
3. On définit les polynômes (U_n) de deuxième espèce par

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_n = \frac{1}{n+1} T'_{n+1}.$$

- (a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, U_n(\cos(x)) \sin(x) = \sin((n+1)x)$.
- (b) Montrer que pour tout x non congru à 0 modulo π ,

$$U_n(\cos x) + U_{n+2}(\cos x) = 2 \cos(x) U_{n+1}(\cos x).$$

- (c) En déduire que la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie la même relation de récurrence que la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- (d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que U_n admet n racines distinctes dans $] -1, 1[$ que l'on explicitera.
- (e) En déduire qu'il est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$.
- (f) En déduire la factorisation de U_n .
4. Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^2, m \leq n$.
- (a) Montrer que

$$T_n T_m = \frac{1}{2} T_{n+m} + \frac{1}{2} T_{n-m}.$$

On note $Q_{n,m}$ et $R_{n,m}$ le quotient et le reste de la division euclidienne de T_n par T_m .

- (b) On suppose ici $0 < m < n < 3m$. Montrer que

$$Q_{n,m} = 2T_{n-m} \text{ et } R_{n,m} = -T_{|n-2m|}.$$

- (c) On suppose ici $n = (2p+1)m$ avec $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $R_{n,m} = 0$.

5. Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^2$, Montrer que $T_m \circ T_n = T_{nm}$.

Exercice 3.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'équation $x^4 + x^3 = n$ admet une unique solution dans $[0, +\infty[$ que l'on notera x_n .
2. Montrer que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.
3. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$.
4. Montrer que $x_n^4 = \frac{nx_n}{1 + x_n}$.
5. Montrer que $x_n \sim n^{1/4}$.
6. (a) Montrer que $x_n^4 = \frac{n}{1 + 1/n^{1/4} + o(1/n^{1/4})}$.
(b) En déduire que $x_n = n^{1/4} - \frac{1}{4} + o(1)$.
7. Montrer que $\frac{1}{x_n} = \frac{1}{n^{1/4}} + \frac{1}{4\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.
8. En déduire que $x_n = n^{1/4} - \frac{1}{4} + \frac{3}{32n^{1/4}} + o\left(\frac{1}{n^{1/4}}\right)$.

Correction du DS n 7, sujet 1

Exercice 1 On considère la fonction

$$f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto x^2 \arctan\left(\frac{1}{1+x}\right)$$

On note Γ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal du plan.

1. (a) La fonction $\arctan$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ en tant que produit et composée de fonctions continues.

(b) Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, alors

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x \arctan\left(\frac{1}{x+1}\right) - \frac{x^2}{(x+1)^2} \frac{1}{1+(1/(1+x))^2} \\ &= \frac{2x}{\arctan\left(\frac{1}{x+1}\right)} - \frac{x^2}{(1+x)^2 + 1} \\ &= 2x \left(\arctan\left(\frac{1}{1+x}\right) - \frac{x}{2((1+x)^2 + 1)} \right) \end{aligned}$$

On a donc, $g(x) = \arctan\left(\frac{1}{1+x}\right) - \frac{x}{2((1+x)^2 + 1)}$.

Il n'est pas acceptable que dans cette question et la suivante, il y ait autant d'erreurs de calculs dans les dérivées et que certains "oublient" de dériver $x \mapsto \frac{1}{1+x}$.

(c) Par les théorèmes usuels, $g : x \mapsto g(x)$ ainsi définie est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Pour tout $x \neq -1$, on a

$$g'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2 + 1} - \frac{(1+x)^2 + 1 - 2x(1+x)}{2((1+x)^2 + 1)^2} = \frac{-(x^2 + 4x + 6)}{2((1+x)^2 + 1)^2}.$$

La dérivée est bien de la forme $g'(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{(1+(1+x)^2)^2} P(x)$ avec $x \mapsto P(x)$ une fonction polynômiale du second degré puisqu'elle est définie par $P(x) = -(x^2 + 4x + 6)$. Son discriminant est négatif, elle est donc du signe de son terme dominant à savoir négatif. Par ailleurs, le dénominateur étant positif, on a bien

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \quad g'(x) < 0.$$

(d) D'après la question précédente, on sait que g est décroissante sur $] -\infty, -1[$ et $] -1, +\infty[$. On

a $\lim_{x \rightarrow -1^-} \arctan\left(\frac{1}{1+x}\right) = -\frac{\pi}{2}$ et $\lim_{x \rightarrow -1^+} \arctan\left(\frac{1}{1+x}\right) = \frac{\pi}{2}$ d'où le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g'(x)$	-		-
g	$0 \longrightarrow \frac{1}{2} - \frac{\pi}{2}$		$\frac{1}{2} + \frac{\pi}{2} \longrightarrow 0$

On en déduit que g est négatif sur $] -\infty, -1[$ et positif sur $]1, +\infty[$.

(e) On sait que pour tout $x \neq -1$, $f'(x) = 2xg(x)$. On en déduit le tableau des variations de f :

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$		$-$	0	$+$
f			 		

2. (a) On sait que $\arctan y \sim_0 y$ donc $f(x) \sim_{\infty} \frac{x^2}{1+x}$. On a donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

(b) On a $\lim_{x \rightarrow -1^-} \arctan \frac{1}{1+x} = -\frac{\pi}{2}$ donc $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\frac{\pi}{2}$. De même, $\lim_{x \rightarrow -1^+} \arctan \frac{1}{1+x} = \frac{\pi}{2}$ donc $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \frac{\pi}{2}$. On a donc $\ell_G = -\frac{\pi}{2}$ et $\ell_D = +\frac{\pi}{2}$.

3. On considère les fonctions

$$f_G :]-\infty; -1] \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad f_D : [-1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x < -1 \\ \ell_G & \text{si } x = -1 \end{cases} \quad x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x > -1 \\ \ell_D & \text{si } x = -1 \end{cases}$$

(a) Soit $h \in \mathbb{R}_+^*$. On a

$$\begin{aligned} f_D(-1+h) &= (-1+h)^2 \arctan\left(\frac{1}{h}\right) \\ &= (-1+h)^2 \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(h)\right) \end{aligned}$$

car pour tout $x > 0$, $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$.

Par ailleurs, on a $f_D(-1) = \ell_D = -\frac{\pi}{2}$ donc la formule est bien vraie pour tout $h \geq 0$.

Là, il est facile de lire que $f_D(-1) = -\frac{\pi}{2}$ (et vous n'avez donc plus qu'à comprendre pourquoi et faire la question précédente, si vous ne l'avez pas faite).

On a donc

$$f_D(-1+h) = (-1+h)^2 \left(\frac{\pi}{2} - h + o(h^2)\right) = \frac{\pi}{2} - (\pi+1)h + \left(\frac{\pi}{2} + 2\right)h^2 + o(h^2),$$

le DL2 de f_D en -1 est donc

$$f_D(x) = \frac{\pi}{2} - (\pi+1)(x+1) + \left(\frac{\pi}{2} + 2\right)(x+1)^2 + o((x+1)^2).$$

(b) D'après le DL précédent, $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f_D(x) - f_D(-1)}{x+1} = -(\pi+1)$ donc f_D est dérivable en -1 et on a $f'_D(-1) = -(\pi+1)$.

Par ailleurs, la demi-tangente à Γ en $A(-1, \ell_D)$ a pour équation $y = \frac{\pi}{2} - (\pi+1)(x+1)$ et

$$f_D(x) - \left(\frac{\pi}{2} - (\pi+1)(x+1)\right) \sim \left(\frac{\pi}{2} + 2\right)(x+1)^2,$$

donc, au voisinage de -1 les deux quantités sont de même signe. On en déduit que Γ est au-dessus de sa demi-tangente.

(c) Comme précédemment, on prend $h < 0$ et on écrit

$$\begin{aligned} f_G(-1+h) &= (-1+h)^2 \arctan\left(\frac{1}{h}\right) \\ &= (-1+h)^2 \left(-\frac{\pi}{2} - \arctan(h)\right) \end{aligned}$$

car pour tout $x < 0$, $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}$.

On a donc

$$f_G(-1+h) = (-1+h)^2 \left(-\frac{\pi}{2} - h + o(h^2)\right) = -\frac{\pi}{2} + (\pi-1)h + \left(-\frac{\pi}{2} + 2\right)h^2 + o(h^2).$$

Cette formule reste, à nouveau, vraie pour $h = 0$ et le DL2 de f_G en -1 est donc

$$f_G(x) = -\frac{\pi}{2} + (\pi-1)(x+1) + \left(-\frac{\pi}{2} + 2\right)(x+1)^2 + o((x+1)^2).$$

La demi-tangente à Γ en $B(-1, \ell_G)$ a pour équation $y = \frac{\pi}{2} + (\pi-1)(x+1)$ et

$$f_G(x) - \left(-\frac{\pi}{2} + (\pi-1)(x+1)\right) \sim \left(-\frac{\pi}{2} + 2\right)(x+1)^2,$$

donc, au voisinage de -1 les deux quantités sont de même signe. On en déduit que Γ est au-dessus de sa demi-tangente.

4. (a) On a $\frac{y}{1+y} = y(1-y+y^2+o(y^2)) = y-y^2+y^3+o(y^3)$. Par ailleurs, on sait que $\arctan y = y - \frac{y^3}{3} + o(y^3)$ et $\frac{y}{1+y} \rightarrow 0$ quand $y \rightarrow 0$ donc

$$\arctan \frac{y}{1+y} = (y-y^2+y^3+o(y^3)) - \frac{1}{3}(y-y^2+y^3+o(y^3))^3 = y-y^2+\frac{2}{3}y^3+o(y^3).$$

- (b) Pour tout $X \neq 0, -1$, on a

$$\arctan\left(\frac{1}{1+1/X}\right) = \arctan\left(\frac{X}{1+X}\right).$$

On veut un développement de $f(x)$ quand $x \rightarrow +\infty$. On sait que $\frac{1}{x} \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$ donc

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 \arctan\left(\frac{1/x}{1+1/x}\right) \\ &= x^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right) \\ &= x-1+\frac{2}{3x}+o\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

On en déduit que Γ admet une asymptote d'équation $y = x-1$ au voisinage de $+\infty$ puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x-1) = 0$. Par ailleurs, on $f(x) - (x-1) \sim \frac{2}{3x}$ et $\frac{2}{3x} > 0$ au voisinage de $+\infty$. On en déduit que Γ est au-dessus de cette asymptote.

Exercice 2 1. On dérive l'égalité $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$ par rapport à θ . On obtient $-\sin\theta T'_n(\cos\theta) = -n\sin(n\theta)$ puis

$$\sin^2\theta T_n''(\cos\theta) - \cos\theta T_n'(\cos\theta) = n^2 \cos(n\theta).$$

On a donc

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, (1 - \cos^2\theta) T_n''(\cos\theta) - \cos\theta T_n'(\cos\theta) + n^2 T_n(\cos\theta) = 0$$

ce qui montre bien que $\cos \theta$ est racine du polynôme donné.

Erreur d'énoncé dans l'indication. Ceci dit beaucoup d'entre vous ont pensé à dériver l'égalité $T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$ (surtout dans les questions suivantes) mais ont fait une erreur en dérivant la composée $T_n \circ \cos$

2. Il est naturel d'introduire l'équation différentielle suivante :

$$(x^2 - 1)y'' + xy' + n^2y = 0 \quad (E)$$

On sait que le polynôme $(X^2 - 1)T''_n(X) + XT'_n(X) + n^2T_n(X)$ admet $\cos \theta$ pour racine pour tout $\theta \in \mathbb{R}$. Ce polynôme est donc nul sur $[-1, 1]$ donc sur $\mathbb{R}$, ce qui montre que T_n (enfin, sa fonction polynomiale associée) est solution de l'équation différentielle (E).

En admettant la question précédente, on pouvait prendre deux points facilement. Pourtant presque personne ne les a eu. D'abord parce qu'un seul (et même pas sur cette question) a pensé à me parler d'infinité de racines pour justifier le passage de "égal évalué en $\cos \theta$ " à "égalité polynomiale". Ensuite parce que " T_n est donc solution d'une équation du second degré sans donner l'équation" ne peut pas apporter de points dans la mesure où l'énoncé vous demande de montrer que c'est le cas.

3. On définit les polynômes (U_n) de deuxième espèce par

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_n = \frac{1}{n+1} T'_{n+1}.$$

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait que $\forall x \in \mathbb{R}, T_{n+1}(\cos(x)) = \cos((n+1)x)$ donc, en dérivant par rapport à x , on obtient $-\sin(x)T'_{n+1}(\cos(x)) = -(n+1)\sin((n+1)x)$ d'où, en divisant par $-(n+1)$, $\sin(x)U_n(\cos x) = \sin((n+1)x)$.

Quasiment personne n'a su dériver correctement l'égalité et aboutir au résultat. Visiblement, vous confondez $T'_n(\cos x)$ et la dérivée de $x \mapsto T_n(\cos x)$.

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\begin{aligned} \sin(x)U_{n+2}(\cos x) + \sin(x)U_n(\cos x) &= \sin((n+2)x) + \sin(nx) \\ &= \sin((n+1)x + x) + \sin((n+1)x - x) \\ &= 2\sin((n+1)x)\cos x \\ &= 2\cos(x)\sin(x)U_{n+1}(\cos x) \end{aligned}$$

On a donc, pour tout x non congru à 0 modulo π ,

$$U_n(\cos x) + U_{n+2}(\cos x) = 2\cos(x)U_{n+1}(\cos x).$$

(c) D'après la question précédente, on a $\forall y \in]-1, 1[$,

$$U_n(y) + U_{n+2}(y) = 2yU_{n+1}(y).$$

On en déduit que le polynôme $U_{n+2} + U_n - 2XU_{n+1}$ admet une infinité de racines, il est donc nul. En conséquence, on a bien

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+2} = 2XU_{n+1} - U_n$$

(d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On cherche les racines de U_n dans $] -1, 1[$, on peut donc les chercher sous la

forme $\cos(x)$ avec x non congru à 0 modulo π . On a

$$\begin{aligned} U_n(\cos(x)) = 0 &\Leftrightarrow \sin(x)U_n(\cos(x)) = 0 \text{ car } \sin(x) \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \sin((n+1)x) = 0 \\ &\Leftrightarrow (n+1)x \equiv 0[\pi] \\ &\Leftrightarrow x \equiv 0\left[\frac{\pi}{n+1}\right] \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 0, n \rrbracket, x = \frac{k\pi}{n+1} \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 1, n \rrbracket, x = \frac{k\pi}{n+1} \text{ car } x \text{ non congru à } 0 \text{ modulo } \pi \end{aligned}$$

On en déduit que $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$ est racine de U_n . Or, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \frac{k\pi}{n+1} \in]0, \pi[$, intervalle sur lequel $\cos$ est injectif. On en déduit que les n racines trouvées sont distinctes.

C'est comme dans le DM sauf qu'il faut enlever $k = 0$ pour ne pas avoir $\sin(x) = 0$.

- (e) D'après la question précédente, on a trouvé n racines distinctes de U_n . Or U_n est de degré n puisque T_{n+1} est de degré $n+1$, on a donc trouvé toutes ses racines, on en déduit que U_n est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$.
- (f) Par ailleurs, T_{n+1} a pour coefficient dominant 2^n donc T'_{n+1} a pour coefficient dominant $2^n(n+1)$ et U_n a pour coefficient dominant 2^n , la factorisation de U_n est donc

$$U_n(X) = 2^n \prod_{k=1}^n \left(X - \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right) \right).$$

il ne faut pas oublier le coefficient dominant (et savoir le déterminer correctement)

4. Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^2, m \leq n$.

- (a) On veut montrer que le polynôme $2T_n T_m - T_{n+m} - T_{n-m}$ est nul. On l'évalue en $\cos(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$:

$$2\cos(nx)\cos(mx) - \cos((n+m)x) - \cos((n-m)x) = 0.$$

On en déduit que ce polynôme a une infinité de racines, à savoir tous les réels entre -1 et 1 , il est donc nul et on a bien l'égalité souhaitée.

On note $Q_{n,m}$ et $R_{n,m}$ le quotient et le reste de la division euclidienne de T_n par T_m .

- (b) On suppose ici $0 < m < n < 3m$. Montrons que

$$Q_{n,m} = 2T_{n-m} \text{ et } R_{n,m} = -T_{|n-2m|}.$$

On applique la question précédente au couple $(n-m, m)$ si $m \leq n-m$, on obtient :

$$2T_m T_{n-m} = T_n + T_{n-2m}.$$

Si $m \geq n-m$, on l'applique au couple $(m, n-m)$:

$$2T_m T_{n-m} = T_n + T_{2m-n}.$$

Dans tous les cas, on a

$$2T_m T_{n-m} = T_n + T_{|n-2m|},$$

donc

$$T_n = 2T_{n-m}T_m - T_{|n-2m|}.$$

Or, par hypothèse $n-2m < m$ et $2m-n < m$ donc $\deg T_{|n-2m|} < m$, on a donc écrit la division euclidienne de T_n par T_m . Par unicité, on a $Q_{n,m} = 2T_{n-m}$ et $R_{n,m} = -T_{|n-2m|}$.

Il manquait $m \leq n$ dans la question précédente, je n'ai donc pas pénalisé le raisonnement autour de la valeur absolue. En revanche dans division euclidienne, il y a $A = BQ + R$ ET $\deg(R) < \deg(B)$

(c) On suppose ici $n = (2p + 1)m$ avec $p \in \mathbb{N}^*$. Montrons que $R_{n,m} = 0$.

On va raisonner par récurrence sur p . Pour $p = 1$, on a $2T_m T_{2m} = T_m + T_{3m}$ donc $T_{3m} = (2T_{2m} - 1) T_m$ et le reste est bien nul.

Soit $p \geq 1$ tel que $T_m | T_{(2p+1)m}$, montrons que $T_m | T_{(2p+3)m}$.

On écrit

$$2T_{(2p+2)m} T_m = T_{(2p+3)m} + T_{(2p+1)m},$$

donc

$$T_{(2p+3)m} = 2T_{(2p+2)m} T_m - T_{(2p+1)m}.$$

Or, par hypothèse de récurrence, $T_m | T_{(2p+1)m}$. On en déduit que $T_m | T_{(2p+3)m}$ et la propriété est héréditaire. Par le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier p .

5. Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^2$, soit $x \in \mathbb{R}$, alors

$$T_m \circ T_n(\cos x) = T_m(\cos(nx)) = \cos((nm)x) = T_{mn}(\cos x).$$

On en déduit que le polynôme $T_m \circ T_n - T_{mn}$ admet une infinité de racines, il est donc nul.

Exercice 3

Je ne sais plus trop comment vous le dire mais je vais essayer une dernière fois. Pour montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $g(x) = n$ admet une unique solution, on peut :

- Montrer que n appartient à l'image de g (en traçant le tableau de variations de g) puis dire que n admet un antécédent unique car g est injective (pas stricte monotonie de g).
- Utiliser le TVI appliqué entre DEUX POINTS (en citant la continuité de g) pour avoir l'existence d'une solution puis dire que n admet un antécédent unique car g est injective (pas stricte monotonie de g).
- Dire que g réalise une bijection de I vers J grâce au tableau de variations et dire que, comme $n \in J$, l'équation $g(x) = n$ admet une unique solution dans I .
- Dire que $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ ET g continue donc $\text{Im}(g) = \mathbb{R}$ et g est donc surjective.

On ne peut pas :

- Dire que f admet une solution ou un antécédent.
- Appliquer le TVI entre $-\infty$ et $+\infty$.
- Dire que $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ donc $\text{Im}(g) = \mathbb{R}$ sans parler de continuité de g .
- parler du "corollaire du TVI".
- Donner tous les arguments en vrac et conclure "on a donc une unique solution"

12 personnes sur 42 ont rédigé correctement cette question. La dernière fois j'avais mis sur 2 points et noté de manière binaire en espérant que cela vous serve de leçon, visiblement non. Faut-il que je mette des points négatifs pour que vous fassiez enfin l'effort de rédiger correctement ce genre de questions?

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $f : x \mapsto x^4 + x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et son image vaut $\mathbb{R}^+$. On a $n \in \mathbb{R}^+$ donc n admet un antécédent par f et cet antécédent est unique par injectivité de la fonction f .
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $f(x_n) = n$ et $f(x_{n+1}) = n + 1$ donc $f(x_n) < f(x_{n+1})$ et pas stricte croissance de la fonction, on obtient $x_n < x_{n+1}$ donc la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
3. D'après la question précédente, la suite est croissante, elle admet donc une limite. Si celle-ci était réelle, on aurait, en la notant ℓ , $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n^4 + x_n^3 = \ell^4 + \ell^3$. Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n^4 + x_n^3 = \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$, on obtient une contradiction. On en déduit que $x_n \rightarrow +\infty$. On peut aussi montrer que la suite n'est pas majorée. On suppose, par l'absurde, qu'il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, x_n < K$, on a alors $\forall n \in \mathbb{N}, \underbrace{x_n^4 + x_n^3}_{=n} < K^3(K + 1)$ ce qui est absurde.

La négation de $x_n \rightarrow +\infty$ est $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'a pas de limite OU $x_n \rightarrow \ell$ (si (x_n) est positive). Il faut donc impérativement justifier que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite avant de supposer par l'absurde que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers une limite finie.

4. Par définition, on a $x_n^4 + x_n^3 = n$ donc $x_n^3(1 + x_n) = n$ d'où, comme $x_n + 1 > 0$, $x_n^4 = \frac{nx_n}{1 + x_n}$.

5. D'après la question précédente, $x_n^4 = \frac{n}{1 + 1/x_n}$ donc $\frac{x_n^4}{n} \rightarrow 1$. On a donc $x_n^4 \sim n$ puis $x_n \sim n^{1/4}$.

6. (a) D'après la question précédente, $x_n \sim n^{1/4}$ donc $\frac{1}{x_n} \sim \frac{1}{n^{1/4}}$. On a donc

$$\frac{1}{x_n} = \frac{1}{n^{1/4}} + o\left(\frac{1}{n^{1/4}}\right),$$

puis, comme $x_n^4 = \frac{n}{1 + 1/x_n}$,

$$x_n^4 = \frac{n}{1 + 1/n^{1/4} + o(1/n^{1/4})}$$

(b) D'après la question précédente, on a

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{n^{1/4}}{\left(1 + 1/n^{1/4} + o(1/n^{1/4})\right)^{1/4}} \\ &= n^{1/4} \left(1 + 1/n^{1/4} + o(1/n^{1/4})\right)^{-1/4} \\ &= n^{1/4} \left(1 - \frac{1}{4n^{1/4}} + o(1/n^{1/4})\right) \\ &= n^{1/4} - \frac{1}{4} + o(1) \end{aligned}$$

On a bien l'égalité souhaitée.

7. D'après la question précédente, on a $x_n = n^{1/4} - \frac{1}{4} + o(1)$ donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{x_n} &= \frac{1}{n^{1/4} - \frac{1}{4} + o(1)} \\ &= \frac{1}{n^{1/4}} \frac{1}{1 - \frac{1}{4n^{1/4}} + o\left(\frac{1}{n^{1/4}}\right)} \\ &= \frac{1}{n^{1/4}} \left(1 + \frac{1}{4n^{1/4}} + o\left(\frac{1}{n^{1/4}}\right)\right) \\ &= \frac{1}{n^{1/4}} + \frac{1}{4\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \end{aligned}$$

On a bien le résultat attendu.

8. Comme précédemment, on écrit $x_n^4 = \frac{n}{1 + 1/x_n}$, on a donc

$$\begin{aligned} x_n &= n^{1/4} \left(1 + \frac{1}{n^{1/4}} + \frac{1}{4\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)^{-1/4} \\ &= n^{1/4} \left(1 - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{n^{1/4}} + \frac{1}{4\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) + \frac{5}{32} \left(\frac{1}{n^{1/4}} + \frac{1}{4\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)^2\right) \\ &= n^{1/4} \left(1 - \frac{1}{4n^{1/4}} - \frac{1}{16\sqrt{n}} + \frac{5}{32\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) \\ &= n^{1/4} - \frac{1}{4} + \frac{3}{32n^{1/4}} + o\left(\frac{1}{n^{1/4}}\right) \end{aligned}$$

On a montré que $x_n = n^{1/4} - \frac{1}{4} + \frac{3}{32n^{1/4}} + o\left(\frac{1}{n^{1/4}}\right)$.