Lycée du Parc
PCSI 842 Année 2024-2025
DS 7

Devoir surveillé 7, sujet 2.

Chaque résultat doit être justifié, les réponses doivent être soulignées ou encadrées, vos pages (et pas vos copies) doivent être numérotées, votre nom et classe doivent être mentionnés et tout ceci doit être fait durant le temps de composition. Les étapes des éventuels calculs doivent apparaître sur la copie. On peut admettre un résultat ou une question en le précisant explicitement. La clarté et la précision de la rédaction ainsi que la présentation de la copie seront prises en compte dans l'évaluation.

Calculatrice interdite.

Exercice 1.
On considère la fonction

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^\star & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^4 + 2x^3 + x + \ln(x) \end{array} \right.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\exists!\, x_n \in \mathbb{R}_+^\star, f(x_n) = n.$$
2. Montrer que
$$x_n \sim n^{1/4}.$$
3. On pose $y_n = \dfrac{x_n}{n^{1/4}} - 1$.
   (a) Montrer que
   $$y_n \sim -\frac{1}{2n^{1/4}}.$$
   (b) En déduire que
   $$x_n = n^{1/4} - \frac{1}{2} + o(1).$$
   (c) Montrer que
   $$x_n = n^{1/4} - \frac{1}{2} + \frac{3}{8n^{1/4}} + o\left(\frac{1}{n^{1/4}}\right).$$

Exercice 2.

On rappelle que les polynômes de Tchébychev sont définis par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, T_n(\cos(x)) = \cos(nx),$$

ils vérifient $\forall n \in \mathbb{N}, T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$ et pour tout $n \geqslant 1$, le terme dominant de T_n est $2^{n-1}X^n$.

1. On définit les polynômes de Tchébychev de deuxième espèce, noté $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$, par

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_n = \frac{1}{n+1} T'_{n+1}.$$

   (a) Calculer U_0, U_1, U_2, U_3.

   (b) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, U_n(\cos(x))\sin(x) = \sin((n+1)x)$.

   (c) Montrer que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la même relation de récurrence que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   (d) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Montrer que U_n est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$ et déterminer ses racines.

   (e) En déduire la factorisation de U_n.

2. Soit $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $m \leqslant n$. On souhaite déterminer le quotient $Q_{n,m}$ et le reste $R_{n,m}$ de la division euclidienne de T_n par T_m.

   (a) Montrer que

$$T_n T_m = \frac{1}{2} T_{n+m} + \frac{1}{2} T_{n-m}.$$

   (b) On suppose ici $0 < m < n < 3m$. Montrer que

$$Q_{n,m} = 2T_{n-m} \text{ et } R_{n,m} = -T_{|n-2m|}.$$

   (c) Pour tout $p \in \mathbb{N}^\star$, déterminer $R_{(2p+1)m,m}$ et montrer que $Q_{(2p+1)m,m} = (-1)^p + 2\sum_{k=1}^{p} (-1)^{p-k} T_{2km}$.

   (d) On suppose désormais que $m > 0$ et que n n'est pas le produit de m par un entier impair. Montrer qu'il existe un unique entier $p \in \mathbb{N}^\star$ tel que $|n-2pm| < m$ et tel que

$$Q_{n,m} = 2\sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k T_{n-(2k+1)m} \text{ et } R_{n,m} = (-1)^p T_{|n-2pm|}.$$

   On pourra faire apparaître une somme télescopique

3. Soit $(m,n) \in \mathbb{N}^2$,

   (a) Exprimer $T_m \circ T_n$ en fonction de T_{nm}.

   (b) En déduire que $T_n \circ T_m = T_m \circ T_n$.

4. Soit $x \in \mathbb{R}$. On considère la fonction $f_x : t \mapsto \dfrac{1}{t^2 - 2xt + 1}$.

   (a) Montrer qu'il existe un intervalle I centré en 0 sur lequel f_x est bien définie.

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Montrer que f_x admet un DL d'ordre n en 0.

   (c) Prouver que ce DL_n en 0 est

$$f_x(t) = \sum_{k=0}^{n} U_k(x) t^k + o(t^n).$$

   Indication : $\forall t \in I, (t^2 - 2xt + 1) f_x(t) = 1$

   (d) Calculer le DL3 en 0 de $\varphi : t \mapsto \dfrac{1}{t^2 + t + 1}$ et retrouver ce résultat avec la formule précédente.

Exercice 3.

Étant donné un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et un réel a, on dit qu'une fonction réelle f définie au voisinage de a est *plate à l'ordre n* en a si $f(x)-f(a)$ est négligeable devant $(x-a)^n$ (c'est-à-dire $f(x)-f(a)=o(x-a)^n$) mais pas devant $(x-a)^{n+1}$ lorsque x tend vers a. On dit que f est ultraplate en a si $f(x)-f(a)$ est négligeable devant $(x-a)^m$ lorsque x tend vers a, quel que soit l'entier naturel m.

On note E l'ensemble des applications de classe $\mathscr{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et tout réel a, on note

$$E_n(a) = \{f \in E, f(x)-f(a) = o(x-a)^n\}.$$

1. Soit $f \in E$, $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que :

$$f \in E_n(a) \Longleftrightarrow \forall k \in [\![1,n]\!],\ f^{(k)}(a) = 0.$$

2. Montrer que, si une fonction f est ultraplate en 0, alors la fonction $x \longmapsto f(x-a)$ est ultraplate en a.
3. Soit $a \neq b$
   (a) Montrer que $\big(f \in E_n(a)$ et $f(a)=0$ et $g \in E_n(b)$ et $g(b)=0\big) \Longrightarrow fg \in E_n(a) \cap E_n(b)$
   (b) Montrer que si f est ultraplate en a et g est ultraplate en b et $f(a)=g(b)=0$, alors fg est ultraplate en a et en b.
4. Un exemple de fonction ultraplate en 0 :
   Pour tout $x>0$, on pose : $b(x) = \exp\big(-(\ln x)^2\big)$.
   (a) Donner l'allure du graphe de b.
   (b) Justifier que b est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$ et prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un polynôme $B_n \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ tel que :

$$\forall x>0,\ b^{(n)}(x) = \frac{B_n(\ln x)}{x^n}\exp(-(\ln x)^2)$$

   (on précisera le terme dominant de B_n).
   (c) En déduire que la fonction $c : x \mapsto \begin{cases} b(|x|) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est ultraplate en 0.
   (d) En quels autres points est-elle plate et à quel ordre ?
5. Construire à l'aide de la fonction c une fonction de E ultraplate à la fois en 0, en $+1$ et en -1.
6. Trouver, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'unique polynôme $P_n \in \mathbb{R}_{n+2}[X]$ vérifiant $P_n(0)=0$ et $P_n(1)=1$, et tel que la fonction polynomiale P_n appartienne à $E_n(0) \cap E_1(1)$.
7. Soit p un entier supérieur ou égal à 2, soient $a_1, \dots, a_p$ des nombres réels deux à deux distincts, soient $n_1, \dots, n_p$ des nombres entiers strictement positifs.
   On pose

$$m = p-1+\sum_{k=1}^{p} n_k. \text{ et } F = \bigcap_{k=1}^{p} E_{n_k}(a_k).$$

   (a) Montrer que $\forall (P_1,P_2) \in F^2$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda P_1 + P_2 \in F$. F est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.
   (b) Montrer que $F = \{P \in \mathbb{R}[X], \exists Q \in \mathbb{R}[X], P = Q.\prod_{k=1}^{p}(X-a_k)^{n_k+1}\}$.
   (c) Montrer que $F \oplus \mathbb{R}_m[X] = \mathbb{R}[X]$ c'est-à-dire que tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ s'écrit, de manière unique, comme la somme d'un élément de F et d'un élément de $\mathbb{R}_m[X]$.

Correction du DS n 7, sujet 2

Exercice 1

Je ne sais plus trop comment vous le dire mais je vais essayer une dernière fois. Pour montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $g(x) = n$ admet une unique solution, on peut :

— Montrer que n appartient à l'image de g (en traçant le tableau de variations de g) puis dire que n admet un antécédent unique car g est injective (pas stricte monotonie de g).

— Utiliser le TVI appliqué entre DEUX POINTS (en citant la continuité de g) pour avoir l'existence d'une solution puis dire que n admet un antécédent unique car g est injective (pas stricte monotonie de g).

— Dire que g réalise une bijection de I vers J grâce au tableau de variations et dire que, comme $n \in J$, l'équation $g(x) = n$ admet une unique solution dans I.

— Dire que $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ ET g continue donc $\mathrm{Im}(g) = \mathbb{R}$ et g est donc surjective.

On ne peut pas :

— Dire que f admet une solution ou un antécédent.

— Appliquer le TVI entre $-\infty$ et $+\infty$.

— Dire que $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ donc $\mathrm{Im}(g) = \mathbb{R}$ sans parler de continuité de g.

— parler du "corollaire du TVI".

— Donner tous les arguments en vrac et conclure " on a donc une unique solution"

12 personnes sur 42 ont rédigé correctement cette question. La dernière fois j'avais mis sur 2 points et noté de manière binaire en espérant que cela vous serve de leçon, visiblement non. Faut-il que je mette des points négatifs pour que vous fassiez enfin l'effort de rédiger correctement ce genre de questions?

1. La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^\star$ et $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$ donc f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^\star$ vers $\mathbb{R}$, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, n admet un unique antécédent par f. On a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\exists! x_n \in \mathbb{R}_+^\star, f(x_n) = n.$$

2. On commence par montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Soit $n \in \mathbb{N}$, alors $f(x_{n+1}) > f(x_n)$ et f est strictement croissante donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Elle admet, par conséquent, une limite. Si celle-ci était réelle, notée ℓ, on aurait, par unicité de la limite $\ell^4 + 3\ell^3 + \ell + \ln\ell = +\infty$ ce qui est une contradiction donc x_n tend vers $+\infty$. On a alors
$$1 + \frac{2}{x_n} + \frac{1}{x_n^3} + \frac{\ln(x_n)}{x_n} = \frac{n}{x_n^4}.$$
Par le théorème de croissance comparée, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln(x_n)}{x_n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{x_n^4} = 1$. On a donc $x_n^4 \sim n$ puis
$$x_n \sim n^{1/4}.$$
La plupart a vu qu'il fallait que x_n tende vers $+\infty$ pour avoir l'équivalent, pourquoi ne pas l'avoir montré?

3. On pose $y_n = \frac{x_n}{n^{1/4}} - 1$.

(a) On écrit

$$x_n^4 + 2x_n^3 + x_n + \ln(x_n) = n,$$

puis

$$\frac{x_n^4}{n} - 1 = -2\frac{x_n^3}{n} - \frac{x_n}{n} - \frac{\ln(x_n)}{n}.$$

On sait que $x_n \sim n^{1/4}$ donc $-2\frac{x_n^3}{n} - \frac{x_n}{n} - \frac{\ln(x_n)}{n} \sim -2\frac{x_n^3}{n} \sim -\frac{2}{n^{1/4}}$. Par ailleurs,

$$\frac{x_n^4}{n} - 1 = \left(1 + y_n\right)^4 - 1 \sim 4y_n \text{ car } y_n \to 0.$$

On a donc $4y_n \sim -\frac{2}{n^{1/4}}$ donc

$$y_n \sim -\frac{1}{2n^{1/4}}.$$

(b) On a $y_n = -\frac{1}{2n^{1/4}} + o\left(\frac{1}{n^{1/4}}\right)$ donc

$$\frac{x_n}{n^{1/4}} = 1 - \frac{1}{2n^{1/4}} + o\left(\frac{1}{n^{1/4}}\right).$$

On en déduit que

$$x_n = n^{1/4} - \frac{1}{2} + o(1).$$

(c) On écrit

$$x_n^4\left(1 + \frac{2}{x_n} + \frac{1}{x_n^3} + \frac{\ln(x_n)}{x_n}\right) = n,$$

d'où

$$x_n^4 = \frac{n}{1 + 2/x_n + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)},$$

car $\frac{1}{x_n^3} \sim \frac{1}{n^{3/4}}$ et $\frac{\ln(x_n)}{x_n^3} = o\left(\frac{1}{x_n^2}\right)$, par croissances comparées. On a également

$$1 + 2/x_n + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 1 + \frac{2}{n^{1/4}}\frac{1}{1 - \frac{1}{2n^{1/4}} + o\left(\frac{1}{n^{1/4}}\right)} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 1 + \frac{2}{n^{1/4}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

On a donc

$$\begin{aligned}
x_n &= n^{1/4}\left(\frac{1}{1 + 2/x_n + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}\right)^{1/4}\\
&= n^{1/4}\left(\frac{1}{1 + \frac{2}{n^{1/4}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}\right)^{1/4}\\
&= n^{1/4}\left(1 - \frac{1}{4}\left(\frac{2}{n^{1/4}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) + \frac{5}{32}\left(1 + \frac{2}{n^{1/4}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)^2\right)\\
&= n^{1/4}\left(1 - \frac{1}{2n^{1/4}} - \frac{1}{4\sqrt{n}} + \frac{5}{8\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)\\
&= n^{1/4} - \frac{1}{2} + \frac{3}{8n^{1/4}} + o\left(\frac{1}{n^{1/4}}\right)
\end{aligned}$$

On a bien montré que

$$x_n = n^{1/4} - \frac{1}{2} + \frac{3}{8n^{1/4}} + o\left(\frac{1}{n^{1/4}}\right).$$

Exercice 2 1. (a) On a $T_0 = 1$, $T_1 = X$, $T_2 = 2X^2 - 1$, $T_3 = 4X^3 - 3X$ et $T_4 = 8X^4 - 8X^2 + 1$ donc $U_0 = 1, U_1 = 2X, U_2 = 4X^2 - 1$ et $U_3 = 8X^3 - 4X$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait que $\forall x \in \mathbb{R}, T_{n+1}(\cos(x)) = \cos((n+1)x)$ donc, en dérivant par rapport à x, on obtient $-\sin(x)T'_{n+1}(\cos(x)) = -(n+1)\sin((n+1)x)$ d'où, en divisant par $-(n+1)$, $\sin(x)U_n(\cos x) = \sin\left((n+1)x\right)$.

(c) Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\begin{aligned}
\sin(x)U_{n+2}(\cos x) + \sin(x)U_n(\cos x) &= \sin((n+3)x) + \sin((n+1)x)\\
&= \sin\left((n+2)x + x\right) + \sin\left((n+2)x - x\right)\\
&= 2\sin((n+2)x)\cos x\\
&= 2\cos(x)\sin(x)U_{n+1}(\cos x)
\end{aligned}$$

On a donc, pour tout x non congru à 0 modulo π,

$$U_n(\cos x) + U_{n+2}(\cos x) = 2\cos(x)U_{n+1}(\cos x).$$

On a donc $\forall y \in]-1, 1[$,

$$U_n(y) + U_{n+2}(y) = 2yU_{n+1}(y).$$

On en déduit que le polynôme $U_{n+2} + U_n - 2XU_{n+1}$ admet une infinité de racines, il est donc nul. En conséquence, on a bien

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+2} = 2XU_{n+1} - U_n$$

(d) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On commence par chercher les racines de U_n dans $]-1, 1[$, on peut donc les chercher sous la forme $\cos(x)$ avec x non congru à 0 modulo π. On a

$$\begin{aligned}
U_n(\cos(x)) = 0 &\Leftrightarrow \sin(x)U_n(\cos x) = 0 \text{ car } \sin(x) \neq 0\\
&\Leftrightarrow \sin((n+1)x) = 0\\
&\Leftrightarrow (n+1)x \equiv 0[\pi]\\
&\Leftrightarrow x \equiv 0\left[\frac{\pi}{n+1}\right]\\
&\Leftrightarrow \exists k \in [\![0, n]\!], x = \frac{k\pi}{n+1}\\
&\Leftrightarrow \exists k \in [\![1, n]\!], x = \frac{k\pi}{n+1} \text{ car } x \text{ non congru à 0 modulo } \pi
\end{aligned}$$

On en déduit que $\forall k \in [\![1, n]\!], \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$ est racine de U_n. Or, pour tout $k \in [\![1, n]\!], \frac{k\pi}{n+1} \in]0, \pi[$, intervalle sur lequel cos est injectif. On en déduit que les n racines trouvées sont distinctes. On a trouvé n racines distinctes de U_n. Or U_n est de degré n puisque T_{n+1} est de degré $n+1$, on a donc trouvé toutes ses racines, on en déduit que U_n est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$.

J'avais insisté dans le DM sur les arguments nécessaires pour bien justifier cette question.

(e) On sait que T_{n+1} a pour coefficient dominant 2^n donc T'_{n+1} a pour coefficient dominant $2^n(n+1)$ et U_n a pour coefficient dominant 2^n, la factorisation de U_n est donc

$$U_n(X) = 2^n \prod_{k=1}^{n} \left(X - \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)\right).$$

Comment pouvez-vous vous tromper en calculant le coefficient dominant de U_n ?

2. Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^2$.

(a) On veut montrer que le polynôme $2T_nT_m - T_{n+m} - T_{n-m}$ est nul. On l'évalue en $\cos(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$:

$$2\cos(nx)\cos(mx) - \cos((n+m)x) - \cos((n-m)x) = 0.$$

On en déduit que ce polynôme a une infinité de racines, à savoir tous les réels entre -1 et 1, il est donc nul et on a bien l'égalité souhaitée.
On note $Q_{n,m}$ et $R_{n,m}$ le quotient et le reste de la division euclidienne de T_n par T_m.

(b) On suppose ici $0 < m < n < 3m$. Montrons que

$$Q_{n,m} = 2T_{n-m} \text{ et } R_{n,m} = -T_{|n-2m|}.$$

On applique la question précédente au couple $(n-m, m)$ si $m \leqslant n-m$, on obtient :

$$2T_mT_{n-m} = T_n + T_{n-2m}.$$

Si $m \geqslant n-m$, on l'applique au couple $(m, n-m)$:

$$2T_mT_{n-m} = T_n + T_{2m-n}.$$

Dans tous les cas, on a

$$2T_mT_{n-m} = T_n + T_{|n-2m|},$$

donc

$$T_n = 2T_{n-m}T_m - T_{|n-2m|}.$$

Or, par hypothèse $n-2m < m$ et $2m-n < m$ donc $\deg T_{|n-2m|} < m$, on a donc écrit la division euclidienne de T_n par T_m. Par unicité, on a $Q_{n,m} = 2T_{n-m}$ et $R_{n,m} = -T_{|n-2m|}$.
La division euclidienne de A par B c'est $A = BQ + R$ ET $\deg(R) < \deg(B)$. Si vous ne vérifiez pas le degré, vous n'avez pas unicité.

(c) On commence par regarder ce qu'il se passe pour $p = 1$.
On a $2T_mT_{2m} = T_m + T_{3m}$ donc $T_{3m} = (2T_{2m} - 1)\,T_m$, ainsi $R_{3m,m} = 0$ et $Q_{3m,m} = 2T_{2m} - 1$. On va montrer, par récurrence sur p que " $Q_{(2p+1)m,m} = (-1)^p + 2\sum_{k=1}^{p}(-1)^{p-k}T_{2km}$ et $R_{(2p+1)m,m} = 0$".

L'initialisation pour $p = 1$ a déjà été faite. Soit p tel que $Q_{(2p+1)m,m} = (-1)^p + 2\sum_{k=1}^{p}(-1)^{p-k}T_{2km}$ et $R_{(2p+1)m,m} = 0$. On écrit ensuite

$$2T_mT_{(2p+2)m} = T_{(2p+3)m} + T_{(2p+1)m},$$

donc

$$T_{(2p+3)m} = 2T_mT_{(2p+2)m} - T_{(2p+1)m} = \left(2T_{(2p+2)m} - Q_{(2p+1)m}\right)T_m,$$

par hypothèse de récurrence. On en déduit que le reste $R_{(2p+3)m,m}$ est nul et que le quotient vérifie

$$\begin{aligned}
Q_{(2p+3)m,m} &= 2T_{(2p+2)m} - Q_{(2p+1)m,m}\\
&= 2T_{(2p+2)m} - (-1)^p - 2\sum_{k=1}^{p}(-1)^{p-k}T_{2km} \text{ par hypothèse de récurrence}\\
&= (-1)^{p+1} + 2T_{(2p+2)m} + 2\sum_{k=1}^{p}(-1)^{p+1-k}T_{2km}\\
&= (-1)^{p+1} + 2\sum_{k=1}^{p+1}(-1)^{p+1-k}T_{2km}
\end{aligned}$$

La propriété est héréditaire. Par le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier p.

(d) On suppose désormais que $m>0$ et que n n'est pas le produit de m par un entier impair. Montrons qu'il existe un unique entier $p\in\mathbb{N}^\star$ tel que $\left|n-2pm\right|<m$ et tel que

$$Q_{n,m}=2\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k T_{n-(2k+1)m} \text{ et } R_{n,m}=(-1)^p T_{|n-2pm|}.$$

Commençons par montrer l'existence de p. On veut $-m<n-2pm<m$ ou encore $(2p-1)m<n<2p+1$. On sait que $\dfrac{n}{m}$ n'est pas un entier impair, il est donc strictement compris entre deux entiers impairs "consécutifs", c'est-à-dire entre a et $a+2$ avec a impair. Si on note p tel que $a=2p-1$, on a bien l'existence de p.

On peut aussi l'expliciter avec la partie entière. Pour cela, on remarque que p vaut

— $\dfrac{1}{2}\left\lfloor\dfrac{n}{m}\right\rfloor$ si $\left\lfloor\dfrac{n}{m}\right\rfloor$ est pair,

— $\dfrac{1}{2}\left(\left\lfloor\dfrac{n}{m}\right\rfloor+1\right)$ si $\left\lfloor\dfrac{n}{m}\right\rfloor$ est impair.

On a donc $p=\left\lfloor\dfrac{1}{2}\left(\left\lfloor\dfrac{n}{m}\right\rfloor+1\right)\right\rfloor$.

Montrons maintenant que

$$Q_{n,m}=2\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k T_{n-(2k+1)m} \text{ et } R_{n,m}=(-1)^p T_{|n-2pm|},$$

autrement dit, que

$$T_n=2T_m\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k T_{n-(2k+1)m}+(-1)^p T_{|n-2pm|}.$$

On sait que pour tout $k\in[\![0,p-1]\!]$, on a

$$2T_mT_{n-(2k+1)m}=T_{n-2km}+T_{n-(2k+2)m},$$

donc

$$\forall k\in[\![0,p-1]\!],(-1)^k2T_mT_{n-(2k+1)m}=(-1)^kT_{n-2km}+(-1)^kT_{n-(2k+2)m},$$

ou encore

$$\forall k\in[\![0,p-1]\!],(-1)^k2T_mT_{n-(2k+1)m}=(-1)^kT_{n-2km}-(-1)^{k+1}T_{n-(2k+2)m}.$$

On somme ces égalités pour k variant de 0 à $p-1$. On obtient, en reconnaissant une somme télescopique :

$$2T_m\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^kT_{n-(2k+1)m}=T_n-(-1)^pT_{n-2pm}.$$

On a donc

$$T_n=2T_m\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^kT_{n-(2k+1)m}+(-1)^pT_{n-2pm},$$

et $\deg\left((-1)^pT_{n-2pm}\right)=n-2m<m$ donc on a écrit la division euclidienne de T_n par T_m. On a donc

$$Q_{n,m}=2\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^kT_{n-(2k+1)m} \text{ et } R_{n,m}=(-1)^pT_{n-2pm}.$$

3. Soit $(m,n)\in\mathbb{N}^2$,

(a) soit $x\in\mathbb{R}$, alors

$$T_m\circ T_n(\cos x)=T_m(\cos(nx))=\cos((nm)x)=T_{mn}(\cos x).$$

On en déduit que le polynôme $T_m\circ T_n-T_{mn}$ admet une infinité de racines, il est donc nul.

(b) On a $T_n \circ T_m = T_{nm} = T_m \circ T_n$.

4. Soit $x \in \mathbb{R}$. On considère la fonction $f_x : t \mapsto \dfrac{1}{t^2 - 2xt + 1}$.

(a) Le polynôme $t^2 - 2xt + 1$ admet au plus deux racines réelles non nulles (car 0 n'est pas racine). En prenant η le minimum de la valeur absolue de ces racines (si elles existent, sinon f_x est définie sur tout $\mathbb{R}$), on a f_x définie sur $]-\eta, \eta[$. Il existe donc bien un intervalle I centré en 0 sur lequel f_x est bien définie. On peut aussi dire que $t \mapsto t^2 - 2x + 1$ est continue et vaut 1 en 0 donc elle admet un intervalle centré en 0 où elle ne s'annule pas (bravo Eliot).

Beaucoup ont perdu du temps sur cette question en faisant une disjonction de cas selon le signe de Δ. J'en ai vu aussi qui me parle de $\sqrt{x^2 - 1}$ sans se soucier de prendre la racine carrée d'un nombre négatif.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. La fonction f_x est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I donc elle admet un DL d'ordre n en 0 qui appartient à I.

(c) On veut montrer que ce DL_n en 0 est

$$f_x(t) = \sum_{k=0}^{n} U_k(x) + o(t^n).$$

Il faut, pour cela, montrer que $\forall k \in [\![0, n]\!], f_x^{(k)}(0) = k! U_k(x)$. On raisonne par récurrence double sur k. Pour $k = 0$, on a $f_x(0) = 1 = 0! U_0(x)$. pour $k = 1$, on a $f_x'(0) = 2x = 1! U_1(x)$
Soit maintenant $k \geqslant 0$ tel que $f_x^{(k)}(0) = k! U_k(x)$ et $f_x^{(k+1)}(0) = (k+1)! U_{k+1}(x)$. On sait que pour tout $t \in I, (t^2 - 2xt + 1) f_x(t) = 1$. En posant $g : t \mapsto t^2 - 2xt + 1$, on a donc, par la formule de Leibniz,

$$\sum_{j=0}^{k+2} \binom{k+2}{j} g^{(j)} f_x^{k+2-j} = 0,$$

donc

$$\forall t \in I, g(t) f_x^{(k+2)}(t) + (k+2) g'(t) f_x^{(k+1)} + \frac{(k+2)(k+1)}{2} g^{(2)}(t) f_x^{(k)}(t) = 0,$$

car $g^{(j)} = 0 \forall j \geqslant 3$. Pour $t = 0$, on obtient :

$$f_x^{(k+2)}(0) - 2(k+2) x f_x^{(k+1)}(0) + (k+2)(k+1) f_x^{(k)}(0) = 0,$$

donc, par hypothèse de récurrence

$$\begin{aligned} f_x^{(k+2)}(0) &= 2(k+2)x(k+1)! U_{k+1}(x) - (k+2)(k+1) k! U_k(x) \\ &= (k+2)! (2x U_{k+1}(x) - U_k(x)) \\ &= (k+2)! U_{k+2}(x) \end{aligned}$$

La propriété est bien héréditaire. Par le principe de récurrence double, on a montré que $\forall k \in [\![0, n]\!], f_x^{(k)}(0) = k! U_k(x)$, le DL d'ordre n de f_x en 0 est bien

$$f_x(t) = \sum_{k=0}^{n} U_k(x) + o(t^n).$$

Je pensais que certains y arriveraient car ça ressemblait à un exo fait ensemble (quand on cherche à exprimer les dérivées d'ordre n, $n+1$ et $n+2$ de arctan

(d) Déterminons le DL3 en 0 de $\varphi : t \mapsto \dfrac{1}{t^2 + t + 1}$. On a

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 + t + t^2} &= 1 - (t + t^2) + (t + t^2)^2 - (t + t^2)^3 + o(t^3) \\ &= 1 - t - t^2 + t^2 + 2t^3 - t^3 + o(t^3) \\ &= 1 - t + t^3 + o(t^3) \end{aligned}$$

Par ailleurs, d'après la question précédente, on a

$$\varphi(t) = f_{-1/2}(t) = \sum_{k=0}^{3} U_k\left(-\frac{1}{2}\right) t^k + o(t^3).$$

$U_0 = 1, U_1\left(-\frac{1}{2}\right) = -1, U_2\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$ et $U_3\left(-\frac{1}{2}\right) = 1$ d'où

$$\varphi(t) = 1 - t + t^3 + o(t^3).$$

On retrouve bien le même DL3 en 0.

Exercice 3 1. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^n$ donc d'après Taylor-Young on a le développement limité :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o\big((x-a)^n\big)$$

or on a : $f \in E_n(a) \Longleftrightarrow f(x) - f(a) \underset{x\to a}{=} o\left((x-a)^n\right) \Longleftrightarrow f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + \sum_{k=1}^{n} 0.(x-a)^k + o\left((x-a)^n\right)$

Par unicité du développement limité : $\boxed{f \in E_n(a) \Longleftrightarrow \forall k \in [\![1,n]\!],\ f^{(k)}(a) = 0}$

2. Soit $a \neq b$ dans $\mathbb{R}$, soit f et g deux fonctions telles que $f \in E_n(a)$ et $f(a) = 0$ et $g \in E_n(b)$ et $g(b) = 0$
On a donc $f(x) = o(x-a)^n$ et $g(x) = o(x-b)^n$ donc $f(x)g(x) = o(x-a)^n$ et $g(x)f(x) = o(x-b)^n$ c'est-à-dire

$$f(x)g(x) - f(a)g(a) = o(x-a)^n \text{ et } f(x)g(x) - f(b)g(b) = o(x-b)^n.$$

On a bien

$$fg \in E_n(a) \cap E_n(b).$$

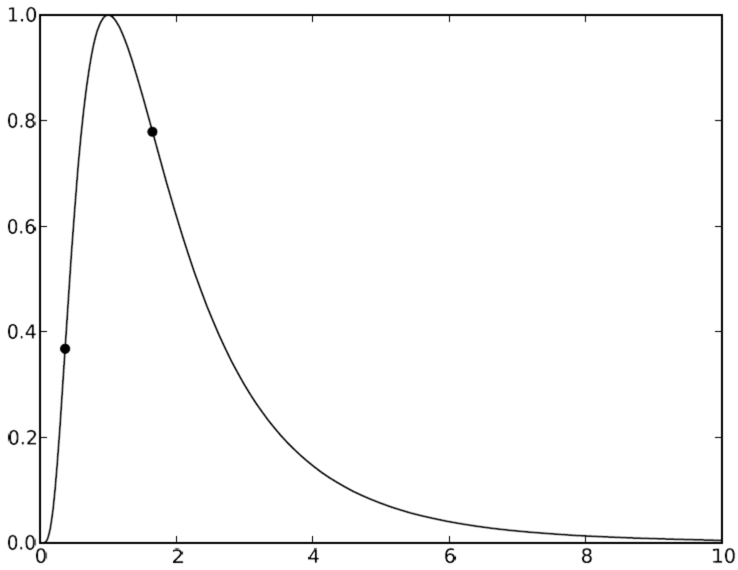
On peut aussi dire que, d'après la première question, on a $\forall k \in [\![1,n]\!], f^{(k)}(a) = 0 = g^{(k)}(b)$ et $f(a) = g(b) = 0$. D'après la formule de Leibniz, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $j \in \mathbb{N}$.

$$(fg)^{(j)}(x) = \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} f^{(k)}(x) g^{(j-k)}(x).$$

Soit $j \in [\![1,n]\!]$, alors pour tout $k \in [\![0,j]\!]$, on a $f^{(k)}(a) = 0$ donc $(fg)^{(j)}(a) = 0$. D'après la première question, on a donc $fg \in E_n(a)$. De même, pour tout $j \in [\![1,n]\!]$ et tout $k \in [\![0,j]\!]$, on a $j-k \in [\![0,j]\!]$ donc $j-k \in [\![0,n]\!]$ donc $g^{(j-k)}(b) = 0$ et $(fg)^{(j)}(b) = 0$. On en déduit que $fg \in E_n(b)$. On a bien $(fg) \in E_n(a) \cap E_n(b)$.

3. Soit $a \neq b$
   (a) Soit f et g ultraplate respectivement en a et en b et telles que $f(a) = g(b) = 0$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f \in E_n(a)$ et $g \in E_n(b)$ et $f(a) = g(b) = 0$. D'après la question précédente, on a $fg \in E_n(a) \cap E_n(b)$. Ceci étant valable pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a montré que si f (respectivement g) est ultraplate en a (respectivement b) telle que $f(a) = 0$ (respectivement $g(b)$), alors $f \times g$ est ultraplate en a (respectivement en b)

4. Un exemple de fonction ultraplate en 0
   (a) La fonction b est de classe $\mathscr{C}^\infty$ par théorème généraux.
   Soit $x > 0$. On a $b'(x) = \dfrac{-2\ln(x)b(x)}{x}$ qui est du signe de $(1-x)$ car $b(x) > 0$
   $\boxed{\text{La fonction } b \text{ est croissante sur }]0,1] \text{ et décroissante sur } [1,+\infty[}$ et
   $\boxed{\text{la courbe de } b \text{ admet une tangente horizontale au point de coordonnées : } (1,1)}$



(b) Les fonction ln et exp sont $\mathscr{C}^\infty$ sur leurs ensembles de définition
par produit et composition $\boxed{b \text{ est de classe } \mathscr{C}^\infty \text{ sur }]0,+\infty[}$
On va montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: il existe un polynôme $B_n \in \mathbb{R}[X]$ de terme dominant $(-2)^n X^n$ tel que :

$$\forall x > 0,\ b^{(n)}(x) = \frac{B_n(\ln x)}{x^n} \exp(-(\ln x)^2)$$

<u>Initialisation :</u> En prenant $B_0 = 2^0 X^0$, on a bien : $\forall x > 0,\ b^{(0)}(x) = b(x) = \dfrac{B_0(\ln x)}{x^0} \exp(-(\ln x)^2)$
<u>Hérédité :</u> Soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'il existe $B_n \in \mathbb{R}[X]$ de terme dominant $(-2)^n X^n$ tel que :

$$\forall x > 0,\ b^{(n)}(x) = \frac{B_n(\ln x)}{x^n} \exp(-(\ln x)^2)$$

Soit $x > 0$. On a

$$b^{(n+1)}(x) = \frac{B_n'(\ln x)}{x^{n+1}} \exp(-(\ln x)^2) - \frac{nB_n(\ln x)}{x^{n+1}} \exp(-(\ln x)^2) - \frac{2\ln(x) B_n(\ln x)}{x^{n+1}} \exp(-(\ln x)^2)$$

En posant $B_{n+1} = -2XB_n - nB_n + B_n'$, on a $\forall x > 0,\ b^{(n+1)}(x) = \dfrac{B_{n+1}(\ln x)}{x^{n+1}} \exp(-(\ln x)^2)$
De plus on a $\deg B_n = n$ donc $\deg(-2XB_n) = n+1$ et $\deg(-nB_n + B_n') \leqslant n$
Ainsi le terme dominant de B_{n+1} est $-2X \cdot (-2)^n X^n = (-2)^{n+1} X^{n+1}$
<u>Conclusion :</u> On a montré par récurrence que : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un polynôme

$$\boxed{B_n \in \mathbb{R}[X] \text{ de terme dominant } (-2)^n X^n \text{ tel que : } \forall x > 0,\ b^{(n)}(x) = \frac{B_n(\ln x)}{x^n} \exp(-(\ln x)^2)}$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ quand $x \longrightarrow 0^+$, on a $\ln(x) \to -\infty$
donc $\left|b^{(n)}(x)\right| \sim \left(\dfrac{2|\ln x|}{x}\right)^n \exp(-\ln(x)^2)$
Or $\left(\dfrac{2|\ln x|}{x}\right)^n \exp(-\ln(x)^2) = \exp\left(-\ln(x)^2 - n\ln(x) + n\ln(\ln x) + n\ln(2)\right)$
et $\lim\limits_{u \to -\infty} -u^2 - nu + n\ln(u) + n\ln(2) = -\infty$
donc $\exp\left(-\ln(x)^2 - n\ln(x) + n\ln(\ln x) + n\ln(2)\right) \to 0$
donc $\lim\limits_{x \to 0^+} b^{(n)}(x) = 0$

donc $\lim_{x \to 0^+} c^{(n)}(x) = 0$ car b et c coïncident sur $]0, +\infty[$.

La fonction b est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ et $\lim_{x \to 0} b(x) = 0$.

La fonction c est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ et continue sur $\mathbb{R}$. En particulier, elle est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^\star$. On a $\lim_{x \to 0} c'(x) = 0$ donc, par le thm de la limite de la dérivée, la fonction c est de classe C^1.

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ tel que c est de classe $\mathscr{C}^n$ sur $\mathbb{R}$. On a $c^{(n)}$ continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}^\star$ et $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} c^{(n+1)}(x) = 0$ donc, par le théorème de la limite de la dérivée, $c^{(n)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$\boxed{\text{la fonction } c \text{ est donc de classe } \mathscr{C}^{n+1} \text{ sur } \mathbb{R}.}$

Par récurrence sur n, on a montré que c'est vrai pour tout entier n. On a donc montré que $\boxed{\text{la fonction } c \text{ est de classe } \mathscr{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}.}$

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $c^{(n)}(0) = 0$ donc $\boxed{\text{la fonction } c \text{ est ultraplate en } 0}$

Je crois qu'il n'y a qu'une personne qui m'a parlé de thm de la limite de la dérivée.

(d) Analyse : Soit $a \in \mathbb{R}^*$ tel que c soit plate en a à l'ordre $n \in \mathbb{N}^*$

alors $c'(a) = 0$ donc $b'(|a|) = 0$ car $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $|c'(x)| = |b'(|x|)|$

donc $|a| = 1$ donc $a = 1$ ou $a = -1$

Synthèse : On a $b'(1) = b'(-1) = 0$

De plus $b''(1) \neq 0$ donc $c''(1) \neq 0$ et $c''(-1) \neq 0$

$\boxed{\text{Les seuls points non nuls en lesquels } c \text{ est plate, sont } 1 \text{ et } -1 \text{ à l'ordre } 1}$

On a $c(0) = 0$ et c est ultraplate en 0 d'après 4c.

On pose $f : x \mapsto c(x-1)$ et $g : x \mapsto c(x+1)$ de sorte que f (respectivement g) est ultraplate en 1 (respectivement -1) tel que $f(1) = 0$ (respectivement $g(-1) = 0$)

donc $f \times g$ est ultraplate en 1 et en -1 et s'annule en 1 et en -1

On applique à nouveau cette propriété avec c et $f \times g$ pour obtenir :

$\boxed{\text{la fonction } x \mapsto c(x-1)c(x+1)c(x) \text{ de } E \text{ est ultraplate à la fois en } 0, \text{ en } +1 \text{ et en } -1}$

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Analyse : Soit $P_n \in \mathbb{R}_{n+2}[X]$ vérifiant $P_n(0) = 0$ et $P_n(1) = 1$, et tel que la fonction polynomiale P_n appartienne à $E_n(0) \cap E_1(1)$.

On a donc 0 est racine de P_n d'ordre au moins $n+1$ donc $X^{n+1} | P_n$

comme $\deg P_n \leqslant n+2$, on peut trouver $A, B \in \mathbb{R}$ tels que $P_n = X^{n+1}(AX + B)$

de plus $P_n(1) = 1$ donc $A + B = 1$ et $P'_n = (n+1)X^n(AX+B) + AX^{n+1}$ donc $P'_n(1) = 0 = n+1+A$

donc $A = -n-1$ et $B = n+2$ donc $P_n = X^{n+1}(n+2-(n+1)X)$ ce qui donne l'unicité

Synthèse : On considère $Q = X^{n+1}(n+2-(n+1)X)$

On a $X^{n+1} | Q$ donc $Q(0) = 0$ et $Q \in E_n(0)$

On a $Q(1) = 1$ et $Q' = (n+1)X^n(n+2-(n+1)X) - (n+1)X^{n+1}$ donc $Q'(1) = n+1-n-1 = 0$

Ce qui valide l'existence

Conclusion :

$$\boxed{\begin{array}{c} P_n = X^{n+1}(n+2-(n+1)X) \in \mathbb{R}_{n+2}[X] \text{ est l'unique polynôme vérifiant :} \\ P_n(0) = 0,\ P_n(1) = 1 \text{ et la fonction polynomiale } P_n \text{ appartienne à } E_n(0) \cap E_1(1) \end{array}}$$

6. (a) À l'aide de la linéarité de la dérivation, on vérifie facilement que pour tout $(P, Q) \in F^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\lambda P + Q \in E$$

(b) Soit $P \in F$, alors pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, a_k est racine de P de multiplicité au moins n_k+1. Les a_i étant distincts, on en déduit que le polynôme $\prod_{=k}^{1} p(X-a_k)^{n_k+1}$ divise P. Il existe donc bien $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = Q\prod_{k=1}^{p}(X-a_k)^{n_k+1}$.

Réciproquement, s'il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = Q\prod_{k=1}^{p}(X-a_k)^{n_k+1}$, alors pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, on a a_k racine de P de multiplicité au moins n_k+1. Cela implique que pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, $P^{(j)}(a_k) = 0$ pour tout $j \in [\![0,n_k]\!]$ donc $P \in F$. On a montré l'égalité des deux ensembles par double inclusion.

(c) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On effectue la division euclidienne de P par $\prod_{k=1}^{p}(X-a_k)^{n_k+1}$: il existe $(Q,R) \in \mathbb{R}[X]^2$ tel que

$$P = Q\prod_{k=1}^{p}(X-a_k)^{n_k+1} + R,$$

avec $Q\prod_{k=1}^{p}(X-a_k)^{n_k+1} \in F$ d'après la question précédente et $\deg(R) < \deg\left(\prod_{k=1}^{p}(X-a_k)^{n_k+1}\right)$. Or $\deg\left(\prod_{k=1}^{p}(X-a_k)^{n_k+1}\right) = \sum_{k=1}^{p}(n_k+1) = p + \sum_{k=1}^{p} n_k = m+1$. On a donc bien $R \in \mathbb{R}_m[X]$. Par ailleurs, par unicité de la division euclidienne, cette écriture est unique donc

$$R[X] \subset F \bigoplus \mathbb{R}_m[X].$$

L'autre inclusion était claire, on a bien l'égalité.

Il fallait avoir remarqué qu'il y avait un lien avec les racines multiples... ce que peu ont vu