Correction du DM 9

1. (a) Si on connaît les deux premiers termes d'une suite appartenant à F, on peut calculer les termes suivants par récurrence double. Réciproquement, si on se donne une suite, ses deux premiers termes sont définis.

   Cela revient à dire que l'application $\varphi : \begin{cases} F & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ u & \longmapsto & (u_0, u_1) \end{cases}$ *est une bijection. En réalité, c'est même un isomorphisme car elle est linéaire.*

   (b) La suite nulle appartient à F $(0 - 0 + 0 = 0)$. Soit maintenant $(u, v) \in F^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, montrons que $\lambda u + v \in F$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} & p\left(\lambda u_{n+2} + v_{n+2}\right) - \left(\lambda u_{n+1} + v_{n+1}\right) + (1-p)\left(\lambda u_n + v_n\right) \\ = \;& \lambda \underbrace{p u_{n+2} - u_{n+1} + (1-p)u_n}_{=0} + \underbrace{p v_{n+2} - v_{n+1} + (1-p)v_n}_{=0} \\ = \;& 0 \end{aligned}$$

   On a donc bien :$\lambda u + v \in F$.

   On a montré que F est un sous-espace vectoriel.

   N'oubliez pas de montrer que la suite nulle est dans F pour justifier que F est non vide.

   (c) Ces deux suites sont bien définies de façon unique d'après les remarques faites à la première question. Elles forment une famille libre de façon évidente puisqu'elles ne sont pas proportionnelles. Si on ne le voit pas : si $\forall n \in \mathbb{N}, a v_n + b w_n = 0$, on obtient immédiatement $a = 0$ en prenant $n = 0$ et $b = 0$ en posant $n = 1$.

   Montrons le caractère générateur. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite appartenant a F. Posons, pour tout entier n, $z_n = u_0 \times v_n + u_1 \times w_n$. La suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient certainement à F puisqu'elle est combinaison linéaire des deux suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui sont dans F. De plus, par construction, $z_0 = u_0 \times 1 + u_1 \times 0 = u_0$ et de même $z_1 = u_1$. La suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite de F ayant les mêmes deux premiers termes que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, elle est donc égale à $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Comme $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{Vect}\left((v_n)_{n\in\mathbb{N}}, (w_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$ par construction, on a bien prouvé que notre famille est génératrice de F, et donc une base de F.
   En réalité, on montre seulement $F \subset$ Vect$\left((v_n)_{n\in\mathbb{N}}, (w_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$ car l'autre inclusion est claire.

2. (a) On suppose $p = \frac{1}{2}$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $2u_{n+1} = u_n + u_{n+2}$ donc $u_{n+1} - u_n = u_{n+2} - u_{n+1}$ et la suite $(u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante. On a bien montré que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique. Réciproquement, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique, il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + nr.$$

   Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n + u_{n+2} = 2u_0 + (2n+2)r = 2u_{n+1}$ donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien un élément de F.

   Attention à bien faire les deux inclusions pour conclure sur l'égalité des ensembles.

   Remarque: La relation de récurrence se réécrit $u_{n+1} = \dfrac{u_n + u_{n+2}}{2}$ ce qui est l'origine du nom donné aux suites arithmétiques : chaque terme de la suite est la moyenne arithmétique des deux termes qui l'entourent. Si on remplace cette condition par une moyenne géométrique, on obtient sans grande surprise des suites géométriques!

(b) Soit $u=(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique.

$$\begin{aligned} u\in F &\Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N}, pq^{n+2}-q^{n+1}+(1-p)q^n=0\\ &\Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N}, q^n\left(pq^2-q+1-p\right)=0\\ &\Leftrightarrow pq^2-q+1-p=0 \text{ car } q\neq 0\end{aligned}$$

L'équation du second degré obtenu admet pour discriminant

$$\Delta=1-4p(1-p)=4p^2-4p+1=(2p-1)^2,$$

et pour racines $q_1=\dfrac{1+2p-1}{2p}=1$ et $q_2=\dfrac{1-2p+1}{2p}=\dfrac{1}{p}-1$ (ou bien 1 est racine évidente et l'autre racine vaut donc $\dfrac{1-p}{p}$).

Les deux suites $v=(1)_{n\in\mathbb{N}}$ et $w=\left(\left(\dfrac{1}{p}-1\right)^n\right)$ appartiennent donc a F et, n'étant pas proportionnelles, forment une famille libre d'éléments de F.

Remarque: Comme F est de dimension 2, la famille (v,w) est donc une base de F.

Comme on n'avait pas encore la dimension, il fallait montrer le caractère générateur à la main. Soit donc $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in F$. On cherche à montrer qu'il existe $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que $(u_0,u_1)=a(1,1)+b\left(1,\dfrac{1-p}{p}\right)$. On écrit

$$\begin{cases} a+b & =u_0\\ a+b\left(\dfrac{1-p}{p}\right) & =u_1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b & =u_0\\ b\left(\dfrac{1-2p}{p}\right) & =u_1-u_0\end{cases}$$

On a supposé $p\neq\dfrac{1}{2}$. Le système admet une unique solution. Il existe donc un unique couple $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que

$$(u_0,u_1)=a\,(1,1)+b\left(1,\frac{1-p}{p}\right),$$

ce qui implique, d'après la première question, que

$$u=av+bw.$$

Cela montre à la fois le caractère libre (unicité de l'écriture) et le caractère générateur de (v,w).

Notez qu'on vient ainsi de démontrer à l'aide d'espaces vectoriels un cas particulier du théorème sur les suites récurrentes linéaires d'ordre 2 (dont le cas général se démontre rigoureusement par la même méthode).

(c) On sait dans ce cas que u est une suite arithmétique, donc il existe un réel r tel que $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=u_0+nr=1+nr$. La condition $u_i=0$ implique $1+ri=0$. soit $r=-\dfrac{1}{2}$. et on en déduit que $\forall n\in\mathbb{N}, u_n=1-\dfrac{n}{i}$.

(d) Cette fois-ci on sait qu'il existe $(A,B)\in\mathbb{R}^2, \forall n\in\mathbb{N}, u_n=A+Bx^n$. La première condition initiale (pour $n=0$) se traduit par l'égalité $A+B=1$, et la deuxième par $A+Bx^i=0$. En soustrayant les deux. on a $B\left(1-x^i\right)=1$, soit $B=\dfrac{1}{1-x^i}$ (puisque $i\neq 0$), puis $A=1-B=-\dfrac{x^i}{1-x^i}$. Finalement, $\forall n\in\mathbb{N}, u_n=\dfrac{x^n-x^i}{1-x^i}$.

3. (a) C'est exactement la même méthode. L'ensemble G est un sous-espace vectoriel de E car il contient la suite nulle et qu'il est stable par combinaison linéaire.

On définit ensuite trois suites appartenant à G de la façon suivante : $v_0 = 1, v_1 = v_2 = 0$ et les termes suivants de la suite (v_n) sont détermines par la relation de récurrence définissant G : $w_1 = 1, w_0 = w_2 = 0$ et de même $(w_n) \in G$: et enfin $t_0 = t_1 = 0$ et $t_2 = 1$ avec $(t_n) \in G$. Ces trois suites forment une famille libre de G car s'il existe une combinaison linéaire nulle de ces trois suites, alors on a une combinaison linéaire nulle des triplets formés par leurs trois premiers termes. Or on reconnaît la base canonique de $\mathbb{R}^3$, les coefficients de cette combinaison linéaire sont donc nuls.

La famille (v, w, t) est une famille génératrice de G car toute suite u appartenant à G peut s'écrire $u = u_0 v + u_1 w + u_2 t$ (la relation est vraie pour les trois premiers rangs donc pour tout entier n par récurrence). On en déduit que (v, w, t) est une base de G.

Remarque: G est un espace vectoriel de dimension 3.

(b) Soit $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q. Alors

$$\begin{aligned}
(q^n)_{n\in\mathbb{N}} \in G \quad & \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, 4q^{n+3} - 4q^{n+2} - q^{n+1} + q^n = 0 \\
& \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, q^n \left(4q^3 - 4q^2 - q + 1\right) = 0 \\
& \Leftrightarrow 4q^3 - 4q^2 - q + 1 = 0 \text{ car } q \neq 0
\end{aligned}$$

Or, cette équation se factorise sous la forme $4q^2(q-1)-(q-1) = 0$, soit $(q-1)\left(4q^2 - 1\right) = 0$. Elle admet pour solutions $q_1 = 1, q_2 = \frac{1}{2}$ et $q_3 = -\frac{1}{2}$. Les trois suites $z_1 = (1)_{n\in\mathbb{N}}, z_2 = \left(\frac{1}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $z_3 = \left(\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ appartiennent donc à G.

Montrons qu'elles forment une base de G. Soit $(u_n) \in G$, montrons qu'il existe un unique triplet $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$u = az_1 + bz_2 + cz_3.$$

On considère le système suivant :

$$\begin{cases}
a + b + c & = u_0 \\
a + \frac{b}{2} - \frac{c}{2} & = u_1 \\
a + \frac{b}{4} + \frac{c}{4} & = u_2
\end{cases}$$

On fait $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$:

$$\begin{cases}
a + b + c & = u_0 \\
-\frac{b}{2} - \frac{3c}{2} & = u_1 - u_0 \\
-\frac{3b}{4} - \frac{5c}{4} & = u_2 - u_0
\end{cases}$$

puis $L_2 \leftarrow -2L_2$ puis $L_3 \leftarrow 4L_3 + 3L_2$:

$$\begin{cases}
a + b + c & = u_0 \\
b + 3c & = -2u_1 + 2u_0 \\
4c & = 4u_2 - 6u_1 + 8u_0
\end{cases}$$

On obtient un système de Cramer. Il existe donc un unique triplet $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $(u_0,u_1,u_2) = a\,(1,1,1) + b\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right) + c\left(1,-\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$. Par récurrence, comme $u \in G$, on a

$$\exists!(a,b,c) \in \mathbb{R}^3, u = az_1 + bz_2 + cz_3,$$

donc la famille (z_1,z_2,z_3) est une base de G.
Remarque: Si on avait eu la dimension, on aurait pu se simplifier un peu les calculs en montrant seulement que la famille était libre (avec donc un système linéaire homogène) puis conclure que c'était une base de G car G est de dimension 3.

(c) Toute suite u appartenant à G peut donc s'écrire sous la forme $u_=az_1 + bz_2 + cz_3$. Avec les premiers termes donnés, et quitte à multiplier par 2 et 4 les deux dernières, on doit donc résoudre le système

$$\begin{cases} a+b+c & = 1 \\ 2a+b-c & = 5 \\ 4a+b+c & = 7 \end{cases}.$$

Soustraire les deux équations extrêmes donne immédiatement $3a = 6$, soit $a = 2$. On a ensuite $b+c = -1$ et $b-c = 1$. dont on déduit facilement que $b = 0$ et $c = -1$. Autrement dit, $\forall n \in \mathbb{N} = 2 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n$.