Lycée du Parc
PCSI 842 — Année 2024-2025
Feuille 20

TD 20: Algèbre linéaire en dimension finie.

1 Somme directe et espaces supplémentaires

Exercice 1.
Montrer que $\mathbb{R}_1[X]$ et vect $\big((1+X+X^2)\big)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 2.
Montrer que $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x+y+z=0\}$ et $F' = \mathrm{Vect}(1,1,1)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3.
Soit $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, 2x-y=0=x+z\}$ et $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x+y+z=0\}$. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$. puis déterminer l'expression de la projection sur F parallèlement à G.

Exercice 4.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

1. On suppose $\dim(F)+\dim(G) > \dim(E)$, la somme est-elle directe?
2. On suppose $\dim(F)+\dim(G) \leqslant \dim(E)$, la somme est-elle directe.

Exercice 5.
Montrer que : $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ puis donner une base adaptée à cette somme directe.

Exercice 6.
Déterminer un supplémentaire dans $\mathbb{R}^4$ de

$$F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, x+y+z=0=2x-y+2z+t\}.$$

Exercice 7.
Soit $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X], P(2)=0\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel et en donner une famille génératrice.
2. Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, déterminer un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}_n[X]$ engendré par un polynôme de degré k.

2 Familles libres, génératrices, bases

Exercice 8.
Les familles suivantes de $\mathbb{R}^3$ en sont-elles des bases de $\mathbb{R}^3$?

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_1 &= \big((1,2,3),\ (4,5,6)\big) \\
\mathcal{F}_2 &= \big((1,2,3),\ (4,5,6),\ (7,8,9),\ (10,11,12)\big) \\
\mathcal{F}_3 &= \big((1,2,3),\ (4,5,6),\ (7,8,9)\big) \\
\mathcal{F}_4 &= \big((1,0,0),\ (a,b,0),\ (c,d,e)\big) \qquad (a,b,c,d,e \in \mathbb{R})
\end{aligned}$$

Exercice 9.
Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $(e_1,\cdots,e_n)$ une base de E. Montrer que la famille :

$$(e_1, e_1+e_2, \cdots, e_1+\cdots+e_n)$$

est une base de E.

Exercice 10.
Soit $G = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, x+y+z-t = x-3y-2z=0\}$. Déterminer une base et un supplémentaire dans $\mathbb{R}^4$ de G.

Exercice 11.
Montrer que les polynômes $P_1 = X, P_2 = X-1$ et $P_3 = (X-1)^2$ forment une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Déterminer les coordonnées du polynôme $P = 2X^2-5X+6$ dans cette base.

Exercice 12.
Soient $a_1,\ldots,a_n \in \mathbb{K}$ deux-à-deux distincts. On considère, pour tout $i \in \{1,\ldots,n\}$, le polynôme :

$$L_i(X) = \frac{\displaystyle\prod_{\substack{j\in\{1,\ldots,n\}\\ j\neq i}} (X-a_j)}{\displaystyle\prod_{\substack{j\in\{1,\ldots,n\}\\ j\neq i}} (a_i-a_j)}.$$

1. Montrer que $(L_1,\ldots,L_n)$ est une base de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$.
2. On pose $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, $n=3$ et :

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = -2, \quad \alpha_3 = 1.$$

   (a) Calculer les polynômes L_1, L_2 et L_3

   (b) Calculer les coordonnées de chacun des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ dans la base (L_1,L_2,L_3).

Exercice 13.
Soit $(v_1,\dots,v_k)$ une famille libre de E. Donner le rang des familles suivantes :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_1 &= (v_1,\ v_1+v_2,\ \dots,\ v_1+v_2+\cdots+v_k)\\ \mathcal{F}_2 &= (v_1-v_2,\ v_2-v_3,\ \dots,\ v_{k-1}-v_k,\ v_k-v_1)\\ \mathcal{F}_3 &= (v_1+v_2,\ v_2+v_3,\ \dots, v_{k-1}+v_k,\ v_k+v_1)\end{aligned}$$

3 Sous-ev et dimension

Exercice 14.
Déterminer une base et la dimension des ssev suivants :

1. $F_1 = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, -x+3y+z=0\}$.
2. $F_2 = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, x+y+z=0=x-3y\}$.
3. $F_3 = \left\{\begin{pmatrix} a & b & 0\\ b & a & 0\\ c & 0 & a+b\end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{R}), (a,b,c)\in\mathbb{R}^3\right\}$.

Exercice 15.
On note $F=\{P\in\mathbb{R}_3[X], P(0)=0\}$. Donner une base de F et sa dimension.

Exercice 16.

1. Montrer que $\mathbb{R}_1[X]=\mathrm{vect}(1+X,1-X)$.
2. Montrer que $\mathbb{R}_2[X]=\mathrm{vect}((1+X)^2,(1+X)(1-X),(1-X)^2)$.
3. Montrer que $\mathrm{vect}((1,5,3),(2,8,-1))=\mathrm{vect}((0,2,7),(1,3,-4))$.

Exercice 17.
Soit $E=\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \forall n\in\mathbb{N}, x_{n+3}-x_{n+2}-x_{n+1}+x_n=0\}$,

$F=\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \forall n\in\mathbb{N}, x_n+x_{n+1}=0\}$ et
$G=\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \forall n\in\mathbb{N}, x_{n+2}-2x_{n+1}+x_n=0\}$.

1. Montrer que $F\oplus G=E$.
2. En déduire la dimension de E.

4 Application linéaire en dimension finie

Exercice 18.
Montrer que l'application $f:\left\{\begin{array}{lcl}\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3\\ (x,y) & \mapsto & (x+y,x-y,2x)\end{array}\right.$ est linéaire et déterminer son image et son noyau.

Exercice 19.
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n. Montrer qu'il existe $u\in\mathcal{L}(E)$ tel que $\mathrm{Im}(u)=\mathrm{Ker}(u)$ ssi n est pair.

Exercice 20.
Montrer qu'il existe une application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que

$$f(1,0,0)=(1,0), f(1,1,0)=(1,0) \text{ et } f(1,1,1)=(1,1)$$

Déterminer f et calculer son noyau et son image.

Exercice 21.
Soit $f\in\mathcal{L}(E)$, avec E de dimension finie tel que $f^2=4id_E$, montrer l'inclusion $\mathrm{Im}(f-2id_E)\subset\ker(f+2id_E)$ puis l'égalité $\mathrm{Im}(f-2id_E)\oplus\mathrm{Ker}(f-2id_E)=E$.

Exercice 22.
Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et ϕ : $\begin{array}{ccc}\mathbb{R}_{n+1}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X]\\ P & \mapsto & (n+1)P-XP'\end{array}$

1. Montrer que ϕ est bien définie, et linéaire.
2. Déterminer une base de $\ker(\phi)$.
3. Quel est le rang de ϕ ? En déduire que ϕ est surjective.
4. Résoudre l'équation (sur $P\in\mathbb{R}_{n+1}[X]$) suivante : $(n+1)P=XP'+X$.

Exercice 23.
Soit ϕ_A : $\begin{array}{ccc}M_{31}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & M_{31}(\mathbb{R})\\ X & \mapsto & AX\end{array}$ avec $A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 0\\ -1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$.

1. Déterminer une base de $\ker(\phi_A)$.
2. Quel est le rang de ϕ_A ?
3. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(\phi_A)$.

5 Projection

Exercice 24.
Soit $f:\left\{\begin{array}{lcl}\mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R}^4\\ (x,y,z,t) & \mapsto & (x,y,z,z).\end{array}\right.$

1. Montrer que f est un projecteur.
2. Déterminer son noyau et son image.
3. Donner l'image de $(1,2,3,4)$ par la symétrie d'axe $\mathrm{Im}(f)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(f)$.

Exercice 25.
Soit ϕ_A : $\begin{array}{ccc} M_{21}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & M_{21}\mathbb{R} \\ X & \mapsto & AX \end{array}$ avec $A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.
Montrer que ϕ_A est un projecteur, et en déterminer les éléments caractéristiques

Exercice 26.
Soit ϕ_A : $\begin{array}{ccc} M_{31}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & M_{31}(\mathbb{R}) \\ X & \mapsto & AX \end{array}$ avec $A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix}$.
Montrer que ϕ_A est une symétrie, et en déterminer les éléments caractéristiques.

6 Formes linéaires et hyperplans

Exercice 27.
Soit E de dimension finie et soit f et g des formes linéaires telles que $\forall x \in E, f(x)g(x) = 0$ Montrer que $f = 0$ ou $g = 0$.

7 Si besoin d'encore un peu d'entrainement

Exercice 28.
Soit $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X], P(-1) = P(0) = P(1) = 0\}$,
$G = \{P \in \mathbb{R}_3[X], P(0) = P(1) = P(2) = 0\}$ et $H = \{P \in \mathbb{R}_3[X], P(0) = P(1) = 0\}$.
Montrer que $F \oplus G = H$

Exercice 29.
On considère les s.e.v. $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$, $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ et $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, formés respectivement des matrices :

- diagonales;
- triangulaires supérieures strictes ;
- triangulaires inférieures strictes.

Montrer que :
$$\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{D}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{T}_n^-(\mathbb{K}).$$

Exercice 30.
Soit $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y + z = 0 = 2x - y + 2z + t\}$. Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice 31.
Déterminer un supplémentaire de Vect $\big((X-1)^2, (X+1)^2\big)$ dans $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 32.
On pose $u = (1, 1, 1)$, $v = (0, 1, 1)$ et $w = (1, 1, 0)$. Montrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 33.
Soit $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + 2y - z = x - y = t = 0\}$. Déterminer une base et un supplémentaire dans $\mathbb{R}^4$ de F.

Exercice 34.
1. Montrer que $v_1 = (1, -2, 3), v_2 = (-2, 3, -1)$ et $v_3 = (3, 2, 1)$ forment un base de $\mathbb{R}^3$.
2. Donner les coordonnées dans cette base des vecteurs suivants: $(0, 0, 0)$ et $(1, -2, 3)$.

Exercice 35.
Soit $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + 3y + z - 2t = 0$ et $x + z = 0\}$

1. Déterminer une base de F et sa dimension.
2. Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^4$ et une base de ce supplémentaire.

Exercice 36.
On note $G = \{P \in \mathbb{R}_3[X], P(1) = 0 = P(2)\}$. Donner une base de G et sa dimension.

Exercice 37.
Montrer que $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \mapsto (2x - 3y + z, x - y + z/3)$. est linéaire et calculer son noyau et son image.

Exercice 38.
Montrer que $f : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x + y, 2z, y + z) \end{array} \right.$ est un automorphisme et expliciter sa bijection réciproque.

8 Une fois qu'on est à l'aise

Exercice 39.
Soient $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{K}$ deux-à-deux distincts ($k \leqslant n$). Déterminer une base, la dimension et un supplémentaire dans $\mathbb{K}_n[X]$ du s.e.v. :
$$F = \{P \in \mathbb{K}_n[X] \mid P(a_1) = \cdots = P(a_k) = 0\}.$$

Exercice 40.
On suppose E de dimension finie.
Montrer que deux s.e.v. de E de même dimension admettent un supplémentaire commun.

Exercice 41.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, F un sous-espace vectoriel de E et $u \in (E)$ tels que $\mathrm{Ker}(u) \oplus F = E$. Montrer que $\dim u(F) = \dim F$.

Exercice 42.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension non nulle n, $f, g \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que $\mathrm{rg}(f \circ g) \leqslant \min(\mathrm{rg}(f), \mathrm{rg}(g))$.
2. Montrer que $|\mathrm{rg}(f) - \mathrm{rg}(g)| \leqslant \mathrm{rg}(f+g) \leqslant \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g)$.
3. On suppose que, de plus, $f+g$ est un automorphisme de E et $f \circ g = 0$. Montrer que $\ker(f) = Im(g)$.

Exercice 43.
Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E et soit φ : $\begin{cases} F \times G & \longrightarrow & E \\ (x,y) & \longmapsto & x+y \end{cases}$. Démontrer la formule de Grassman en utilisant φ.

Exercice 44.
Soit $f \in (E)$ telle que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f)$ avec E de dimension finie. Montrer qu'il existe $g \in (E)$ tel que $f \circ g + g \circ f = id_E$.

Exercice 45.
Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$. Montrer que les propriétés (1) à (3) sont équivalentes.

$$(1)\ \ \mathbb{R}^n = \mathrm{Im}(f) \bigoplus \ker(f) \qquad (2)\ \ \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2) \qquad (3)\ \ \ker(f) = \ker(f^2)$$

Exercice 46.

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie.

1. Montrer que les suites $\mathrm{Im}(u^n)$ et $\ker(u^n)$ sont monotones (pour l'inclusion) et constantes à partir d'un certain rang N.
2. Montrer alors que $E = \ker(u^N) \bigoplus \mathrm{Im}(u^N)$.
3. Démontrer que $F = \ker(u^N)$ et $G = \mathrm{Im}(u^N)$ sont stables par u.
4. On note $g = u|_G$ et $h = u|_F$. Démontrer que g est inversible et h est nilpotent.

Exercice 47.
Soit E de dimension finie, H un hyperplan de E et $u \in \mathcal{L}(E)$. Supposons que H soit stable par u. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{Im}(u - \lambda id_E) \subset H$.

Exercice 48.
Soit E un $\mathbb{K}$ ev de dimension finie $n \geqslant 2$, H_1 et H_2 deux hyperplans, déterminer $\dim(H_1 \cap H_2)$.

Memo

- Comment montrer que deux sous-espaces vectoriels sont égaux?
  Montrer une inclusion et l'égalité des dimensions.
- Comment montrer qu'une famille est liée? montrer que son cardinal est supérieur à la dimension de l'espace.
- Comment montrer que deux sous-espaces vectoriels ne sont pas en somme directe?
  Montrer que la somme des dimensions est supérieure strictement à la dimension de l'espace.
- Comment montrer que deux sous-espaces de E sont supplémentaires dans E?
  - Montrer que la concaténation de deux bases est une base de E.
  - Montrer que la somme est directe et que la somme des dimensions est égale à la dimension de E.
- Comment déterminer un supplémentaire dans E d'un sous-espace vectoriel F?
  Compléter une base de F en une base de E.
- Comment déterminer l'image d'une application linéaire?
  - Prendre un élément de l'espace d'arrivée et raisonner par équivalence.
  - Calculer l'image d'une base.
  - Utiliser le théorème du rang: Montrer que l'image est incluse dans un ssev et conclure grâce à la dimension.
- Comment déterminer le noyau d'une application linéaire?
  - Prendre un élément de l'espace de départ et raisonner par équivalence.
  - Utiliser le théorème du rang si on connait l'image
- Comment déterminer si une application linéaire f est un isomorphisme?
  - Résoudre l'équation $f(X) = Y$
  - Déterminer le noyau ou l'image et conclure avec le thm du rang.