Correction du TD n 16

Correction 1 On remarque que la suite nulle vérifie la relation donc elle appartient à F ce qui montre que F est non vide. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux éléments de F et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrons que $(\lambda u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à F. On a :

$$3(\lambda u_n + v_n) + 2n(\lambda u_{n-1} + v_{n-1}) = \lambda \underbrace{(3u_n + 2nu_{n-1})}_{=u_{n+1}\text{car } (u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in F} + \underbrace{(3v_n + 2nv_{n-1})}_{=v_{n+1}\text{car } (v_n)_{n\in\mathbb{N}}\in F},$$

ainsi, on a

Correction 2 On remarque que la fonction nulle vérifie $f(0) = f'(1) = 0$ donc elle appartient à F ce qui montre que F est non vide. Soient maintenant f et g deux éléments de F et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrons que $\lambda f + g$ est un élément de F. On a :

$$\begin{aligned}(\lambda f + g)(0) &= \lambda f(0) + g(0)\\ &= 0\text{car } f(0) = g(0) = 0\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}(\lambda f + g)'(1) &= \lambda f'(1) + g'(1)\\ &= 0\text{car } f'(1) = g'(1) = 0\end{aligned}$$

On a donc bien $\lambda f + g \in F$, ce qui montre que F est un sous-espace vectoriel.

Correction 3 On a $A\cap B \subset A$ et $A \subset \mathrm{vect}(A)$ donc $A\cap B \subset \mathrm{Vect}(A)$. De même, $A\cap B \subset B$ et $B \subset \mathrm{vect}(B)$ donc $A\cap B \subset \mathrm{Vect}(B)$. On a alors $A\cap B \subset \mathrm{vect}(A)\cap\mathrm{vect}(B)$. Comme $\mathrm{vect}(A)\cap\mathrm{vect}(B)$ est un espace vectoriel qui contient $A\cap B$, on a $\mathrm{vect}(A\cap B) \subset \mathrm{vect}(A)\cap\mathrm{vect}(B)$.

Montrons qu'il n'y a, en général, pas égalité. Soient $A = \{X\}$, $B = \{2X\}$, alors $A\cap B = \emptyset$ donc $\mathrm{vect}(A\cap B) = \{0\}$ mais $\mathrm{vect}(A) = \mathrm{vect}(B) = \mathrm{vect}(X)$ ce qui montre que l'inclusion est stricte.

Correction 4 Soit $P \in F + G + H$, alors $P = a + A + \lambda(1 + X)$ avec $(a, \lambda) \in \mathbb{R}^2$ et $A \in G$. Montrons que (a, A, λ) est unique. On a $\lambda + a = P(0)$ et $\lambda = P'(0)$ donc $a = P(0) - P'(0)$ puis $A = P - P(0) - P'(0)X$ ce qui montre l'unicité de l'écriture. La somme est bien directe.

Correction 5 Montrons, par analyse/synthèse, que toute fonction continue s'écrit comme la somme d'un élément de F et d'un élément de G.

Analyse :Soit $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $(f, g) \in F \times G$ tel que $h = f + g$. On sait qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = ax + b$. On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = f(x) + ax + b.$$

Cela implique, d'une part, $h(0) = b$ et, d'autre part, par linéarité de l'intégrale :

$$\int_0^1 h(t)\,\mathrm{d}t = \underbrace{\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t}_{=0 \text{ car } f\in F} + \int_0^1 (at + b)\,\mathrm{d}t.$$

On a donc $\displaystyle\int_0^1 h(t)\,\mathrm{d}t = \frac{a}{2} + b$ d'où $a = 2\left(\displaystyle\int_0^1 h(t)\,\mathrm{d}t\right) - 2h(0)$.

Synthèse :Soit $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. Posons $b = h(0)$, $a = 2\left(\displaystyle\int_0^1 h(t)\,\mathrm{d}t\right) - 2h(0)$, $g : x \mapsto ax+b$ et $f = h - g$. Montrons que :

- $f \in F$,
- $g \in G$ et
- $h = f + g$.

Les deux derniers points sont clairs, montrons le premier:

$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 h(t) - g(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 h(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 (at + b)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 h(t)\,\mathrm{d}t - \frac{a}{2} - b.$$

Par définition de a et b, on a bien $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ donc $f \in F$. Par analyse/synthèse, on a montré que toute fonction continue f s'écrit comme la somme d'un élément de F et d'un élément de G. De plus, d'après la phase d'analyse, on a montré que cette écriture est unique ce qui montre l'inclusion $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \subset F \oplus G$ d'où l'égalité.

Correction 6 Soit P un élément de l'intersection. Alors $P = \lambda(X^3+2)$ et $P'(1) = 0$. On a $P'(1) = 3\lambda$ donc $\lambda = 0$ et $P = 0$. L'inclusion $\{0\} \subset F$ étant toujours vraie, la somme est bien directe.

Correction 7 1. On se donne une fonction h quelconque de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. Que faut-il lui soustraire pour qu'elle appartienne à F? Il est clair que $x \mapsto h(x) - (h(0) + h'(0))$ appartient à F. Si on pose G l'ensemble des fonctions constantes, on vient de montrer que tout élément h de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ s'écrit :

$$h = \underbrace{h - ((h(0) + h'(0))}_{\in F} + \underbrace{(h(0) + h'(0))}_{\in G},$$

ce qui montre l'égalité $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}) = F + G$. Comme il est clair que F et G sont en somme directe (ils n'ont que la fonction nulle en commun et l'autre inclusion étant toujours vraie, on a bien $F \cap G = \{0\}$), G est bien un supplémentaire de F dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

2. On peut prendre $H = \text{Vect}(x \mapsto x^2 + 1)$. Notons $c : x \mapsto x^2$. Soit une fonction h quelconque de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, alors

$$h = \underbrace{h - ((h(0) + h'(0))}_{\in F} + \underbrace{(h(0) + h'(0))}_{\in G},$$

donc

$$h = \underbrace{h - ((h(0) + h'(0)) - ((h(0) + h'(0))\, c}_{\in F} + \underbrace{(h(0) + h'(0))\,(1 + c)}_{\in H},$$

car $h - ((h(0) + h'(0)) - ((h(0) + h'(0))\, c$ est un élément de F en tant que CL d'éléments de F. Par ailleurs, la somme est directe car si une fonction est de la forme $\lambda(c+1)$ et qu'elle appartient à F, alors $\lambda = 0$ donc c'est la fonction nulle.

Correction 8 Notons F l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $u_3 = 0$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite quelconque, alors :

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \underbrace{(u_n - u_3)_{n\in\mathbb{N}}}_{\in F} + (u_3)_{n\in\mathbb{N}}.$$

On a montré que toute suite s'écrit comme la somme d'un élément de F et un élément de l'ensemble G des suites constantes. Il est clair que l'ensemble des suites constantes est en somme directe avec F (ils n'ont que la suite nulle en commun et l'autre inclusion étant toujours vraie, on a bien $F \cap G = \{0\}$) donc c'est un supplémentaire de F dans l'ensemble des suites.

Correction 9 On remarque tout d'abord que $A \in F$ ce qui montre que F est non vide. Soient maintenant $(P_1, P_2) \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors A divise P_1 donc λP_1 et A divise P_2. On en déduit que A divise $\lambda P_1 + P_2$ donc $\lambda P_1 + P_2 \in F$ ce qui montre que F est stable par combinaison linéaire. On en déduit que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

Soit maintenant $P \in \mathbb{R}[X]$ alors, il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{R}[X]^2$ avec $\deg(R) < 2$ tel que :

$$P = AQ + R.$$

Le polynôme AQ est un élément de F, on donc montré qu'un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ s'écrit, de manière unique, comme la somme d'un élément de F et d'un élément de $\mathbb{R}_2[X]$. On en déduit que $\mathbb{R}_2[X]$ est un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}[X]$.

Correction 10 Soient $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ quatre réels tels que $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3 + \alpha_4 f_4 = 0$. On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \alpha_1 \cos x + \alpha_2 x \cos x + \alpha_3 \sin x + \alpha_4 x \sin x = 0.$$

Pour $x = 0$, on obtient $\alpha_1 = 0$. On pose ensuite $x = \pi$, ce qui donne $\pi\alpha_2 = 0$ donc $\alpha_2 = 0$. On évalue ensuite en $x = \dfrac{\pi}{2}$ et $x = \dfrac{3\pi}{2}$, on obtient $\alpha_3 + \dfrac{\pi}{2}\alpha_4 = 0$ et $-\alpha_3 - \dfrac{3\pi}{2}\alpha_4 = 0$ ce qui implique $\alpha_3 = \alpha_4 = 0$ et la famille est par conséquent libre.

Correction 11 Soient λ, μ, ν trois réels tels que la suite $(\lambda + \mu n^2 + \nu 2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit nulle et montrons que $\lambda = \mu = \nu = 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\lambda + \mu n^2 + \nu 2^n = 0$$

On a donc, pour $n = 0, 1$ et 2,

$$\begin{cases} \lambda + \nu = 0 \\ \lambda + \mu + 2\nu = 0 \\ \lambda + 4\mu + 4\nu = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\nu \\ \mu = \lambda \\ \lambda = 0 \end{cases}$$

d'où $\lambda = \mu = \nu = 0$ et la famille est bien libre.

Correction 12 Soient α, β, γ trois réels tels que $\alpha(x+y) + \beta(y+z) + \gamma(z+x) = 0$, on a alors :

$$(\alpha + \gamma)x + (\alpha + \beta)y + (\beta + \gamma)z = 0$$

et comme la famille (x, y, z) est libre, on a $\alpha + \gamma = \alpha + \beta = \beta + \gamma = 0$ ce qui impose $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Correction 13

1. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned} (a,b,c) \in F_1 &\Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b + c &= 0 \\ 2a + b + 3c &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3b - c &= 0 \\ 3a + 5c &= 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow (a,b,c) = \frac{c}{3}(-5, 1, 3). \end{aligned}$$

Par équivalence, on a montré: $F_1 = \text{Vect}(-5, 1, 3)$ donc F_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et le vecteur $(-5, 1, 3)$ engendre une famille génératrice de F_1.

2. Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. On raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned} (a,b,c,d) \in F_2 &\Leftrightarrow a + 3b - c = d \\ &\Leftrightarrow (a,b,c,d) = a(1,0,0,1) + b(0,1,0,3) + c(0,0,1,-1). \end{aligned}$$

Par équivalence, on a montré $F_2 = \text{Vect}\,(1,0,0,1), (0,1,0,3), (0,0,1,-1))$ donc F_2 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et une famille génératrice de F_2 est $((1,0,0,1), (0,1,0,3), (0,0,1,-1))$.

3. Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, a;ors

$$f \in F_3 \Leftrightarrow \exists(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2, f = \alpha \sin + \beta \cos,$$

donc $F_3 = \mathrm{Vect}(\sin, \cos)$, c'est un ev et $(\sin, \cos)$ est une famille génératrice de F_3.

Correction 14 On sait que pour tout $x \in E$, il existe λ_x réel tel que $f(x) = \lambda_x x$. Montrons que λ_x ne dépend pas de x. Soient $x \in E$ non nul et α un réel, alors $f(\alpha x) = \lambda_{\alpha x}\alpha x$ et comme f est linéaire, $f(\alpha x) = \alpha f(x) = \alpha\lambda_x x$ donc, comme $x \neq 0_E$, $\lambda_x = \lambda_{\alpha x}$; autrement dit, $\lambda_x = \lambda_y, \forall y \in \mathrm{vect}(x)$.

Soit maintenant $y \notin \mathrm{vect}(x)$, alors la famille (x, y) est libre. On a :

$$f(x + y) = \lambda_{x+y}(x + y) = f(x) + f(y) = \lambda_x x + \lambda_y y$$

d'où :

$$(\lambda_{x+y} - \lambda_x)x + (\lambda_{x+y} - \lambda_y)y = 0$$

et la famille étant libre, on a $\lambda_x - \lambda_{x+y} = 0 = \lambda_y - \lambda_{x+y}$ ce qui montre que, pour tout $y \notin \mathrm{vect}(x)$, $\lambda_x = \lambda_y$. On a montré, par disjonction de cas, que :

$$\forall y \in E, \lambda_x = \lambda_y$$

donc λ_x ne dépend pas de x et f est donc bien une homothétie.

Correction 15 Soit $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1})$ tel que $\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i f^i(x_0) = 0_E$. On applique f^{n-1} à l'égalité, on obtient $\lambda_0 f^{n-1}(x_0) = 0_E$ car pour tout $k \geqslant n$, $f^k = 0_{\mathcal{L}(E)}$ donc $f^k(x_0) = 0_E$. On a supposé $f^{n-1}(x_0) \neq 0$, on a donc $\lambda_0 = 0$.

L'égalité devient $\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i f^i(x_0) = 0_E$. On applique maintenant f^{n-2} à l'égalité et on obtient $\lambda_1 f^{n-1}(x_0) = 0_E$ donc $\lambda_1 = 0$. En itérant le procédé, on montre que tous les coefficients sont nuls donc la famille est libre.

Correction 16 1. On a $L_1(X) = \dfrac{(X-1)X}{2} = \dfrac{1}{2}(X^2 - X)$, $L_2(X) = \dfrac{(X+1)X}{2} = \dfrac{1}{2}(X^2 + X)$ et $L_3(X) = \dfrac{(X-1)(X+1)}{-1} = 1 - X^2$.

2. Pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, on a $L_i(a_j) = \delta_{ij}$ c'est-à-dire

$$L_i(a_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 \text{ si } i = j \end{cases}$$

3. Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i L_i = 0$. Soit $j \in [\![1, p]\!]$, alors

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i L_i(a_j) = 0$$

or, d'après la question précédente, tous les $L_(a_j)$ sont nuls sont $L_j(a_j)$ qui vaut 1. La somme est donc égale à λ_j. On obtient $\lambda_j = 0$ et ceci étant valable pour tout entier j, on a montré que la famille $(L_1, \ldots, L_p)$ est libre.

4. Soit $P \in \mathbb{R}_{p-1}[X]$, on pose $Q = \sum_{i=1}^{p} P(a_i)L_i(X)$. Soit $j \in [\![1, p]\!]$, alors

$$Q(a_j) = \sum_{i=1}^{p} P(a_i)L_i(a_j) = P(a_j)$$

en utilisant, à nouveau, $L_i(a_j) = \delta_{ij}$.

5. On sait déjà que $(L_1, \ldots, L_p)$ est une famille libre. Soit $P \in \mathbb{R}_{p-1}[X]$, montrons que $P = \sum_{i=1}^{p} P(a_i)L_i(X)$. D'après la question précédente, $P - \sum_{i=1}^{p} P(a_i)L_i$ s'annule en chaque a_j, il admet donc p racines distinctes. Comme il est de degré au plus $p - 1$, il est nul et on a montré que P s'écrit comme une combinaison linéaire des L_i (on a même explicité les coefficients de la combinaison linéaire). Ainsi, la famille $(L_1, \ldots, L_p)$ est génératrice de $\mathbb{R}_{p-1}[X]$, c'en est donc une base.

Correction 17 1. Le polynôme nul admet α pour racine, l'ensemble F_α est donc non vide. Soient $(P, Q) \in F_\alpha^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrons que $(\lambda P + Q) \in F_\alpha$. On sait que P et Q admettent α pour racine, on doit montrer que le polynôme $\lambda P + Q$ s'annule en α ce qui est clair. L'ensemble F_α est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Si $\alpha = \beta$, alors $F_\alpha = F_\beta = \mathcal{F}_\alpha \cap F_\beta$. Si $\alpha \neq \beta$, on raisonne par équivalence. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Alors :

$$P \in F_\alpha \cap F_\beta \Leftrightarrow P(\alpha) = P(\beta) = 0 \Leftrightarrow (X - \alpha)(X - \beta) \text{ divise } P.$$

Par équivalence, on a montré que $F_\alpha \cap F_\beta$ est l'ensemble des polynômes divisible par $(X - \alpha)(X - \beta)$.

Correction 18 On remarque tout d'abord que la fonction nulle s'écrit $x \mapsto ax\ln(x) + b\ln(x)$ avec $a = 0 = b$ donc elle appartient à F qui est donc non vide.

Soient maintenant f, g deux éléments de F et $\lambda \in \mathbb{R}$. Par définition de F, on sait qu'il existe $(a, b, a', b') \in \mathbb{R}^4$ tel que :

$$f : x \mapsto ax\ln(x) + b\ln(x) \text{ et } g : x \mapsto a'x\ln(x) + b'\ln(x).$$

On a alors, $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$(\lambda f+g)(x) = \lambda(ax\ln(x)+b\ln(x))+a'x\ln(x)+b'\ln(x) = (\lambda a + a')\,x\ln(x)+(\lambda b+b')\ln(x).$$

Comme $(\lambda a + a')$ et $(\lambda b + b')$ sont deux réels, $\lambda f + g$ est bien de la forme souhaitée donc elle appartient à F. Ce dernier est bien un sous-espace vectoriel de E.

Correction 19
Analyse :Soit $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $(f, g) \in F \times G$, $h = f + g$. Il existe alors $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = ax^2 + bx + c$ d'où :

$$\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = f(x) + ax^2 + bx + c.$$

On a :

- $h(0) = f(0) + c = c$ car $f(0) = 0$.
- $h'(0) = f'(0) + b = b$ car $f'(0) = 0$ et
- $h(1) = f(1) + a + b + c = a + b + c$ car $f(1) = 0$.

On en déduit que $a = h(1) - h(0) - h'(0)$, $b = h'(0)$ et $c = h(0)$.

Synthèse :Soit $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. Posons $a = h(1) - h(0) - h'(0)$, $b = h'(0)$, $c = h(0)$, $g : x \mapsto ax^2 + bx + c$ et $f = h - g$. Montrons que :

- $f \in F$,
- $g \in G$ et
- $f + g = h$.

Les deux derniers points sont clairs. En utilisant la phase d'analyse, on montre facilement que $f(0) = 0 = f'(0) = f(1)$ donc $f \in F$. On a montré que tout élément de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ s'écrit comme la somme d'un élément de F et d'un élément de G. De plus, l'unicité de l'écriture a été montrée dans la phase d'analyse. Ainsi, on a $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \subset F \oplus G$ d'où l'égalité.

Correction 20 On raisonne par analyse/synthèse.
Analyse :Soit $f \in \mathcal{C}(R)$. Supposons qu'il existe (g, h) telles que $f = \alpha + h$ avec α constante et $\int_0^1 h(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

Intégrons l'égalité $f = \alpha + h$ entre 0 et 1. Par linéarité de l'intégrale, on a :

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 \alpha\,\mathrm{d}t + \int_0^1 h(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \alpha \text{car} \int_0^1 h(t)\,\mathrm{d}t = 0\end{aligned}$$

On a donc $\alpha = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.

Synthèse :Soit $f \in \mathcal{C}(R)$. Posons $\alpha = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ et $h = f - \alpha$. On a alors

- α est une fonction constante,
- $\int_0^1 h(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (f(t) - \alpha)\,\mathrm{d}t = 0$ par linéarité de l'intégrale.
- $f = \alpha + h$ par définition de h.

On a montré que toute fonction continue s'écrit comme la somme d'une fonction constante et d'une fonction dont l'intégrale entre 0 et 1 est nulle. L'unicité de l'écriture a été montrée dans la phase d'analyse. Les deux espaces sont bien supplémentaires dans $\mathcal{C}(R)$.

Correction 21 On se donne une fonction h quelconque de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. Il est clair que $x \mapsto h(x) - (h(0))$ s'annule en 0 et la dérivée de $x \mapsto h(x) - xh'(0)$ s'annule en 0. Ainsi, la fonction $x \mapsto h(x) - h(0) - xh'(0)$ appartient à F. Si on pose G l'ensemble des fonctions affines, on vient de montrer que tout élément h de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ s'écrit :

$$h = \underbrace{h - ((h(0) + h'(0))}_{\in F} + \underbrace{(h(0) + xh'(0))}_{\in G},$$

ce qui montre l'égalité $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}) = F + G$. Montrons que F et G sont en somme directe. Soit donc $f \in F \cap G$. Alors, il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $f(x) = ax + b$. On a, de plus, $f(0) = 0 = b$ et $f'(0) = 0 = b$ d'où $f = 0$.L'autre inclusion étant toujours vraie, on a bien $F \cap G = \{0\}$. La somme est directe, ainsi G est bien un supplémentaire de F dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

Correction 22 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Faisons la division euclidienne de P par $(X - 1)(X - 2)$:

$$\exists!(Q, R) \in \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}_1[X],\ P(X) = (X - 1)(X - 2)Q(X) + R(X).$$

On a donc :

$$P(X) = \underbrace{(X-1)(X-2)Q(X)}_{\in F} + \underbrace{R(X)}_{\in \mathbb{R}_1[X]}.$$

On a montré que tout élément de $\mathbb{R}[X]$ s'écrit comme la somme d'un élément de F et d'un élément de $\mathbb{R}_1[X]$. De plus, par unicité de la division euclidienne, l'écriture est unique donc $\mathbb{R}_1[X]$ est bien un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}[X]$.

Correction 23 Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$ tel que la fonction $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} \lambda_k f_k$ soit nulle. Montrons que tous ces réels sont nuls.

On pose $g(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cos(kx)$. Cette fonction étant nulle, on a :

$$g(0) = g(\pi) = g\left(\frac{\pi}{2}\right) = g\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0.$$

Les égalités précédentes donnent le système suivant :

$$\begin{cases} \lambda_1 & +\lambda_2 & +\lambda_3 & +\lambda_4 & = & 0 \\ -\lambda_1 & +\lambda_2 & -\lambda_3 & +\lambda_4 & = & 0 \\ & -\lambda_2 & & +\lambda_4 & = & 0 \\ \dfrac{1}{2}\lambda_1 & -\dfrac{1}{2}\lambda_2 & -\lambda_3 & -\frac{1}{2}\lambda_4 & = & 0 \end{cases}$$

On fait $L_2 \leftarrow L_1 + L_2$ et $L_4 \leftarrow L_4 + \dfrac{1}{2}L_1$, on obtient le système équivalent suivant :

$$\begin{cases} \lambda_1 & +\lambda_2 & +\lambda_3 & +\lambda_4 & = & 0 \\ & 2\lambda_2 & & +2\lambda_4 & = & 0 \\ & -\lambda_2 & & +\lambda_4 & = & 0 \\ \lambda_1 & & -\lambda_3 & & = & 0 \end{cases}$$

On en déduit que $\forall i \in [\![1, 4]\!]$, $\lambda_i = 0$ donc la famille est libre.

Correction 24

Correction 25 1. On a l'inclusion $(F \cap G) + (F \cap H) \subset F \cap (G + H)$. En effet, si $x \in (F \cap G) + (F \cap H)$, alors $x = a + b$ avec $a \in (F \cap G)$ et $b \in (F \cap H)$. On a $a \in G$ et $b \in H$ donc $a + b \in G + H$. On a également $a \in F$ et $b \in F$ et comme F est un ssev, $a + b \in F$ d'où l'inclusion.

Remarque: l'inclusion est stricte. Prenons par exemple $F = \mathrm{Vect}(1 + X)$, $G = \mathrm{Vect}(1)$, $H = \mathrm{Vect}(X)$. Alors $F \cap G = F \cap H = \{0\}$ mais $G + H = \mathbb{R}_1[X]$ donc $F \cap (G + H) = F$.

2. On a l'inclusion $F + (G \cap H) \subset (F + G) \cap (F + H)$ En effet, si $x \in F + (G \cap H)$, alors $x = a + b$ avec $a \in F$ et $b \in G \cap H$. On a $b \in G$ donc $a + b \in F + G$. On a également $b \in H$ donc $a + b \in F + H$ d'où l'inclusion.

Remarque: l'inclusion est stricte. On reprend le même exemple, on a $F \cap (G + H) = F = \mathrm{Vect}(1 + X)$, $F \cap G = F \cap H = \{0\}$ donc $(F \cap G) + (F \cap H) = \{0\}$.

3. On applique la première inclusion à F, G et $F \cap H$. On obtient :

$$(F \cap G) + (F \cap (F \cap H)) \subset F \cap (G + F \cap H),$$

donc

$$(F \cap G) + (F \cap H) \subset F \cap (G + F \cap H).$$

On montre ensuite directement la deuxième inclusion. Soit $x \in F \cap (G + F \cap H)$, alors $x = a + b$ avec $x \in F$, $a \in G$ et $b \in F \cap H$. On a $a = x - b \in F$ car F est un ssev donc $a \in F \cap G$. On en déduit que $x \in (F \cap G) + (F \cap H)$. On a bien l'égalité

Correction 26 Soit $f \in E$, on note L_i les polynômes interpolateurs de Lagrange associés à $(a_1, \dots, a_p)$, $\widetilde{L}_i$ leurs fonctions polynomiales associées et G les fonctions polynomiales de degré au plus $p - 1$, alors

$$f = \underbrace{f - \sum_{i=1}^{p} f(a_i) widetildeL_i}_{\in F} + \underbrace{\sum_{i=1}^{p} f(a_i)\widetilde{L}_i}_{\in G}.$$

Par ailleurs, si une fonction polynomiale de degré au plus $p - 1$ s'annule en p points distincts, elle est nulle. Par conséquent, la somme est directe et G est bien un supplémentaire de F dans E.

Correction 27 1. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. On veut montrer qu'il existe un unique $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que

$$P = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i T_i.$$

En identifiant les coefficients, comme chaque T_i est de degré i, on obtient un système triangulaire à $n + 1$ inconnues et $n + 1$ équations avec des pivots non nuls donc il possède une unique solution. Ainsi, chaque élément de $\mathbb{R}_n[X]$ s'écrit, de manière unique, comme combinaison linéaire des T_i ce qui montre que $(T_0, \dots, T_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ on a $f_k = T_k(\cos)$ avec T_k de degré k, donc f_k est une combinaison linéaire des $(g_0, \dots, g_k)$. On a donc, pour tout k, $f_k \in \mathrm{Vect}\,(g_0, \dots, g_n)$ d'où l'inclusion $\mathrm{Vect}\,(f_0, \dots, f_n) \subset \mathrm{Vect}\,(g_0, \dots, g_n)$.

Soit maintenant $k \in [\![0, n]\!]$. On sait qu'il existe $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ unique tel que

$$X^k = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j T_j,$$

car $(T_0, \ldots, T_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos^k(x) = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j T_j(\cos x) = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j \cos(jx)$. Autrement dit, $g_k = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j f_j$, ce qui montre l'autre inclusion.