Lycée du Parc
842.

Dimension finie

---

1 Espace vectoriel de dimension finie

1.1 Définitions et premières propriétés

Définition 1. On dit qu'un espace vectoriel est de dimension finie s'il admet une famille génératrice finie. Dans le cas contraire, on dit qu'il est de dimension infinie.

Exemples 1.

1. $\mathbb{R}^3$ *est de dimension finie*
2. $\mathbb{R}^n$ *est de dimension finie*
3. $\mathbb{R}[X]$ *est de dimension infinie.*
4. $\mathbb{R}_n[X]$ *est un sous-espace vectoriel de dimension finie de* $\mathbb{R}[X]$*.*
5. $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *est de dimension infinie.*

Proposition 1.
Soit E un espace vectoriel non réduit à $\{0_E\}$ de dimension finie. Alors E admet une base finie.

Proposition 2.
Soit E un espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{G}$ une famille génératrice de E et $\mathcal{F}$ une famille libre de E. Alors $\mathcal{F}$ est de cardinal fini et son cardinal est inférieur ou égal à celui de $\mathcal{G}$.

Remarque On verra l'utilité de ce résultat dès que nous aurons défini la dimension d'un espace, ce que nous allons faire tout de suite :

1.2 Dimension d'un espace vectoriel

Proposition 3.
Soit $E \neq \{0_E\}$ de dimension finie, alors toutes les bases de E ont même cardinal.

Définition 2. Si $E \neq \{0_E\}$ est de dimension finie, le cardinal commun de ses bases est appelé dimension de E et noté $\dim(E)$.

Par convention, $\dim\{0_E\} = 0$.

Exemples 2.

1. *dim*$\mathbb{R}^n = n$

2. *dim*$\mathbb{R}_n[X] = n + 1$

   ⚠ *La dimension est $n+1$ et non pas n car un vecteur de degré au plus n possède $n+1$ coefficients (ne pas oublier le coefficient constant !)*

En combinant les propositions 2 et 3, on obtient :

Proposition 4.
Soit E un espace de dimension finie $n \in \mathbb{N}^\star$.

- Si $\mathcal{F}$ est une famille libre de E, alors elle est de cardinal inférieur ou égal à n.
- Si $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de E, alors elle est de cardinal supérieur ou égal à n.

Voyons maintenant comment utiliser cette proposition 4

Exemples 3.

1. *Si on considère une famille de $\mathbb{R}^n$, alors si son cardinal est strictement supérieur n, elle est liée.*

2. *De même, une famille de $\mathbb{R}_n[X]$ de cardinal strictement supérieur à $n+1$ est nécessairement liée.*

3. *On verra comment utiliser la proposition avec une famille libre lorsque l'on fera la dimension d'un ssev.*

1.3 Caractérisation des bases

Théorème 5.
Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^\star$ et $\mathcal{F}$ une famille de E. Alors

- Si $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de E et $\#\mathcal{F}=n$, $\mathcal{F}$ est une base de E.
- Si $\mathcal{F}$ est une famille libre de E et $\#\mathcal{F}=n$, $\mathcal{F}$ est une base de E.

Cette proposition va complètement changer vos vies ! En effet, à partir de maintenant, lorsque vous cherchez à savoir si une famille est une base d'un espace dont vous connaissez la dimension, il suffit de montrer qu'elle est SOIT libre SOIT génératrice et on conclut grâce à son cardinal.

Exemples 4.

1. *La famille $(4X^2 - 17X + 3, 47, 3X - 8)$ est-elle une base de $\mathbb{R}_2[X]$?*

2. *Que dire de la famille $((3,4,-1),(2,0,0),(-5,1,0))$?*

3. *Que dire de la famille $(X^2-1,(X-1)^2,(X+1)^2)$?*

Définition 3. Soit $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_p)$ une famille de E. On appelle rang de cette famille, noté $\mathrm{rg}(\mathcal{F})$ la dimension de l'espace qu'elle engendre. Autrement dit, $\mathrm{rg}(u_1, \dots, u_p) = \mathrm{dimVect}(u_1, \dots, u_p)$.

⚠ On ne parle pas de dimension d'une famille !

Exemples 5.

1. *rg*$(1, X, X^2) = 3$.
2. *rg*$(1, X, X+1, X-1, X) = 2$ *car* *Vect*$(1, X, X+1, X-1, X) =$ *Vect*$(1, X) = \mathbb{R}_1[X]$.
3. *rg*$((1,1),(2,2),(3,3)) = 1$.

Proposition 6.
Soit $(u_1, \ldots, u_p)$ une famille de E, on note $\text{rg}(u_1, \ldots, u_p) = r$. On a :

- $r \leqslant p$.
- $r = p \Leftrightarrow (u_1, \ldots, u_p)$ est libre .

Pour montrer qu'une famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est libre, on peut montrer qu'elle est de rang n. Pour rappel, cela signifie que l'espace qu'elle engendre est de dimension n. En effet, cette famille est une famille génératrice de $F = \text{Vect}\,(e_1, \ldots, e_n)$, si cet espace est de dimension n, alors elle sera une famille génératrice de F de "bon" cardinal donc une base (et donc libre !).

Exemples 6.

1. *La famille* $(X^4 - 3X + 1, X^2 + X + 1, X^2 + 2X + 3)$ *est-elle libre?*
2. *La famille* $(X^3 + X - 2, X^2 - 4X + 3, X^3 + X^2 - X - 1, X^2 - 3X + 2)$ *est-elle libre?*

1.4 Théorème de la base incomplète

Théorème 7 (Théorème de la base incomplète)**.** Soit E un espace vectoriel de dimension finie non nulle. Alors toute famille libre peut être complétée en une base de E.

Remarque. *Dans la preuve, on utilise le fait que si* $(e_1, \ldots, e_n)$ *est libre et* $e_{n+1} \notin$ *Vect*$(e_1, \ldots, e_n)$, *alors* $(e_1, \ldots, e_{n+1})$ *est libre, c'est un résultat à retenir.*

Exemples 7.

1. *Compléter* $(X+1, X-1)$ *en une base de* $\mathbb{R}_2[X]$.
2. *Compléter* $(X^2 + 2X - 3, X^2 + X + 1)$ *en une base de* $\mathbb{R}_2[X]$.
3. *compléter la famille* $((X-1)^2, X^2 - 1)$ *en une base de* $\mathbb{R}_2[X]$.
4. *Déterminer une base de* $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X], P(2) = 0\}$ *et la compléter en une base de* $\mathbb{R}_2[X]$.
5. *Compléter la famille* $((1,0,1),(1,-1,1))$ *en une base de* $\mathbb{R}^3$.

1.5 Dimension d'un sous-espace vectoriel

Théorème 8.
Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E. Alors

- F est de dimension finie et $\dim(F) \leqslant \dim(E)$.
- Si $\dim(F) = \dim(E)$, alors $F = E$.

On ne dit pas que deux espaces vectoriels qui ont même dimension sont égaux mais que s'ils ont même dimension ET que l'un est inclus dans l'autre, alors ils sont égaux.

Corollaire 9.
Soit F un sous-espace vectoriel strict de E, avec E de dimension finie, alors $\dim(F) < \dim(E)$.

Ce résultat est très utile pour déterminer la dimension d'un espace lorsqu'il n'est pas trop compliqué :

Exemples 8.

1. *Soit* $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 0\}$, *déterminer sa dimension.*
2. *Soit* $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X], P(1) = 0\}$, *déterminer sa dimension.*

Définition 4. Soit E un ev de dimension n. On dit qu'un ssev F de E est un hyperplan si $\dim(F) = n-1$.

Exemple 9. *Soit F un hyperplan de E, comment compléter une base de F en une base de E?*

2 Somme et somme directe

2.1 Somme

Proposition 10.
Soit F et G deux ssev de dimension finie d'un ev E, alors $F + G$ est un ssev de dimension finie.

Proposition 11 (Formule de Grassman)**.** Soit F, G des sous-espaces vectoriels de dimension finie. Alors $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$.

On l'admet pour le moment.

2.2 Somme directe

Proposition 12.
Soit F, G deux sous-espaces vectoriels de dimension finie d'un espace vectoriel E. Alors

F et G sont en somme directe si et seulement si la concaténation d'une base de F et d'une base de G est une base de $F \oplus G$.

Autrement dit,

F et G sont en somme directe si et seulement si la concaténation d'une base de F et d'une base de G est une famille libre.

Exemple 10. *Soit* $F = \mathit{Vect}(X^2 + 2X - 3, 2X^2 + X + 1)$ *et* $G = \mathit{Vect}(3X^2 - X + 1)$. *Ces ssev sont-ils en somme directe?*

Théorème 13.
Soit E un espace vectoriel E, F et G deux sous-espaces vectoriels de dimension finie de E en somme directe. Alors
$$\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G).$$

2.3 Espaces supplémentaires

En combinant la caractérisation des sommes directes et la définition de supplémentaire, on obtient :

Proposition 14.
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace E de dimension finie. Alors F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si la concaténation d'une base de F et d'une base de G donne une base de E.

Exemple 11. *Soit $F = Vect(X^2 + X + 1, X^2 - X)$, déterminer deux supplémentaires différents de F dans $\mathbb{R}_2[X]$.*

Théorème 15.
Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E. Alors F admet un supplémentaire dans E, de dimension $\dim(E) - \dim(F)$.

Exemple 12. *Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y - z = 0\}$ et cherchons lui un supplémentaire dans $\mathbb{R}^3$.*

3 Application linéaire en dimension finie

3.1 dimension finie et isomorphisme à $\mathbb{K}^n$

Proposition 16.
Soit E un espace vectoriel de dimension n, alors E est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

3.2 Rang d'une application

On suppose que E est de dimension finie.

Proposition 17.
Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. L'image par f d'une base de E engendre l'image de f. Autrement dit, si $(u_1, \dots, u_p)$ est une base de E, alors $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{vect}\big(f(u_1), \dots, f(u_p)\big)$.

Remarque : On n'a pas utilisé le caractère libre de $(u_1, \dots, u_p)$! En effet, le résultat reste vrai si on prend $(u_1, \dots, u_p)$ une famille qui est seulement "génératrice finie" de E.

Définition 5. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, on appelle rang de f, noté $\mathrm{rg}(f)$ la dimension de son image : $\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f))$.

Remarque : On sait que $\mathrm{Im}(f)$ est de dimension finie car elle admet une famille génératrice finie.

Exemples 13.

1. *Soit l'application linéaire* $f : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{K}_n[X] & \to & \mathbb{K}_n[X] \\ P & \mapsto & P + P' \end{array} \right.$. *Déterminer l'image de* f.

2. *On considère l'application* $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & P'(X+1) \end{array} \right.$. *Déterminer son image.*

Proposition 18.
Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E, alors

- f est surjective si et seulement si $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est génératrice de F.
- f est injective si et seulement si $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est libre.

Proposition 19.
Soit E et F de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E,F)$.

- $\text{rg}(f) \leqslant \dim F$;
- f est surjective si et seulement si $\dim F = \text{rg}(f)$;
- Si f est surjective, alors $\dim(E) \geqslant \dim(F)$.

⚠ si E et F sont de dimensions finies avec $\dim F \leqslant \dim E$, une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E,F)$ n'est pas nécessairement surjective.

Exemple 14. *Considérons* $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x,x) \end{array} \right.$.

La contraposée nous permet d'affirmer immédiatement qu'une application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ ne peut pas être surjective car $\dim(\mathbb{R}^2) < \dim(\mathbb{R}^3)$!

Corollaire 20.
Si E et F sont isomorphes et de dimension finie, alors $\dim(E) = \dim(F)$.

Remarque. *On savait déjà que deux espaces vectoriels de même dimension finie était isomorphes (car tous les deux isomorphes à* $\mathbb{K}^n$*), on a ici la réciproque.*

⚠ On ne dit pas qu'un endomorphisme entre deux espaces de même dimension est un isomorphisme.

Exemple 15. *Considérons* $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x,x,x) \end{array} \right.$.

3.3 Théorème du rang.

Dans tout ce paragraphe, on suppose E de dimension finie. On commence par montrer ce résultat :

Théorème 21.
Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Soit G un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(f)$ dans E. Alors G est isomorphe à $\mathrm{Im}(f)$.
Précisément, la restriction $f|_G^{\mathrm{Im}(f)} : \left\{ \begin{array}{ccc} G & \to & \mathrm{Im}(f) \\ x & \mapsto & f(x) \end{array} \right.$ réalise un isomorphisme de G dans $\mathrm{Im}(f)$.

Théorème 22.
Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. On a:

$$\dim(\mathrm{Ker}(f)) + \mathrm{rg}(f) = \dim(E).$$

⚠ On ne dit PAS DU TOUT que $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$ sont supplémentaires car cela n'a aucun sens vu que $\mathrm{Im}(f) \subset F$ et $\mathrm{Ker}(f) \subset E$.

Exemples 16.

1. *Soit* $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x-y, y-z, z-x) \end{array} \right.$. *Déterminer le noyau et l'image.*
2. *On reprend l'application* $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & P'(X+1) \end{array} \right.$, *déterminer son noyau et son image.*

Corollaire 23.
Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et F de dimension finie.

- f est injective si et seulement si $\dim(E) = \mathrm{rg}(f)$.
- Si f est injective, alors $\dim(E) \leqslant \dim(F)$.

⚠ si E et F sont de dimensions finies avec $\dim E \leqslant \dim F$, une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E,F)$ n'est pas nécessairement injective.

Remarque. *De même que précédemment, on peut affirmer qu'une application linéaire* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *ne peut pas être injective car dim*$(\mathbb{R}^2) <$ *dim*$(\mathbb{R}^3)$.

3.4 Caractérisation des isomorphismes en dimension finie.

Théorème 24.
Soient E et F deux espaces vectoriels de **dimensions finies** et **égales**. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.
Alors :

$$f \text{ est injective} \iff f \text{ est surjective} \iff f \text{ est bijective.}$$

⚠ On ne dit pas qu'une application linéaire entre deux ssev de même dimension finie est bijective ! Juste, qu'il suffit d'avoir l'injectivité ou la surjectivité pour avoir la bijectivité.

Remarque : Ce résultat s'applique en particulier aux endomorphismes d'un ev de dimension finie. En notant $n = \dim E = \dim F$, on obtient aussi :

Corollaire 25.
Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. f est bijective
2. $\text{rang}(f) = n$
3. f admet "un inverse à gauche": $\exists g \in \mathcal{L}(F,E), \quad g \circ f = \text{id}_E$
4. f admet "un inverse à droite" :$\exists h \in \mathcal{L}(F,E), \quad f \circ h = \text{id}_F$.

Dans ce cas, on a: $\quad g = h = f^{-1}$.

Remarque : cela devrait vous rappeler les histoires de matrices qui sont inversibles si elles admettent uniquement un inverse à gauche ou à droite. Cela découle effectivement de ce résultat, couplé avec le lien entre les matrices et les applications linéaires que nous verrons très prochainement.

4 Formes linéaires et hyperplans.

Définition 6. Soit E un espace vectoriel de dimension n. On appelle hyperplan de E tout s.e.v. de E de dimension $n-1$.

Proposition 26.
Étant donné un hyperplan H de E, tout vecteur de $E \backslash H$ engendre une droite supplémentaire à H:

$$\forall u \in E \setminus H, \quad E = H \oplus \text{Vect}(u).$$

Définition 7. On appelle forme linéaire sur E toute application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.

Exemples 17.

1. *La trace* $\text{Tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ *est une forme linéaire sur* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

2. *Pour* $a \in \mathbb{K}$ *fixé, l'évaluation des polynômes en* a, $\varphi_a : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}$ *est une forme linéaire sur* $\mathbb{K}[X]$.

Proposition 27.
Soit $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ une forme linéaire non nulle.
Alors f est surjective et $\ker(f)$ est un hyperplan de E.

Ce résultat possède une réciproque :

Théorème 28.
Tout hyperplan H de E est le noyau d'une forme linéaire non nulle sur E:

$$\exists f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K}), \quad \ker(f) = H.$$