# Indications

***1*** Montrer que la concaténation de deux bases des ssev forme une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

***2*** Montrer qu'ils sont en somme directe et utiliser la dimension.

***3*** Montrer par analyse-synthèse que tout élément $X$ de $\mathbb{R}^3$ s'écrit $X = a + b$ avec $(a, b) \in F \times G$ et utiliser l'expression de $a$ trouvée dans la phase d'analyse pour déterminer le projeté.

***4*** 1. Raisonner par l'absurde 2. Trouver un contre-exemple

***6*** Compléter une base de $F$.

***7*** 1. Utiliser la division euclidienne.

2. Compléter la famille génératrice trouvée à la question 1.

3. Remarquer que pour tout $P \in F$, $\text{Vect}(1 + P)$ est un supplémentaire de $F$.

***9*** Exprimer une combinaison linéaire nulle de cette famille comme combinaison linéaire de la base.

***10*** Déterminer une base de $G$ et la compléter en une base de $\mathbb{R}^4$.

***11*** Montrer que la famille est génératrice et utiliser le système trouvé pour déterminer les coordonnées.

***12*** 1. Montrer que la famille est libre en utilisant les racines

2. a) au travail b) déterminer les coordonnées d'un poly qcq (pensez aux racines des $L_i$) puis remplacer.

***13*** Déterminer la dimension de l'espace engendré.

***14*** Raisonner par équivalence pour caractériser la forme générale des éléments.

***15*** Déterminer la forme générale d'un élément de $F$.

***16*** Raisonner par double inclusion.

***17*** 1. Raisonner par analyse/synthèse 2. Déterminer la dimension de $F$ et $G$.

***18*** utiliser une matrice, déterminer $\text{Ker}(f)$ puis utiliser le thm du rang.

***19*** le thm du rang donne un sens. supposez $n$ pair et envoyez la moitié des éléments sur $0_E$ et l'autre moitié sur les premiers.

***20*** Exprimer les images de la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

***21*** Montrer que la somme est directe et conclure avec le théorème du rang.

***22*** 3. thm du rang 4. expliciter.

***23*** 1. par équivalence 2. thm du rang 3. Prenez deux éléments non colinéaires.

***24*** 1. Calculer $f \circ f$.

2. Résoudre $f(x, y, z, t) = (0, 0, 0, 0)$ et $f(x, y, z, t) = (x, y, z, t)$.

3. Éxprimer $s(1, 2, 3, 4)$ en fonction de $f(1, 2, 3, 4)$.

***25*** Montrer que $\phi_A \circ \phi_A = \phi_A$ puis déterminer son noyau et son image.

***26*** Montrer que $s_A \circ s_A = id_{M_{31}(\mathbb{R})}$ puis déterminer $\text{Ker}(s_A + id)$ et $\text{Ker}(s_A - id)$.

***27*** prendre $x_0$ tel que $f(x_0) \neq 0$ et montrer que $g(x_0) = 0$ en calculant $f(x_0 + y)g(x_0 + y)$.

***28*** Raisonner avec les dimensions.

***29*** Montrer que tout élément s'écrit comme la somme de 3 éléments des ssev puis montrer l'unicité de l'écriture.

***30*** Compléter une base de $F$.

***31*** Compléter la famille $\big((X-1)^2, (X+1)^2\big)$ en une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

***32*** Remarquer qu'elle est de cardinal 3 et montrer qu'elle est libre.

***33*** Déterminer une base de $F$ et la compléter en une base de $\mathbb{R}^4$.

***34*** Montrer que la famille est libre et déterminer les coordonnées sans calcul.

***35*** Déterminer une famille génératrice de $F$, remarquer qu'elle est libre pour la compléter.

***36*** Utiliser la division euclidienne

***37*** Utiliser une matrice, déterminer $\ker(\varphi)$ puis utiliser le thm du rang.

***38*** Montrer que $f(\lambda U + V) = \lambda f(U) + V$ puis exprimer

***39*** Utiliser l'unicité de la division euclidienne pour déterminer une base, compter ses éléments puis compléter la famille en une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

*40* si la somme n'est pas directe, compléter une base de l'intersection en une base de $F$ puis de $G$.

*41* Montrer que $\mathrm{Im}(u) = u(F)$.

*42* 1. montrer les deux inégalités 2. utilisez $\mathrm{Im}(f+g) \subset \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$ deux fois 3.utilisez tout ce qui précède + thm du rang.

*43* Déterminer $\mathrm{Im}\varphi$ et $\mathrm{Ker}\varphi$.

*44* Montrer que la famille obtenue à l'aide d'une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et des antécédents forme une base de $E$ puis raisonner par analyse-synthèse avec cette base.

*45* Par double implication.

*46* 1. montrer que les dimensions sont nécessairement des suites stationnaires 2. Si $x \in E$, alors $u_N x = U_{2N}(a)$ donc $x \in \mathrm{Ker}(u^N) + \mathrm{Im}(u^N)$ puis montrer que la somme est directe. 3. Utiliser $\mathrm{Im}(u^{N+1}) = \mathrm{Im}(u^N)$. 4. montrer que $u_F$ est un endomorphisme injectif.

*47* Si $x_0 \in E \setminus H$, alors $\mathrm{Vect}(x_0) \oplus H = E$ puis traduire $u(x_0) \in E$

*48* Procéder par disjonction de cas selon que $H_1 = H_2$ ou non.