TD 19: Intégration.

1 Manipulation

Exercice 1.
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\forall x \in [a,b],\ f(a+b-x) = f(x)$.

1. Montrer que $\displaystyle\int_a^b x f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
2. En déduire le calcul de $\displaystyle\int_0^\pi \frac{x\sin(x)}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 2.
Soit $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{+*})$ telle que $f(0) = 1$ et $f \leqslant f' \leqslant 2f$. Encadrer $f(-1)$ et $f(1)$.

Exercice 3.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et $T > 0$. On suppose que $x \mapsto \displaystyle\int_x^{x+T} f(t)\,\mathrm{d}t$ est constante. Montrer que f est périodique.

Exercice 4.
Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue.

1. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.
2. On suppose désormais $f \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ et $f(1) \neq 0$. Déterminer un équivalent quand n tend vers $+\infty$ de $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x$.

2 Stricte positivité

Exercice 5.
Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que :

$$\left|\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right| = \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t \Leftrightarrow f \text{ est de signe constant.}$$

Exercice 6.
Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$. Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 7.
On cherche les fonctions $f \in C^0([0,1])$ telle que

$$\int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f^3(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f^4(t)\,\mathrm{d}t. (\star)$$

1. Supposons f une telle fonction, Calculer $\displaystyle\int_0^1 (f^2(t) - f(t))^2\,\mathrm{d}t$.
2. En déduire l'ensemble des fonctions continues vérifiant $(\star)$

3 Sommes de Riemann

Exercice 8.
Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \frac{1}{1+e^{-k/n}}$.

Exercice 9.
Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^n \frac{n}{k^2+n^2}$.

Exercice 10.
Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{(2n)!}{n^n n!}\right)^{\frac{1}{n}}$.

4 Fonction définie par une intégrale

Exercice 11.
Soit $g : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^4+t^2+1}} \end{array}\right.$.

1. Montrer que g est impaire.
2. Calculer sa dérivée.
3. Déterminer sa limite en $+\infty$.

Exercice 12.
Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie $\varphi(t) = \frac{\operatorname{sh} t}{t}$ si $t \neq 0$ et $\varphi(0) = 1$. On pose $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est bien définie et étudier la parité de f.
2. Déterminer le signe de f
3. Justifier que f est dérivable et calculer sa dérivée.
4. Dresser le tableau de variations de f et retrouver son signe.

Exercice 13.
Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \int_0^x \sin(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que f est dérivable et que $f'(x) = \displaystyle\int_0^x \cos(x-t)g(t)dt$.
2. Montrer que f est solution de l'équation différentielle $y'' + y = g(x)$.
3. Résoudre cette équation différentielle.

5 Inégalité de Taylor Lagrange

Exercice 14.

À l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange, déterminer une valeur approchée de $\ln(1,003)$ à 10^{-8} près.

Exercice 15.
Montrer que pour tout $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $1 - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \cos x \leqslant 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24}$

Exercice 16.
Soit $f : [-a,a] \to \mathbb{R}$ de classe C^2. Montrer que pour tout $x \in [-a,a]$, on a

$$|f'(x)| \leqslant \frac{1}{2a}\,|f(a) - f(-a)| + \frac{a^2+x^2}{2a} \sup_{x\in[-a,a]} |f''(t)|\,.$$

6 Si besoin d'encore un peu d'entrainement

Exercice 17.
On pose $f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^x t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t. \end{array} \right.$

1. Calculer $f_0(x)$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f_0(x)$.
2. Établir une relation de récurrence entre f_n et f_{n+1}.
3. Montrer que f_n admet une limite en $+\infty$. On la note l_n.
4. Montrer que $l_n = n!$.

Exercice 18.
Déterminer un encadrement de $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^2}{t+1}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 19.
On pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$. Montrer, en majorant I_n, que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

Exercice 20.
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = f(c)$$

Exercice 21.
Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$. On note M et m son maximum et son minimum. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t \leqslant -mM$.

Exercice 22.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_1^e (\ln x)^n\,\mathrm{d}x$.

1. Établir une relation liant I_n et I_{n+1}.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < I_n < \dfrac{e}{n+1}$.
3. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$ puis un équivalent de I_n quand n tend vers $+\infty$.
4. Soit (u_n) une suite réelle définie par $u_0 = a, u_{n+1} = e - (n+1)u_n$. On suppose $a \neq I_0$. Montrer, en étudiant $D_n := |u_n - I_n|$ que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} |u_n| = +\infty$.

Exercice 23.

1. Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continues telles que $g \geqslant 0$ et non identiquement nulle. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = f(c)\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

2. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^{\alpha+1}} \int_0^x t^\alpha f(t)\,\mathrm{d}t$ où f est une fonction continue à droite en 0 et α est un réel différent de -1.

Exercice 24.
Calculer $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^3+k^2n}$

Exercice 25.
Calculer $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}}$.

Exercice 26.
Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} \prod_{k=1}^{n} \left(k^2+n^2\right)^{\frac{1}{n}}$.

Exercice 27.
Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^\star & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_1^x \frac{e^t}{t}\,\mathrm{d}t \end{array} \right.$.

1. Déterminer le signe de $x \mapsto f(x) - \ln(x)$.
2. Dresser le tableau de variations de f avec ses limites.

Exercice 28.
Soit :

$$F : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^\star & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t. \end{array} \right.$$

1. Déterminer le signe de F sur $\mathbb{R}_+^\star$.
2. Montrer que $F(x) = F\left(\frac{1}{x}\right)$.

   On pose g la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $g(x) = \dfrac{\arctan(x)}{x}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 1$.
3. Exprimer F à l'aide de g.
4. En déduire que F peut être prolongée par continuité en 0.

Exercice 29.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{x}{e^x-1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{array} \right.$. On pose :

$$G : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_x^{2x} f(t)\,\mathrm{d}t \end{array} \right. .$$

1. Montrer que G est de classe C^1 et donner la dérivée de G pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Déterminer la limite en $+\infty$ et $-\infty$.

7 Une fois qu'on est à l'aise

Exercice 30.
Soit f définie sur $[1,+\infty[$ par : $f(t) = t.\ln(t)$.

1. Étudier rapidement la fonction f.

   Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} f(k)$.
2. Montrer que $\int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant S_n \leqslant \int_1^n f(t)dt + n\ln(n)$.
3. Calculer $\int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t$.
4. En déduire $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} \left(\prod_{k=1}^{n} k^k\right)^{4/n^2}$.

Exercice 31. ⚙ ⚙
Soit f une fonction continue positive sur $[a,b]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose $I_n = \left(\int_a^b f(x)^n\,\mathrm{d}x\right)^{1/n}$. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge vers $\sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$.

Exercice 32. ⚙
Soit f continue sur $[a,b]$. On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall k \in [\![0,n]\!], \int_a^b x^k f(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Montrer que f s'annule au moins $n+1$ fois sur $]a,b[$.

Exercice 33.
Soit $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Montrer que $\sum_{k=1}^{n} k^\alpha \sim \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ quand n tend vers $+\infty$, en utilisant les sommes de Riemann.

Exercice 34. ⚙
Soit f continue et positive sur $\mathbb{R}^+$. On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\star, f(x) \leqslant k \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

Montrer que f est nulle.

Exercice 35.

Soit f continue sur $\mathbb{R}^+$ telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$. On définit F sur $]0,+\infty[$ par $F(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \ell$.

Exercice 36.
On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^1 \sin(xt)e^{-t^2}\,\underset{\cdot}{t}.$$

1. Montrer que : $\quad \forall u \in \mathbb{R}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad |\sin(u+\alpha) - \sin(u) - \alpha\cos(u)| \leqslant \dfrac{1}{2}\alpha^2.$
2. En déduire que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \int_0^1 t\cos(xt)e^{-t^2}\,\underset{\cdot}{t}.$$

Exercice 37.
Inégalité de Kolmogorov Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose que f et f'' sont bornées et on pose :

$$M_0 = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| \qquad ; \qquad M_2 = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f''(x)|$$

1. (a) Soient $x, h \in \mathbb{R}$ avec $h > 0$. Écrire l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 entre x et $x+h$.
   (b) Montrer alors que :
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall h > 0, \quad |f'(x)| \leqslant \frac{2M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}.$$
   (c) En déduire que f' est bornée.

   On peut donc poser :
   $$M_1 = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)|\,.$$
2. En utilisant la question 1.(b), établir l'inégalité :
   $$M_1 \leqslant 2\sqrt{M_0M_2}.$$

Memo

- Comment calculer la limite d'une intégrale?
  - L'encadrer/la majorer/la minorer
  - Utiliser une relation de récurrence
  - Faire une IPP ou un changement de variable avant de la majorer/minorer/encadrer
- Comment reconnaître une somme de Riemann et calculer sa limite?
  Faire apparaître une fonction en k/n
- Comment étudier une fonction définie par une intégrale?
  - Utiliser le cours pour sa continuité/dérivabilité
  - Appliquer le théorème des accroissements finis
  - Encadrer l'intégrale