TD 18: Applications linéaires.

Exercice 1.
Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que, $\forall x \in E, \exists \lambda_x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \lambda_x x$. Montrer que f est une homothétie.

Exercice 2.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et x_0 tel que $f^{n-1}(x_0) \neq 0_E$. Montrer que la famille $\left(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0)\right)$ est libre.

1 Détermination linéarité/noyau/image

Exercice 3.
Les applications suivantes sont-elles linéaires?

$$\varphi_1 : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{K}^2 & \to & \mathbb{K} \\ (x,y) & \mapsto & xy \end{array} \right. \qquad \varphi_2 : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x+1 \end{array} \right.$$

$$\varphi_3 \left\{ \begin{array}{lcl} C(\mathbb{R},\mathbb{C}) & \to & \mathbb{R}^2 \\ f & \mapsto & (\mathcal{R}e(f(0)), |f(1)|) \end{array} \right. \qquad \varphi_4 : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{K}[X] & \to & \mathbb{K} \\ P & \mapsto & P(0) + P'(1) \end{array} \right.$$

$$\varphi_5 : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right. \qquad \varphi_6 : \left\{ \begin{array}{l} C(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ f \mapsto f(1/4) - \int_1^2 f(t)dt \end{array} \right.$$

$$\varphi_7 : \left\{ \begin{array}{l} C(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ f \mapsto f(3/4) + f(5) \end{array} \right. \qquad \varphi_8 : \left\{ \begin{array}{l} C(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f \mapsto \left(t \mapsto \dfrac{f(t)}{t^2+1} \right) \end{array} \right.$$

Exercice 4.
Dire si les applications suivantes sont des applications linéaires et déterminer leur noyau et leur image quand elles le sont.

1. $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 2x^2$.
2. $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 4x - 3$.
3. $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{x^2}$.
4. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto 3x + 5y$.
5. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto \sqrt{3x^2 + 5y^2}$.
6. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto \sin(3x + 5y)$.
7. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x,y) \mapsto (-x, y)$.
8. $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) : f \mapsto f'$.
9. $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 : x \mapsto (2x, x/\pi, x\sqrt{2})$.
10. $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \ln(3^{x\sqrt{2}})$.

Exercice 5.

Soit $f : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X] \\ P \mapsto P - XP' \end{array} \right.$. Montrer que l'application est linéaire et déterminer son noyau et son image.

Exercice 6.
Montrer que l'application $f : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto & P - XP' - P(0) \end{array} \right.$ est linéaire. Déterminer son noyau et son image.

Exercice 7.
Montrer que l'application $f : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & \int_0^1 P(t)dt \end{array} \right.$ est linéaire et déterminer son noyau et son image.

Exercice 8.
On considère la trace $\mathrm{Tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$. Déterminer son noyau et son image. On donnera une base de ces ensembles et leur dimension.

2 Injectivité/surjectivité/bijectivité

Exercice 9.
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$. On considère l'application $P \mapsto P - P'$. Montrer que c'est un automorphisme et déterminer son inverse.

Exercice 10.
Soit $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & P + P' \end{array} \right.$. Montrer que φ est linéaire. Est-elle bijective?

Exercice 11.
Soient $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & f + f' \end{array} \right.$. L'application est-elle injective? surjective?

Exercice 12.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $f \in (E)$ tel que $f^n = 0_{(E)}$ et $g = id_E - f$. Montrer que g est bijective et donner son inverse.

Exercice 13.
Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension $n \geqslant 2$. On considère $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ f = -\mathrm{Id}_E$. Soit a un vecteur non nul de E.

1. Montrer que f est un automorphisme.
2. Montrer que la famille $(a, f(a))$ est libre.
   On pose $G_a = \mathrm{Vect}(a, f(a))$.

3. Montrer que G_a est stable par f (c-à-d que $\forall x \in G_a,\ f(x) \in G_a$).
4. Montrer que si un sev F stable par f contient a, alors $G_a \subset F$.
5. Si $E = \mathbb{R}^2$, donner un exemple d'endomorphisme f qui vérifie l'hypothèse de l'énoncé.

Exercice 14.
On considère l'application $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^{\mathbb{N}} & \to & \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & (u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}} \end{array}$

1. Démontrer que l'application φ est $\mathbb{C}$-linéaire.
2. Déterminer $\mathrm{Ker}(\varphi)$.
3. Démontrer que φ est surjective. L'application φ est-elle un automorphisme ?

3 Relations entre noyau et image

Exercice 15.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que

$$E = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker}(f) \Leftrightarrow \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f \circ f)$$

$$\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0_E\} \Leftrightarrow \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f \circ f)$$

Exercice 16.
Soit E un $\mathbb{K}$-ev, $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$ sont stables par g.

Exercice 17.
E et F sont des $\mathbb{K}$-ev, $(u, v) \in \mathcal{L}(E, F)^2$. Comparer (au sens de l'inclusion) :

1. $\ker(u) \cap \ker(v)$ et $\ker(u + v)$.
2. $\mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v)$ et $\mathrm{Im}(u + v)$.

4 Projection

Exercice 18.
On pose $F = \{P \in \mathbb{R}[X], P(0) = P(1) = 0\}$ et $G = \mathrm{Vect}\left(X^2 + X, X^3 + 1\right)$. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}[X]$ et déterminer le projeté de $X^5 - X^3 + 1$ sur F parallèlement à G.

Exercice 19.
Soit E un $\mathbb{K}$-ev, p et q des projecteurs de E tels que $p \circ q = 0_{\mathcal{L}(\mathcal{E})}$.

1. Montrer que $r = p + q - q \circ p$ est un projecteur.
2. Montrer que

$$\mathrm{Ker}(r) = \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q) \text{ et } \mathrm{Im}(r) = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Im}(q)$$

5 Si besoin d'encore un peu d'entrainement

Exercice 20.
Dire si les applications suivantes sont des applications linéaires et déterminer leur noyau et leur image quand elles le sont.

1. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \frac{x^2 y}{x^2+y^2}$ si $x^2 + y^2 \neq 0$ et0 sinon.
2. $\mathcal{C}(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) : f \mapsto \{x \mapsto e^{-x} \int_0^1 f(t)\, dt\}$.
3. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}(x, y) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
4. $\mathcal{C}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} : f \mapsto \max_{t\in[0,1]} f(t)$.
5. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto$ la solution du système: $\begin{cases} 3u - v &= x \\ 6u + 2v &= y. \end{cases}$
6. $\mathcal{C}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} : f \mapsto \int_0^1 \ln(1 + |f(t)|)\, dt$.
7. $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} : f \mapsto f'(1/2) + \int_0^1 f(t)\, dt$.

Exercice 21.
Soit $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, on définit l'application φ par

$$\forall f \in E, \varphi(f) = g \text{ avec } g : x \mapsto \int_0^x t f(t)\, \mathrm{d}t.$$

Montrer que φ est un endomorphisme de E. Est-il injectif? surjectif?

Exercice 22.
Soient $a \in \mathbb{R}^\star$ et $\varphi_a : \begin{cases} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & (X^2 - 1)P' - aXP \end{cases}$.

1. Montrer que φ_a est un endomorphisme et étudier le degré de $\varphi_a(P)$ en fonction du degré de P.
2. Lorsque $a \notin \mathbb{N}$, montrer que φ_a est injective. Est-ce un isomorphisme?

Exercice 23.
Soient $F = \{P \in \mathbb{R}[X], P(1) = 0\}$ et $G = \mathrm{Vect}(X)$.

1. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}[X]$.
2. Déterminer l'image par la projection f sur F parallèlement à G de $X^2 - 3X + 1$ et $X^i - 1$, $i \in \mathbb{N}^\star$.

6 Une fois qu'on est à l'aise

Exercice 24.
Soient p un projecteur de E et $f = p + id_E$.

1. Montrer que f est bijective.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Exprimer f^n en fonction de p et n

Exercice 25.

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et p, q deux projecteurs de E.

1. Montrer que $p + q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0_{\mathcal{L}(\mathcal{E})}$.
2. Supposons dorénavant que $p + q$ est un projecteur, montrer que $\mathrm{Im}(p)$ et $\mathrm{Im}(q)$ sont en somme directe.
3. Montrer ensuite que $p + q$ est la projection de E sur $\mathrm{Im}p \oplus \mathrm{Im}q$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$.

Exercice 26.
Soit $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit E un K-espace vectoriel, soient f et g deux endomorphismes de $(E, +, .)$. Montrer l'équivalence des deux assertions suivantes :
(i) $f \circ g$ est un automorphisme
(ii) f est surjective, g est injective et $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(g)$

Exercice 27.
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(f, g) \in (E)^2$ tel que $f \circ g = id_E$. Déterminer $\mathrm{Ker}(g \circ f)$ et $\mathrm{Im}(g \circ f)$.

Exercice 28.
Soit E un espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$ tel que $u^3 - u^2 + u - id_E = 0_{\mathcal{L}(\mathcal{E})}$. Montrer que $\mathrm{Ker}(u - id_E) \oplus \mathrm{Ker}(u^2 + id_E) = E$.

Memo

- Comment montrer qu'une application est linéaire?
  - Utiliser la linéarité de l'intégrale, la dérivation, la somme, le produit matriciel....
  - Revenir à la définition
- Comment déterminer l'image d'une application linéaire?
  - Prendre un élément de l'espace d'arrivée et raisonner par équivalence.
  - Trouver une inclusion puis montrer l'équivalence.
- Comment déterminer le noyau d'une application linéaire?
  Prendre un élément de l'espace de départ et raisonner par équivalence.
- Comment déterminer si une application linéaire f est un isomorphisme?
  - Résoudre l'équation $f(X) = Y$
  - Déterminer le noyau et l'image
- Comment montrer que p est un projecteur?
  Montrer que p est linéaire et $p \circ p = p$
- Comment déterminer les espaces caractéristiques d'un projecteur? Déterminer son noyau et son image