Correction du TD n 17

Correction 1 On le montre par récurrence sur n. Pour $n=0$ (et $n=1$), le résultat est vrai.

On suppose qu'il existe un entier n tel que $3^{2n}-2^n$ est divisible par 7. On écrit

$$3^{2(n+1)}-2^{n+1}=3^{2n}.3^2-2.2^n=3^{2n}.(7+2)-2.2^n=2(3^{2n}-2^n)+7.3^{2n}.$$

Le premier terme de la somme est divisible par 7 par hypothèse de récurrence, le deuxième l'est également. On en déduit que $3^{2(n+1)}-2^{n+1}$ est divisible par 7.

Par le principe de récurrence, le résultat est vrai pour tout entier n.

Correction 2 Pour $n=2$, on a $2^4-6=10$ donc le résultat est vrai pour $n=2$.

On suppose qu'il existe un entier $n\geqslant 2$ tel que $2^{2^n}-6$ est divisible par 10. On écrit

$$2^{2^{n+1}}-6=\left(2^{2^n}\right)^2-6=\left(2^{2^n}\right)^2-36+30=\left(2^{2^n}-6\right)\left(2^{2^n}+6\right)+30.$$

$\left(2^{2^n}-6\right)\left(2^{2^n}+6\right)$ est divisible par 10 par hypothèse de récurrence, 30 l'est également donc $2^{2^{n+1}}-6$ est divisible par 10.

Par le principe de récurrence, $2^{2^n}-6$ est divisible par 10 pour tout $n\geqslant 2$.

Correction 3 Le résultat est vrai pour $n=0$. On suppose qu'il est vrai pour un certain rang n c'est-à-dire que $n^3+(n+1)^3+(n+2)^3$ est divisible par 9.

On écrit

$$(n+1)^3+(n+2)^3+(n+3)^3=(n+1)^3+(n+2)^3+n^3+9n^2+27n+27.$$

Par hypothèse de récurrence, $(n+1)^3+(n+2)^3+n^3$ est divisible par 9 et $9n^2+27n+27$ est également divisible par 9 donc la somme l'est.

Par le principe de récurrence, le résultat est vrai pour tout entier n.

Correction 4 On écrit $4994=an+2$ et $995=bn+5$ donc $4992=an$ et $990=bn$.

On détermine ensuite le pgcd de 4992 et 990. On a $4992=4^3\times 13\times 6$ et $990=5\times 3\times 11\times 6$. On en déduit que le pgcd vaut 6. Comme n divise les deux nombres, il doit diviser leur pgcd donc n vaut $1,2,3$ ou 6. Or, le reste est strictement inférieur au quotient, il n'y a donc que deux valeurs possibles : 3 et 6.

Correction 5 On écrit $4373=an+8$ et $826=bn+7$. On a donc $4365=an$ et $819=bn$. On sait que n divise le pgcd de 4365 et 819. Déterminons le: On écrit $4365=97\times 5\times 9$ et $819=13\times 7\times 9$. On en déduit que le pgcd vaut 9. Comme, de plus, n doit être strictement supérieur aux restes, on en déduit que $n=9$.

Correction 6 On écrit $\dfrac{2n^2-n-6}{n+3}=\dfrac{2n(n+3)-7(n+3)+15}{n+3}=(2n-7)+\dfrac{15}{n+3}$ donc

$$\frac{2n^2-n-6}{n+3}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\frac{15}{n+3}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow n+3\in\{3,5,15\}\Leftrightarrow n\in\{0,2,12\}$$

Correction 7 On a $140=5\times 4\times 7$ donc b doit être divisible par 5 On peut avoir $b=5$, $b=10$, $b=20$, $b=35$, $b=70$ et $b=140$.

Correction 8 On a $1680=42\times 8\times 5$. On écrit $a=42q$ et $b=42q'$ avec pgcd$qq'=1$. On ppcm$qq'=qq'=40$ donc $(q,q')=(5,8)$ ou $(8,5)$.

Correction 9

1. Posons $n=$ pgcdab et $m=$ pgcd$\lambda a\lambda b$. On a $n|a$ et $n|b$ donc $\lambda n|\lambda a$ et $\lambda n|\lambda b$. Ainsi, $\lambda n|m$.

   On peut donc écrire $m=\lambda nq$ avec $q\in\mathbb{N}$.

   On a
   $$\begin{cases}\lambda a=ma'=\lambda nqa'\\ \lambda b=mb'=\lambda nqb'\end{cases}$$
   avec $a',b'\in\mathbb{N}$. On en déduit, comme λ est non nul,
   $$\begin{cases}a=nqa'\\ b=nqb'\end{cases}$$
   donc nq divise a et b, ce qui implique nq divise n donc $q=1$ et $\lambda n=m$. On a donc pgcd$\lambda a\lambda b=\lambda$pgcd$ab$.

2. On sait que si pgcd$ab=n$, alors $a=nq$, $b=nq'$ avec pgcd$qq'=1$ et ppcm$ab=nqq'$. On en déduit que ppcm$\lambda a\lambda b=\lambda$pgcd$abqq'=\lambda$ppcm$ab$.

Correction 10 Si a divise m, il divise $2m$. Donc si a divise m et $2m+1$, il divise leur différence, à savoir 1 ce qui impose $a=1$. On en déduit que pgcd$m,2m+1=1$ donc pgcd$nm(2m+1)n=n$.

Correction 11

1. Si a divise n et $n+2$, il divise leur différence, à savoir 2. Si n est pair, le pgcd vaut donc 2, si n est impair le pgcd vaut 1.

2. On a $a = n(n+3)$ et $b = (n+2)(n+3)$.

   On a pgcd$ab = (n+3)$pgcd$nn+2$. Ainsi, $pgcdab = (n+3)$ si n est impair, $2(n+3)$ si n est pair.

Correction 12 1. Pour tout $i \in [\![2, k]\!]$, $i \leqslant k$ donc $i|k!$, ainsi $i|k!+i$ donc $k!+i$ n'est pas premier. Ceci étant valable pour tout i entre 2 et k, aucun de ces entiers n'est premier.

2. On considère les n entiers $(n+1)!+2, (n+1)!+3, \ldots, (n+1)!+(n+1)$. Aucun n'est premier d'après la question précédente, on peut donc trouver une liste de n entiers consécutifs dont aucun n'est premier, pour n aussi grand que l'on souhaite.

Correction 13 On commence par montrer que $p|a$. En effet, si $p|a^n$, alors d'après le lemme de Gauss, $p|a$ ou $p|a^{n-1}$. Si $p|a^{n-1}$, on itère. Au bout d'un nombre fini d'étapes, on aura montré, par disjonction de cas, que p divise a.

On a donc $a = bp$ donc $a^n = p^n b^n$ donc $p^n|a^n$.

Correction 14 On suppose par l'absurde qu'il en existe un nombre fini $p_1, \ldots, p_n$ et on pose $N = 4\prod_{i=1}^{n} p_i - 1$. N est impair, ses diviseurs premiers sont impairs donc leurs restes par la division euclidienne par 4 valent 1 ou 3. S'ils sont tous de la forme $4k+1$, alors N serait également de cette forme ce qui est absurde. On en déduit qu'il existe au moins un diviseur premier de N dont le reste vaut 3. Il existe donc j tel que p_j divise N mais p_j divise alors $N - 4p_1 \ldots p_n$ c'est-à-dire -1, ce qui est absurde.

On a montré qu'il existe un nombre infini de premiers dont le reste de la division euclidienne par 4 vaut 3