

Intégration

1 Intégration de fonctions en escalier

Définition 1. Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$ (avec $a < b$). Une **subdivision** de $[a, b]$ est une suite finie $\sigma = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ telle que

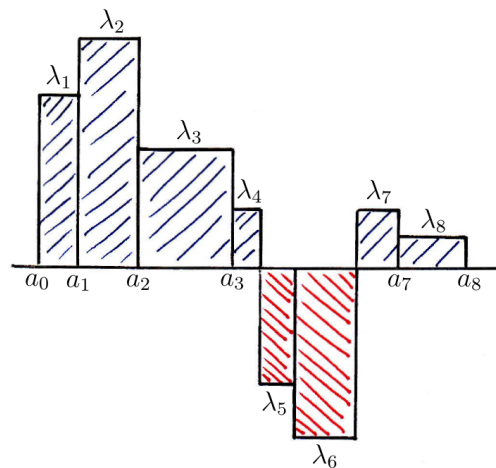
$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n = b.$$

Définition 2. Une **fonction en escalier** sur $[a, b]$ est une fonction $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ pour laquelle il existe une subdivision $\sigma = (a_0, \dots, a_n)$ telle que ϕ est constante sur chaque intervalle $]a_{k-1}, a_k[$.

Autrement dit, $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \exists \lambda_k \in \mathbb{R} \text{ tq } \forall x \in]a_{k-1}, a_k[, \phi(x) = \lambda_k$.

Définition 3. Dans la situation précédente, on définit **l'intégrale sur $[a, b]$ de la fonction en escalier ϕ** par :

$$\int_a^b \phi(t) dt = \sum_{k=1}^n \lambda_k (a_k - a_{k-1})$$



Dans cette formule, on remarque que la quantité $\lambda_k(a_k - a_{k-1})$ est l'aire d'un rectangle élémentaire de hauteur λ_k , aire comptée positivement si $\lambda_k \geq 0$, et négativement sinon. Donc $\int_a^b \phi(t) dt$ est bien l'aire (comptée de cette manière) de la région délimitée par le graphe de ϕ et l'axe des abscisses.

2 Intégrale d'une fonction continue sur un segment

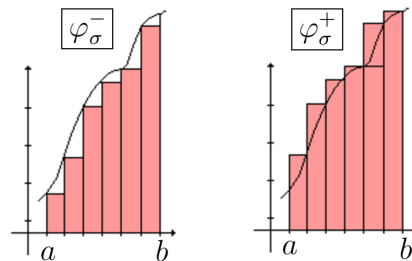
2.1 construction

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur un segment $[a, b]$.

Notations: Pour toute subdivision $\sigma = (a_0, \dots, a_n)$ de $[a, b]$, on note ϕ_σ^+ et ϕ_σ^- les deux fonctions en escalier définies par :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall x \in [a_{k-1}, a_k[,$$

$$\phi_\sigma^+(x) = \max_{t \in [a_{k-1}, a_k]} f(t) \quad \phi_\sigma^-(x) = \min_{t \in [a_{k-1}, a_k]} f(t)$$



Remarque : $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, les nombres $\max_{t \in [a_{k-1}, a_k]} f(t)$ et $\min_{t \in [a_{k-1}, a_k]} f(t)$ sont bien définis car une fonction continue sur un segment est bornée, et atteint ses bornes.

Théorème 1.

Avec les notations précédentes, on a l'égalité suivante :

$$\inf \left(\int_a^b \phi_\sigma^+(t) dt, \sigma \text{ subdivision de } [a, b] \right) = \sup \left(\int_a^b \phi_\sigma^-(t) dt, \sigma \text{ subdivision de } [a, b] \right)$$

La valeur commune de ces bornes inférieure et supérieure (prises sur **toutes** les subdivisions possibles de $[a, b]$) est appelée intégrale de a à b de f , et est notée :

$$\int_a^b f(t) dt \quad \text{ou} \quad \int_a^b f \quad \text{ou} \quad \int_{[a,b]} f$$

Définition 4. Si f est une fonction continue sur $[a, b]$, on définit sa somme de Riemman :

$$S_n(f) = \frac{(b-a)}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f \left(a + \frac{k(b-a)}{n} \right) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a_k)$$

en posant $a_k = a + \frac{k(b-a)}{n}$.

On remarque que cette somme est égale à l'intégrale de la fonction en escalier :

$$\phi^- : \begin{cases} [a, b[& \longrightarrow \\ x & \longmapsto f \left(a + \frac{k(b-a)}{n} \right) \end{cases} \text{ si } x \in \left[a + \frac{k(b-a)}{n}, a + \frac{(k+1)(b-a)}{n} \right[$$

et que cette fonction en escalier correspond à l'approximation de f sur la subdivision $(a_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ définie par $a_k = a + \frac{k(b-a)}{n}$

Proposition 2.

Soit f une fonction continue, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f \left(a + \frac{k(b-a)}{n} \right) = \int_a^b f$.

Exemples 1.

$$1. \text{ Calculer } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+n}.$$

$$2. \text{ Calculer } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k+n}.$$

Remarque. Quitte à poser $g : x \mapsto f(a + (b-a)x)$, on peut toujours identifier une somme de Riemann à une intégrale entre 0 et 1.

Exemple 2. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln \left(1 + \frac{2k}{n} \right)$.

Remarque. On a aussi $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f \left(\frac{k}{n} \right) = \int_0^1 f$ et même $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n f \left(\frac{k}{n} \right) = \int_0^1 f$.

2.2 Propriétés

Interprétation géométrique: Si f est à valeur dans $\mathbb{R}^+$, l'intégrale de f sur $[a, b]$ est l'aire comprise entre le graphe de f , les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ et l'axe des abscisses.

Lorsque f est négative, on peut encore avoir une interprétation géométrique en parlant d'aire algébrique (qui est donc négative lorsque le graphe de f est en dessous de l'axe des abscisses).

Propriétés:

Soient f et g deux fonctions continues sur un segment $[a, b]$ avec $a < b$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors :

- linéarité: $\int_a^b (\lambda f + g)(t) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt.$
- positivité: $\int_a^b f(t) dt \geq 0$ si $f \geq 0.$
- croissance: si $f \geq g$, $\int_a^b f(t) dt \geq \int_a^b g(t) dt.$

Proposition 3 (inégalité triangulaire). *Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, alors*
$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$$

Exemple 3. Majorer $\int_0^{2\pi} t \cos(t) dt$.

Corollaire 4.

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$, alors

$$\left| \int_a^b f(t)g(t) dt \right| \leq \max_{[a,b]} |f(t)| \int_a^b |g(t)| dt$$

En particulier $\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq (b - a) \cdot \max_{[a,b]} |f(t)|$ (inégalité de la moyenne)

Exemple 4. Soit $I_n = \int_0^1 \frac{\cos(10t)t^n}{1+t^2} dt$, montrer que $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

Définition 5. On appelle valeur moyenne de f le réel $\frac{1}{b-a} \int_a^b f$. L'inégalité de la moyenne dit simplement que la moyenne de f est inférieure à sa valeur maximale.

Proposition 5 (relation de Chasles).

Soient $a \leq b \leq c$ trois réels et f continue sur $[a, c]$, alors

$$\int_a^c f(t) dt = \int_a^b f(t) dt + \int_b^c f(t) dt$$

Définition 6. Si $b \leq a$ et f continue sur $[b, a]$, on définit $\int_a^b f(t) dt := -\int_b^a f(t) dt$

La relation de Chasles est alors vraie pour des réels quelconques a, b et c .

Remarque. la linéarité de l'intégrale reste, bien entendu, vraie pour $a \geq b$. En revanche la positivité, la croissance et l'inégalité triangulaire ne sont valables que pour des bornes croissantes.

Théorème 6.

[stricte positivité]

Soit f une fonction positive ou nulle, continue sur $[a, b]$. Alors

$$\int_a^b f(t) dt = 0 \Rightarrow f = 0$$



f doit être de signe constant (pensez à $\cos$) et continue !!

Corollaire 7.

L'intégrale d'une fonction continue de signe constant est nulle si et seulement si la fonction est nulle.

Exemple 5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) dt$, montrer que $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

2.3 Intégrale et primitive

Théorème 8.

[thm fondamental de l'analyse] Soit I un intervalle, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $a \in I$.

La fonction $F : \begin{cases} I & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \int_a^x f \end{cases}$ est $\mathcal{C}^1$, et $\forall x \in I, F'(x) = f(x)$.

Remarque. La fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est l'unique primitive de f s'annulant en a , on retrouve bien $\int_a^b f(t) dt = G(b) - G(a)$.

Exemples 6.

1. Montrer que $F : x \mapsto \int_1^x \frac{1}{1+t^2} dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer sa dérivée.

2. Montrer que $F : x \mapsto \int_x^1 t \sin(t) dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ et calculer sa dérivée.

Corollaire 9.

Soit u et v deux fonctions dérivables et f continue. Alors

$$F : \begin{cases} I & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt \end{cases}$$

est dérivable et $F'(x) = v'(x)f \circ v(x) - u'(x)f \circ u(x)$.

Remarque. Si f est continue sur un intervalle J , F sera définie en tout point x tel que f est continue sur le segment d'extrémités $u(x)$ et $v(x)$.

Exemple 7. Montrer que $F : x \mapsto \int_x^{x^2} \ln(t) dt$ est dérivable sur $[1, 2]$ et calculer sa dérivée.

3 Inégalité de Taylor-Lagrange.

3.1 Énoncé

Théorème 10.

Soit $p \in \mathbb{N}$.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{p+1}$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Soient $a, b \in I$. On pose:

$$M = \max_{t \in [a, b]} (|f^{(p+1)}(t)|).$$

Alors :

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^p \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k \right| \leq M \frac{|b-a|^{p+1}}{(p+1)!}.$$

Remarque. L'inégalité de Taylor-Lagrange est souvent utilisée en pratique avec $a = 0$. En posant alors $x = b$, elle se réécrit :

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^p \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| \leq M \frac{|x|^{p+1}}{(p+1)!} \text{ avec } M = \max_{t \in [0, x]} (|f^{(p+1)}(t)|)$$



En général, M dépend de p !

Exemple 8. Montrer que pour tout $x > 0$

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x.$$

3.2 Application à la série exponentielle.

Théorème 11.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la suite de terme général $\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$ est convergente et sa limite vaut e^x .