Lycée du Parc
PCSI 842
DS 8

Année 2024-2025

Devoir d'entrainement 8.

— Exercice 1 algèbre linéaire sujet 1 énoncé
— Exercice 2 algèbre linéaire sujet 1 énoncé
— Exercice 3 d'intégration sujet 2 énoncé
— Exercice 4 algèbre linéaire sujet 2 énoncé
— Exercice 5 d'intégration sujet 1 énoncé
— Exercice 6 d'intégration sujet 2 énoncé
— Exercice 7 d'algèbre linéaire sujet 2 énoncé

Exercice 1 (sujet 1)**.** corrigé

1. Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R}^4 \\ (x,y,z,t) & \mapsto & (x+y,0,z,z) \end{cases}$
   (a) Montrer que f est un projecteur.
   (b) Déterminer son noyau et son image.
   (c) Donner l'image de $(1,2,3,4)$ par la symétrie d'axe $\mathrm{Im}(f)$ parallèlement à $\ker(f)$.
2. Soit $g : \begin{cases} \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z,t) & \mapsto & (x+y-2t,-x+3z-t,2x+y+z-5t) \end{cases}$
   (a) On pose $\varphi = g \circ f$. Donner une expression de $\varphi(x,y,z,t)$ pour $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$.
   (b) i. Déterminer le noyau de φ.
   ii. A-t-on $\ker(f) \subset \ker(\varphi)$?
   iii. De manière générale, si u et v sont deux applications linéaires, a-t-on $\ker(u) \subset \ker(v \circ u)$? (Montrez-le ou donnez un contre-exemple).
   (c) i. Déterminer $\mathrm{Im}(\varphi)$.
   ii. Déterminer $\mathrm{Im}(g)$.
   iii. a-t-on une inclusion entre $\mathrm{Im}(\varphi)$ et $\mathrm{Im}(g)$? Si oui, laquelle.
   iv. De manière générale, si si u et v sont deux applications linéaires, a-t-on $\mathrm{Im}(v \circ u) \subset \mathrm{Im}(v)$? (Montrez-le ou donnez un contre-exemple).
3. (a) Donner une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$.
   (b) Déterminer un supplémentaire de $\mathrm{Im}(f)$ dans $\mathbb{R}^4$ différent de $\ker(f)$.

Exercice 2 (sujet 1)**.** corrigé

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}$. On se donne A et B deux sous-espaces vectoriels de E et on se pose le problème suivant :
A quelle(s) condition(s) existe-t-il un sous-espace vectoriel C tel que : $A+B = A \oplus C = B \oplus C$?

1. Dans cette question on suppose que le sous-espace vectoriel C existe. Montrer que $\dim A = \dim B$ et déterminer $\dim C$.

Dans la suite de notre étude, nous allons supposer $\dim A = \dim B$ et montrer que le sous-espace vectoriel C existe.

2. On étudie, pour commencer, le cas où A et B sont deux hyperplans distincts.
   (a) Justifier l'existence de vecteurs $u \in A$ et $v \in B$ tels que $u \notin B$ et $v \notin A$.
   (b) Établir que $w = u + v \notin A \cup B$
   (c) Observer que $C = \text{vect}(w)$ est solution du problème posé.
3. On revient au cas général et on suppose seulement $\dim A = \dim B$
   (a) Résoudre le problème posé lorsque $A = B$.

   Dans la suite, on suppose $A \neq B$.

   (b) Justifier qu'il existe un sous-espace vectoriel A' de E tel que $(A \cap B) \oplus A' = A$.

   De manière symétrique, on introduit B' sous-espace vectoriel tel que $(A \cap B) \oplus B' = B$.
   (c) Montrer que $A' \cap B' = \{0\}$ et $\dim A' = \dim B' \in \mathbb{N}^*$.

   Dans la suite, on pose $p = \dim A' = \dim B'$. On note $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ et $\mathscr{C} = (f_1, \ldots, f_p)$ des bases, respectivement de A' et B'.
4. On reprend les objets introduits ci-dessus afin de construire un sous-espace vectoriel C qui convient. On forme $\mathscr{D} = (g_1, \ldots, g_p)$ en posant, pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, $g_i = e_i + f_i$.
   (a) Montrer que la famille D est libre.
   (b) On pose $C = \text{vect}(g_1, \ldots, g_p)$. Déterminer $\dim C$.
   (c) Montrer que $A \cap C = \{0\}$.
   (d) Conclure.

Exercice 3 (sujet 2)**.** corrigé

Si g est une fonction continue sur $]a,b]$, prolongeable par continuité en a, on note $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ l'intégrale de son prolongement continu. Autrement dit, l'intégrale $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ existe si g est prolongeable par continuité en a.

Nous admettons le résultat suivant :

Si $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ est de classe $\mathscr{C}^1$, alors $\lim\limits_{x\to\infty}\int_a^b f(t)\cos(xt)dt=\lim\limits_{x\to\infty}\int_a^b f(t)\sin(xt)dt=0$.

Pour tout entier naturel n, on pose $J_n=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\sin(nt)}{\sin t}dt$.

1. (a) Justifier l'existence de J_n.
   (b) Calculer J_0, J_1, J_2, J_3.
2. (a) Si a et b sont deux réels, factoriser $\sin a-\sin b$.
   (b) Pour tout entier naturel $n\geqslant 2$, exprimer J_n-J_{n-2} en fonction de n.
   (c) En déduire que pour tout $N\in\mathbb{N}^*$, $\begin{cases}J_{2N+1}=\dfrac{\pi}{2},\\ J_{2N}=2\displaystyle\sum_{n=0}^{N-1}\frac{(-1)^n}{2n+1}.\end{cases}$
3. (a) Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty}(J_n-J_{n-1})=0$.
   (b) En déduire que $\lim\limits_{n\to\infty}J_n=\dfrac{\pi}{2}$.
4. Déduire des résultats précédents l'égalité : $\boxed{\pi=\lim\limits_{N\to\infty}4\displaystyle\sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n}{2n+1}.}$
5. On définit l'application $g:t\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]\mapsto\begin{cases}\dfrac{1}{\sin t}-\dfrac{1}{t} & \text{si } t\neq 0,\\ 0 & \text{si } t=0.\end{cases}$

   Montrer que g est C^1.
6. (a) Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\sin(nt)}{\sin t}dt-\int_0^{\pi/2}\frac{\sin(nt)}{t}dt\right)$.
   (b) En déduire $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\sin(nt)}{t}dt$.
   (c) A l'aide d'un changement de variable, déterminer $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^{n\pi/2}\frac{\sin(t)}{t}dt$.
7. (a) Montrer que pour tout réel strictement positif x on a :

$$\int_0^x\frac{\sin t}{t}dt=\frac{1-\cos x}{x}+\int_0^x\frac{1-\cos t}{t^2}dt.$$

Vous penserez à prouver que la deuxième intégrale existe.

(b) Montrer que la fonction : $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^x \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t \end{array} \right.$ est croissante, majorée, et qu'elle admet en $+\infty$ une limite réelle, après avoir prouvé (dur) que $\displaystyle\int_1^x \frac{1-\cos t}{t^2}\,dt \leqslant 2$ pour tout $x \geqslant 1$.

(c) En déduire que la fonction : $\mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ admet en $+\infty$ une limite réelle.

(d) Que vaut $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$?

Exercice 4 (sujet 2)**.** corrigé

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^\star$, soit F, G deux sous-espaces vectoriels de E. On note $d_n(F,G) = (\dim(F+G))^2 + (\dim(F\cap G))^2 - (\dim(F))^2 - (\dim(G))^2$.

On veut prouver que

$$\begin{cases} 0 \leqslant d_n(F,G) \leqslant \dfrac{n^2}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 \leqslant d_n(F,G) \leqslant \dfrac{n^2-1}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

On souhaite également montrer que ces inégalités peuvent être atteintes.

Partie A : étude d'exemples

1. On suppose $F \oplus G = E$. Exprimer $d_n(F,G)$ en fonction de $\dim(F)$ et $\dim(G)$.
2. Dans toute cette question, $E = \mathbb{R}^4$. Soit $u = (1,1,0,0)$, $v = (0,0,1,1)$ et $F = \text{Vect}(u,v)$.
   (a) Déterminer une base et la dimension de F.
   (b) Soit $G = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, x-y+z = 0 = 4x-3y+2z+t = 2x-y+t\}$. Montrer que G est un sous-ev de $\mathbb{R}^3$, en déterminer une base et la dimension.
   (c) Montrer que $F \oplus G = \mathbb{R}^4$.
   (d) A-t-on $d_4(A,B) < \dfrac{4^2}{2}$ pour tout ssev A, B de $\mathbb{R}^4$?
3. Dans cette question, on suppose $E = \mathbb{R}_4[X]$, $F = \{P \in E, P(0) = P'(0) = P"(0) = 0\}$ et $G = \{P \in E, P(1) = P'(1) = 0\}$.
   (a) Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E, en déterminer une base et la dimension.
   (b) Montrer que $F \oplus G = E$.
   (c) Existe-t-il deux sous-espaces vectoriels A, B de E tels que $d_5(A,B) = \dfrac{5^2-1}{2}$?
4. Dans cette question, $E = M_3(\mathbb{R})$. On note $S_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de E et $T_3^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures de E.
   (a) Montrer que $S_3(\mathbb{R})$ et $T_3^+(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de E, en déterminer une base et la dimension.
   (b) Déterminer $S_3(\mathbb{R}) \cap T_3^+(\mathbb{R})$.
   (c) Montrer que $S_3(\mathbb{R}) + T_3^+(\mathbb{R}) = E$.
   (d) Si on note $n = \dim(E)$, vérifier que $d_n(S_3(\mathbb{R}), T_3^+(\mathbb{R})$ satisfait bien l'inégalité attendue.

Partie B : Cas général.

E est de nouveau quelconque, on note $\dim(E) = n \in \mathbb{N}^\star$ et $\dim(F) = k$.

5. Montrer que $d_n(F,G) = 2(\dim(F) - \dim(F\cap G))(\dim(G) - \dim(F\cap G))$.
6. En déduire que $d_n(F,G) \geqslant 0$.
7. Montrer que $d_n(F,G) = 0 \Leftrightarrow (F \subset G$ ou $G \subset F)$.
8. Démontrer que $\dim(F\cap G) \geqslant \dim(F) + \dim(G) - n$.
9. En déduire que $d_n(F,G) \leqslant 2k(n-k)$.
10. Étudier et tracer la fonction définie sur $[0,1]$ par $\varphi(t) = 2t(1-t)$.
11. On suppose dans cette question que n est pair.
    (a) Montrer que $d_n(F,G) \leqslant \dfrac{n^2}{2}$.

(b) Démontrer que $d_n(F,G) = \dfrac{n^2}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} F \oplus G = E \\ 2\dim(F) = n \end{cases}$

(c) Justifier qu'il existe deux-sous-espaces vectoriels A, B de E tels que $d_n(A,B) = \dfrac{n^2}{2}$.

12. Déterminer la valeur maximale prise par d_n lorsque n est impair.

Exercice 5 (sujet 1)**.** corrigé

On considère la fonction f définie par $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\sin(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ si $x \neq 0$ et $f(0) = \ln(2)$ (≈ 0.7)

1. Justifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}$ et que f est paire.
2. On considère g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin(t) - t}{t^2} & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$
   (a) Vérifier que g est continue sur $\mathbb{R}$ et justifier qu'elle est bornée sur $[-1, 1]$
   (b) En déduire que f est continue en 0
3. (a) Montrer avec soin que f est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ et calculer $f'(x)$ pour $x \neq 0$
   (b) Montrer que f est dérivable en 0 et préciser $f'(0)$.
   (c) Étudier le signe de f' sur $]0, +\infty[$
4. Montrer que $\forall x > 0, |f(x)| \leqslant \dfrac{1}{2x}$. En déduire la limite de f en $+\infty$.
5. (a) Déterminer le signe de $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ et $f(\pi)$.
   (b) Montrer que $f(2\pi) = \displaystyle\int_{2\pi}^{3\pi} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{(t+\pi)^2}\right) \sin(t)\,\mathrm{d}t$.
   (*On pourra faire un changement de variable adéquat*).
   (c) En déduire que $f(2\pi) > 0$.

Exercice 6 (sujet 2)**.** corrigé

On pose pour tout réel x : $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{x(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs positives, et calculer $F(0)$.
2. Montrer que F est croissante sur $\mathbb{R}$.
3. (a) Montrer que, pour tout $x \geqslant 0$, $F(x) \geqslant F(0)e^x$, et déduisez-en que $F(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.
   (b) Avec un raisonnement analogue, montrer que $F(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$.
4. Pour cette question, nous admettrons provisoirement le résultat de la question 5. :

$$F \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = \int_0^1 e^{x(1+t^2)}\,dt.$$

   (a) Soit $g : x \in \mathbb{R} \mapsto F(-x^2)$. Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner une expression de sa dérivée sous forme intégrale.
   (b) Justifier que la fonction $\Psi : x \in \mathbb{R} \mapsto \left(\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,dt\right)^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, puis prouver que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\Psi'(x) = 2xe^{-x^2}\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2u^2}\,du$.
   (c) En déduire que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(-x^2) + \left(\int_0^x e^{-t^2}\,dt\right)^2 = \frac{\pi}{4}.$$

   (d) Conclure que $\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,dt \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
5. On fixe $x_0 \in \mathbb{R}$ et on cherche donc à prouver que $\dfrac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} - \int_0^1 e^{x_0(1+t^2)}\,dt \xrightarrow[h\to0]{} 0$.
   (a) Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $y \in [-2,2]$, $|e^y - 1 - y| \leqslant Cy^2$.
   (b) En déduire que pour tout $h \in [-1,1]$ et tout $t \in [0,1]$, $\left|e^{h(1+t^2)} - 1 - h(1+t^2)\right| \leqslant 4Ch^2$.
   (c) En déduire que pour tout h petit,

$$\left|F(x_0+h) - F(x_0) - h\int_0^1 e^{x_0(1+t^2)}\,dt\right| \leqslant 4Ch^2e^{2|x_0|}.$$

   (d) Conclure.

Exercice 7 (sujet 2)**.** *corrigé*

Dans tout ce problème,

— n désigne un entier naturel supérieur à 2.
— $\mathcal{M}_n$ désigne l'ensemble des matrices carrées de taille n.
— $\mathcal{N}_n$ désigne l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n$ nilpotentes.
— ch_n désigne l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n$ de trace nulle.
— Gl_n désigne l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n$ inversibles.

On rappelle qu'une matrice est nilpotente s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $M^p = 0_n$. On admet qu'une matrice nilpotente est de trace nulle. On rappelle que la trace d'une matrice $M = (m_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n$ est définie par $\text{Tr}(M) = \sum_{i=1}^{n} m_{ii}$ et que pour tout $A, B \in \mathcal{M}_n$, on a $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$.

1. **partie 1 : Généralités sur ch_n**
   (a) Montrer que ch_n est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n$.
   (b) Déterminer la dimension de ch_n.
   (c) Est-ce que ch_n est stable par produit matriciel ?
   (d) Soit $A, B \in \mathcal{M}_n$. Montrer que si $AB \in \text{ch}_n$, alors $BA \in \text{ch}_n$.
   (e) Soit $A \in \text{ch}_n \cap GL_n$. A-t-on $A^{-1} \in \text{ch}_n$?
2. **Une caractérisation de $\mathcal{N}_n$**
   (a) La somme de deux matrices nilpotentes est-elle nilpotente ? $\mathcal{N}_n$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n$?

   L'objectif de cette partie est de montrer que $\text{Vect}(\mathcal{N}_n) = \text{ch}_n$.
   (b) Montrer l'inclusion directe.
   (c) Soit $M \in \text{ch}_n$.
   Montrer que M s'écrit comme la somme d'une matrice B de diagonale nulle et d'une matrice diagonale D de trace nulle.
   (d) Pour $1 \leqslant i, j \leqslant n$, on note E_{ij} la matrice élémentaire de $\mathcal{M}_n$ d'indice (i, j).
      i. Montrer que si $i \neq j$, alors $E_{ij} \in \mathcal{N}_n$.
      ii. On pose $A = E_{ii} + E_{ij} - E_{ij} - E_{jj}$. Montrer que si $i \neq j$, alors $A^2 = 0_n$.
      iii. En déduire que si $i \neq j$, $E_{ii} - E_{jj} \in \text{Vect}(\mathcal{N}_n)$.
   (e) Montrer que $B \in \text{vect}(\mathcal{N}_n)$.
   (f) Montrer que $D \in \text{vect}(\mathcal{N}_n)$.
   (g) Conclure
3. **Une autre caractérisation de $\mathcal{N}_n$**
   Soit $M \in \mathcal{M}_n$. On veut montrer que $M \in \mathcal{N}_n$ si et seulement si $\text{Tr}(M^k) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$.
   (a) Montrer le sens direct.
   (b) On suppose que M est telle que $\forall k \in \mathbb{N}^\star$, $\text{Tr}(M^k) = 0$. On admet qu'il existe une matrice $P \in Gl_n(\mathbb{C})$, N une matrice nilpotente complexe et D une matrice diagonale complexe telles que $M = P(D+N)P^{-1}$ avec $ND = DN$.
      i. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, $\text{Tr}(D^k) = 0$.
      ii. En déduire que D est nulle puis que M est nilpotente.
      iii. Conclure.

Correction du DS n 8, sujet 2

Exercice 1 énoncé

1. (a) Il suffit de montrer que $f \circ f = f$. Soit donc $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$, alors

$$f \circ f(x,y,z,t) = f(x+y,0,z,z) = (x+y,0,z,z) = f(x,y,z,t)$$

donc f est un projecteur.

(b) Soit $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$, alors

$$(x,y,z,t) \in \ker(f) \Leftrightarrow f(x,y,z,t) = (0,0,0,0) \Leftrightarrow x = -y \text{ et } z = 0$$

On a donc

$$\ker(f) = \{(x,-x,0,t),(x,t) \in \mathbb{R}^2\}$$

Pour déterminer l'image, on se donne $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ et on cherche à savoir si $f(x,y,z,t) = (a,b,c,d)$ possède des solutions, c'est-à-dire si le système suivant possède des solutions :

$$\begin{cases} x+y=a \\ 0=b \\ z=c \\ z=d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=a-y \\ z=c \\ b=0 \\ c=d \end{cases}$$

On a donc deux conditions de compatibilité : $b=0$ et $c=d$. Si elles sont vérifiées, le système admet des solutions donc on a :

$$\text{Im}(f) = \{(a,0,c,c),(a,c) \in \mathbb{R}^2\}$$

(c) On peut utiliser le fait que la symétrie s d'axe $\text{Im}(f)$ parallèlement à $\ker(f)$ vérifie $2f - id$ (montré en cours). On a donc

$$s(1,2,3,4) = 2(3,0,3,3) - (1,2,3,4) = (5,-2,3,2)$$

On peut aussi écrire $(1,2,3,4) = (3,0,3,3) + (-2,2,0,1)$ avec $((3,0,3,3),(-2,2,0,1)) \in \text{Im}(f) \times \ker(f)$ on a alors

$$s(1,2,3,4) = (3,0,3,3) - (-2,2,0,1) = (5,-2,3,2)$$

2. (a) Soit $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$, alors

$$\varphi(x,y,z,t) = g(x+y,0,z,z) = (x+y-2z,-x-y+2z,2x+2y-4z)$$

(b) i. Soit $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$,

$$(x,y,z,t) \in \ker(\varphi) \Leftrightarrow \varphi(x,y,z,t) = (0,0,0) \Leftrightarrow x+y-2z = 0$$

On a donc

$$\ker(\varphi) = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, x+y-2z = 0\}$$

ii. On a vu que $\ker(f) = \{(x,-x,0,t),(x,t) \in \mathbb{R}^2\}$. Il est clair que les éléments de $\ker(f)$ vérifient la condition trouvé à la question précédente donc $\ker(f) \subset \ker(\varphi)$

iii. Soit $x \in \ker u$, alors $u(x) = 0$ d'où $v \circ u(x) = v(u(x)) = v(0) = 0$ puisque v est linéaire. On a donc $v \circ u(x) = 0$ ce qui montre que x appartient à $\ker(v \circ u)$. On a bien l'inclusion

$$\ker(u) \subset \ker(v \circ u)$$

(c) i. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, existe-t-il $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$ tel que $\varphi(x,y,z,t) = (a,b,c)$? On résout le système :

$$\begin{cases} x+y-2z = a \\ -x-y+2z = b \\ 2x+2y-4z = c \end{cases} \Leftrightarrow a = -b c = 2a$$

On a deux conditions de compatibilité : $a = -b$ et $c = 2a$. Si elles sont vérifiées, le système possède des solutions donc

$$\mathrm{Im}(\varphi) = \{(a,-a,2a), a \in \mathbb{R}\}$$

ii. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, existe-t-il $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$ tel que $g(x,y,z,t) = (a,b,c)$? On résout le système :

$$\begin{cases} x+y-2t = a \\ -x+3y-t = b \\ 2x+y-z-t = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-2t = a \\ y-2z-2t = a+b \\ y+5z-3t = c+2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-2t = a \\ y-2z-2t = a+b \\ -7z+t = a-c-b \end{cases}$$

Le système est triangulaire, il possède toujours une solution. On a donc $\mathrm{Im}(g) = \mathbb{R}^3$.

iii. Il est clair que $\mathrm{Im}(\varphi) \subset \mathrm{Im}(g)$ puisque $\mathrm{Im}(\varphi)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

iv. Soit $y \in \ker(v \circ u)$ alors il existe x tel que $y = v \circ u(x) = v(u(x))$ donc $y \in \mathrm{Im}(v)$. Ainsi, on a bien l'inclusion

$$\mathrm{Im}(v \circ u) \subset \mathrm{Im}(v)$$

3. (a) Si $u \in \mathrm{Im}(f)$, il existe $(a,c) \in \mathbb{R}^2$ tel que $u = (a,0,c,c) = a(1,0,0,0)+c(0,0,1,1)$ donc $\{((1,0,0,0),(0,0,1,1))\}$ est une partie génératrice de $\mathrm{Im}(f)$.

(b) Soit $u = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$, alors

$$u = (x,0,z,z) + (0,y,0,t-z)$$

donc tout élément de $\mathbb{R}^4$ s'écrit comme un élément de $\mathrm{Im}(f)$ et un élément de

$$F = \{(0,\alpha,0,\beta),(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2\}$$

On a donc $\mathbb{R}^4 = \mathrm{Im}(f) + F$.

Montrons que la somme est directe. Soit u un élément de l'intersection, alors il existe $(x,z) \in \mathbb{R}^2$ tel que $u = (x,0,z,z)$ et il existe $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $u = (0,\alpha,0,\beta)$ ce qui impose $x = 0 = \alpha = z$ et $z = \beta$ d'où $u = (0,0,0,0)$. La somme est directe, les deux espaces sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$. F est différent de $\ker(f)$ car $(1,-1,0,0)$ appartient à $\ker(f)$ mais pas à F.

Exercice 2 énoncé

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}$. On se donne A et B deux sous-espaces vectoriels de E et on se pose le problème suivant :
A quelle(s) condition(s) existe-t-il un sous-espace vectoriel C tel que : $A+B = A \oplus C = B \oplus C$?

1. Dans cette question on suppose que le sous-espace vectoriel C existe. Montrer que $\dim A = \dim B$ et déterminer $\dim C$.

Les sommes étant directes, on a $\dim(A \oplus C) = \dim A + \dim C$ et $\dim(B \oplus C) = \dim B + \dim C$ donc $\dim A + \dim C = \dim B + \dim C$ ce qui impose

$$\boxed{\dim A = \dim B.}$$

Par ailleurs, on a $\dim A + \dim C = \dim(A+B)$ et on peut appliquer la formule de Grassman. On a alors $\dim(A+B) = \dim A + \dim B - \dim(A \cap B)$ donc

$$\boxed{\dim C = \dim B - \dim(A \cap B) = \dim A - \dim(A \cap B)}$$

Dans la suite de notre étude, nous allons supposer $\dim A = \dim B$ et montrer que le sous-espace vectoriel C existe.

2. On étudie pour commencer le cas où A et B sont deux hyperplans distincts.

   (a) Justifier l'existence de vecteurs $u \in A$ et $v \in B$ tels que $u \notin B$ et $v \notin A$.

Les deux espaces étant de même dimension et distincts, on a $A \nsubseteq B$ et $B \nsubseteq A$. En effet, si $A \subset B$, alors $A = B$ puisqu'ils ont même dimension et réciproquement.

Il existe alors au moins un élément de A n'appartenant pas à B et inversement.

Attention, on peut (en toute généralité) avec $A \neq B$ et $A \subset B$ ou $B \subset A$

   (b) Établir que $w = u + v \notin A \cup B$

Supposons par l'absurde que w appartienne à $A \cup B$, alors w appartient à A ou à B. S'il appartient à A, alors $w - u$ aussi ce qui est impossible par construction de v. De même, si w appartient à B, alors $w - v$ aussi ce qui contredit l'hypothèse faite sur u. On a donc

$$\boxed{w = u + v \notin A \cup B}$$

Quand vous écrivez $u + v \notin A$ car $v \notin A$ on a l'impression que vous pensez que la somme de deux éléments qui ne sont pas dans A ne peut être dans A ce qui est évidemment faux. Prenez $A = \{(x,y), y = 0\}$, $(1,1) \notin A, (1,-1) \notin A$ et pourtant $(1,1) + (1,-1) \in A$.

   (c) Observer que $C = \text{vect}(w)$ est solution du problème posé.

D'après le cours, A et C sont en somme directe si (et seulement si) $(e_1, \dots, e_{n-1}, w)$ est une famille libre, où $(e_1, \dots, e_{n-1})$ est une base de A. Or, on sait que $(e_1, \dots, e_{n-1})$ est libre et $w \notin \text{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1})$ donc $(e_1, \dots, e_{n-1}, w)$ est une famille libre. Ainsi, A et C sont en somme directe.

On montre de même que B et C sont en somme directe.

Par ailleurs, on sait que $(e_1, \dots, e_{n-1}, w)$ est une base de $A \oplus C$ car la concaténation d'une base de A et d'une base de C donne une famille génératrice de $A + C$.

On a donc $\dim(A \oplus C) = n$, donc $A \oplus C$ est un sse de E, de même dimension (puisque $\dim(A \oplus C) = (n-1)+1 = n = \dim E$) d'où $E = A \oplus C$.

Par ailleurs, comme $E = A \oplus C \subset A + B \subset E$, on a $A + B = E$ donc $A + B = A \oplus C$. On raisonne de même pour $B \oplus C$ ce qui montre

$$\boxed{A + B = A \oplus C = B \oplus C.}$$

3. On revient au cas général et on suppose seulement $\dim A = \dim B$

   (a) Résoudre le problème posé lorsque $A = B$.

Si $A = B$, alors $A + B = A$ et $C = \{0_E\}$ est l'espace cherché.

Dans la suite, on suppose $A \neq B$.

(b) Justifier qu'il existe un sous-espace vectoriel A' tel que $(A \cap B) \oplus A' = A$.

On peut utiliser le théorème de la base incomplète : $A \cap B$ est un sous-ev de A qui est de dimension finie, on complète une de ses bases en une base de A et on pose A' l'espace engendré par les vecteurs avec lesquels on a complété.
J'ai vu beaucoup de complémentaire (voire de complémentaire auquel on rajoute le vecteur nul parce qu'on a retenu que j'ai dit que le complémentaire ne pouvait pas être un ssev vu qu'il ne contenait pas le vecteur nul. Vous ne pensez pas que j'aurais mentionné le fait qu'on pouvait simplement rajouter le vecteur nul pour obtenir un supplémentaire? Si on n'a JAMAIS fait ça, c'est sans doute parce que c'est faux. De manière symétrique, on introduit B' sous-espace vectoriel tel que $(A \cap B) \oplus B' = B$.

(c) Montrer que $A' \cap B' = \{0\}$ et $\dim A' = \dim B' \in \mathbb{N}^*$.

Soit $x \in A' \cap B'$, alors $x \in A$ puisque $A' \subset A$ et $x \in B$ puisque $B' \subset B$. On a donc $x \in A \cap B$ or A' et $A \cap B$ sont en somme directe donc $x = 0$ ce qui montre que

$$\boxed{A' \cap B' = \{0\}}$$

Plutôt qu'une phrase de trois lignes que vous seuls comprenez, la méthode " je prends un élément de l'intersection et je montre qu'il est nul " est bien plus efficace

Par ailleurs, les sommes étant directes, on a

$$\dim(A) = \dim A' + \dim(A \cap B) \text{ et } \dim B = \dim B' + \dim(A \cap B$$

or, d'après la question 1), on sait que $\dim A = \dim B$ ce qui implique

$$\boxed{\dim A' = \dim B'}$$

De plus, $A \neq B$ et $\dim A = \dim B$ donc $A \cap B \neq A$ et $A \cap B \neq B$ ce qui implique que A' et B' ne sont pas réduits à zéro donc leur dimension est non nulle. Dans la suite, on pose $p = \dim A' = \dim B'$.

4. On reprend les objets introduits ci-dessus afin de construire un sous-espace vectoriel C solution. On forme $\mathscr{D} = (g_1, \ldots, g_p)$ en posant, pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, $g_i = e_i + f_i$.

(a) Montrer que la famille $\mathscr{D}$ est libre.

Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ des réels tels que

$$\lambda_1 g_1 + \ldots + \lambda_p g_p = 0 = \lambda_1(e_1 + f_1) + \ldots + \lambda_p(e_p + g_p)$$

On a alors

$$\underbrace{\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_p e_p}_{\in A'} = \underbrace{-\left(\lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_p f_p\right)}_{\in B'} \in A' \cap B' = \{0\}$$

On a donc $\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_p e_p = 0 = \lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_p f_p$ et les familles étant libres, puisque ce sont des bases, on a $\lambda_1 = \ldots = \lambda_p = 0$,

$$\boxed{\text{la famille } \mathscr{D} \text{ est donc libre.}}$$

Attention! pour appliquer la liberté d'une des deux familles, vous devez faire apparaître une CL nulle de cette famille!

(b) On pose $C = \text{vect}(g_1, \ldots, g_p)$. Déterminer $\dim C$.

D'après la question précédente, on sait que $g_1, \ldots, g_p$ est une famille libre, l'espace C engendré par cette famille est donc de dimension p.

(c) Montrer que $A \cap C = \{0\}$.

Soit $x \in A \cap C$, alors $x \in C$ donc x s'écrit $\alpha_1 g_1 + \ldots + \alpha_p g_p$, avec α_i des réels. On a donc

$$x = \alpha_1(e_1 + f_1) + \ldots + \alpha_p(e_p + f_p) \Leftrightarrow \underbrace{x - (\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_p e_p)}_{\in A} = \underbrace{\alpha_1 f_1 + \ldots + \alpha_p f_p}_{\in B' \subset B}$$

donc

$$\alpha_1 f_1 + \ldots + \alpha_p f_p \in (A \cap B) \cap B' = \{0\}$$

On a donc $\alpha_1 f_1 + \ldots + \alpha_p f_p = 0$ et la famille étant libre, cela impose $\alpha_1 = \ldots = \alpha_p = 0$ donc $x = 0$. Par conséquent,

$$\boxed{A \cap C = \{0\}}$$

(d) Conclure que $A + B = A \oplus C = B \oplus C$.

On sait déjà que A et C sont en somme directe. De plus,

$$\begin{aligned} \dim(A+B) &= \dim A + \dim B - \dim(A \cap B) \\ &= \dim A + \dim B' \\ &= \dim A + \dim C \\ &= \dim(A \oplus C). \end{aligned}$$

donc les deux espaces ont même dimension et comme $A \oplus C \subset A + B$, ils sont égaux.

De même, on montre comme à la question précédente que $B \cap C = \{0\}$ et on conclut grâce aux dimensions.

Exercice 3 énoncé

1. (a) *Justifier l'existence de J_n.*

   $t \mapsto \dfrac{\sin(nt)}{\sin t}$ est continue sur $]0,\pi/2]$, et en 0, puisque $\sin u \sim u$ quand $u \to 0$, elle tend vers n, et donc est prolongeable par continuité en ce point. J_n existe donc.

   Je vous rappelle que $\dfrac{\sin(nt)}{\sin(t)}$ n'est pas une fonction !

   (b) *Calculer J_0, J_1, J_2, J_3.*

   $J_0 = 0, J_1 = \pi/2, J_2 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} 2\cos t\,dt = 2$, et $J_3 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} 2\cos(2t) + 1 = \pi/2$,

   car $\dfrac{\sin(3t)}{\sin t} = \dfrac{\sin(2t)\cos(t)}{\sin t} + \cos(2t) = 2\cos^2(t) + \cos(2t) = 2\cos(2t) + 1$

   C'est effarant de constater le peu d'entre vous qui ont réussi à calculer J_3.

2. (a) *Si a et b sont deux réels, factoriser* $\sin a - \sin b$.

   $\sin a - \sin b = 2\cos\dfrac{a+b}{2}\sin\dfrac{a-b}{2}$.

   Pour la retrouver, le plus simple est de passer par la factorisation par l'arc moitié :

   $$e^{ia} - e^{ib} = 2i\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)e^{\frac{i(a+b)}{2}},$$

   et

   $$\sin(a) - \sin(b) = \mathcal{I}m\left(e^{ia} - e^{ib}\right) = \mathcal{I}m\left(2i\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)e^{\frac{i(a+b)}{2}}\right) = 2\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

   (b) *Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, exprimer $J_n - J_{n-2}$ en fonction de n.*

   $$\begin{aligned} J_n - J_{n-2} &= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(nt) - \sin\big((n-2)t\big)}{\sin t}dt \\ &= \int_0^{\pi/2} 2\frac{\cos\big((n-1)t\big)\sin t}{\sin t}dt \\ &= \int_0^{\pi/2} 2\cos\big((n-1)t\big)dt = \boxed{2\frac{\sin\big[(n-1)\pi/2\big]}{n-1}}. \end{aligned}$$

   (c) *En déduire que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,* $\begin{cases} J_{2N+1} = \dfrac{\pi}{2}, \\ J_{2N} = 2\displaystyle\sum_{n=0}^{N-1}\frac{(-1)^n}{2n+1}. \end{cases}$ $(*)$

   Posons $n = 2N+1$ dans l'égalité précédente : $J_{2N+1} - J_{2N-1} = 2\dfrac{\sin\big[(2N)\pi/2\big]}{2N} = 0$, donc pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $J_{2N+1} = J_{2N-1}$, ce qui signifie que la sous-suite de (J_n) formée des éléments d'indice impair est une suite constante. Puisque son premier terme est $\pi/2$, on obtient la première égalité voulue.

   Posons maintenant $n = 2N$. Alors $J_{2N} - J_{2N-2} = 2\dfrac{\sin\big[(2N-1)\pi/2\big]}{2N-1} = 2\dfrac{-\cos(N\pi)}{2N-1} = 2\dfrac{(-1)^{N-1}}{2N-1}$ $(\sharp)$.

   Montrons donc la récurrence $(*)$: pour $N = 1$, nous avons calculé que $J_2 = 2$, et $2\displaystyle\sum_{n=0}^{1-1}\frac{(-1)^n}{2n+1} = 2$, donc l'initialisation est vérifiée. Supposons alors que pour un entier N, on ait $J_{2(N-1)} =$

$2\sum_{n=0}^{N-2}\frac{(-1)^n}{2n+1}$. La formule de récurrence (♯) nous donne alors

$$J_{2N}=J_{2N-2}+2\frac{(-1)^{N-1}}{2N-1}=2\sum_{n=0}^{N-2}\frac{(-1)^n}{2n+1}+2\frac{(-1)^{N-1}}{2N-1}=2\sum_{n=0}^{N-1}\frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

On peut aussi éviter une récurrence en écrivant :

$$\forall N\in\mathbb{N}^\star, J_{2N}-J_{2N-2}=\frac{2(-1)^{N-1}}{2N-1},$$

donc pour tout $N\in\mathbb{N}^\star$ et tout $k\in[\![1,N]\!]$, $J_{2k}-J_{2k-2}=\frac{2(-1)^{k-1}}{2k-1}$. On somme ces égalités pour k variant de 1 à N, on obtient :

$$J_{2N}-J_0=\sum_{k=1}^{N}\frac{2(-1)^{k-1}}{2k-1},$$

car on reconnaît une somme télescopique. On a $J_0=0$ et on posant le changement d'indice $j=k-1$, on obtient bien la formule souhaitée.

Inutile d'invoquer une récurrence descendante pour la première formule. Pour la deuxième, si vous voulez le faire par récurrence descendante, écrivez la "fin" de votre récurrence à savoir J_0 (ou J_2 si vous vous arrêtez avant).

3. (a) *Montrer que* $\lim_{n\to\infty}(J_n-J_{n-1})=0$. Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}J_n-J_{n-1} &= \int_0^{\pi/2}\frac{\sin(nt)-\sin\big((n-1)t\big)}{\sin t}\,\mathrm{d}t\\ &= 2\int_0^{\pi/2}\frac{\cos\big((2n-1)t/2\big)\sin(t/2)}{\sin t}\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^{\pi/2}\frac{\cos\big((2n-1)t/2\big)}{\cos(t/2)}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

où $f:t\in[0,\pi/2]\mapsto 1/\cos(t/2)$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. D'après le rappel au début de cette partie, $\lim_{x\to+\infty}\int_0^{\pi/2}\frac{\cos(xt)}{\cos(t/2)}\,\mathrm{d}t$ tend vers 0 en $+\infty$, donc d'après la caractérisation séquentielle des limites, on a $\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi/2}\frac{\cos\big((2n-1)t/2\big)}{\cos(t/2)}\,\mathrm{d}t=0$.

(b) *En déduire que* $\lim_{n\to\infty}J_n=\frac{\pi}{2}$.

Nous avons déjà prouvé que $(J_{2N+1})_{N\in\mathbb{N}}$ tendait vers $\pi/2$. Il suffit donc de prouver que la sous-suite (J_{2N}) tend aussi vers $\pi/2$. Or, cette suite s'écrit $J_{2N}=\big(J_{2N}-J_{2N-1}\big)+\big(J_{2N-1}\big)$, i.e comme la somme de deux suites, l'une tendant vers 0 (d'après 6.a)) et l'autre vers $\pi/2$. On en déduit que $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

J'ai vu beaucoup de bêtises sur cette question. Pour info, $\lim_{n\to+\infty}J_n-J_{n-1}=0$ N'implique PAS $\lim_{n\to+\infty}J_n=\lim_{n\to+\infty}J_{n-1}$ puisque vous ne savez pas si $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite (et l'objet de cette question est à la fois de montrer que $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite ET que cette limite est égale à $\frac{\pi}{2}$.

4. *Déduire des résultats précédents l'égalité :* $\boxed{\pi=\lim_{N\to\infty}4\sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n}{2n+1}.}$

On sait que $\lim_{n\to+\infty}J_n=\frac{\pi}{2}$ donc $\lim_{N\to+\infty}J_{2N}=\frac{\pi}{2}$. On en déduit que $\lim_{N\to\infty}4\sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n}{2n+1}=2\lim_{N\to\infty}J_{2N+2}=\pi$.

J'ai vu beaucoup de " $\lim_{n\to+\infty} J_n = \frac{\pi}{2}$ *donc pour n pair..." Quand on fait la limite quand n tend vers* $+\infty$*, n parcourt tous les entiers. Si vous voulez que n ne parcourt que les entiers pairs, il faut considérer une suite extraite (qui aura la même limite que la suite si la suite converge).*

5. *On définit l'application* $g : t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \mapsto \begin{cases} \frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t} & \text{si } t \neq 0, \\ 0 & \text{si } t = 0. \end{cases}$

   Montrer que g est C^1.

   D'après les théorèmes généraux, sin ne s'annulant qu'en 0, cette fonction est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, \pi/2]$. De plus, $g(t) = \frac{t - \sin(t)}{t\sin(t)} \sim \frac{t - \sin(t)}{t^2} = \frac{t^3/6 + o(t^3)}{t^2} \sim t/6$, donc g est bien continue en 0.
   Le DL de sin a été obtenu en lui appliquant la formule de Taylor-Young en 0, dont le développement nous est bien connu.
   Il reste à prouver qu'elle est de classe $\mathscr{C}^1$ en 0, ce qui, d'après le théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$, est une conséquence de l'existence d'une limite finie en O de g'.
   Or, pour tout $t > 0, g'(t) = \frac{\sin^2(t) - t^2\cos(t)}{t^2\sin^2 t} \sim \frac{\sin^2(t) - t^2\cos(t)}{t^4}$ quand t tend vers 0. Utilisons les DL en 0 pour obtenir un équivalent du numérateur :

$$\begin{aligned} \sin^2(t) - t^2\cos(t) &= (t - t^3/6 + o(t^3))^2 - t^2(1 - t^2/2 + o(t^2)) \\ &= t^2(1 - t^2/6 + o(t^2))^2 - t^2(1 - t^2/2 + o(t^2)) \\ &= t^2(1 - 2t^2/6 + o(t^2)) - t^2 + t^4/2 + o(t^4)) \\ &\quad \text{car quand } u \to 0, (1+u)^\alpha = 1 + \alpha u + o(u), \\ &= t^4/6 + o(t^4). \end{aligned}$$

   Ainsi, $\lim_{t\to 0} g'(t) = \frac{1}{6}$. Par le thm de la limite de la dérivée, on en déduit que g est C^1 (et que $g'(0) = \frac{1}{6}$).

   BEAUCOUP d'entre vous me "montre" que g est dérivable et conclut que g est C^1 *(pourquoi???). Une faute que j'ai trouvé dans de trop nombreuses copies est d'écrire* $\sin(t) \sim t$ *donc* $\frac{1}{\sin(t)} \sim \frac{1}{t}$ *(jusque là tout va bien) donc* $\lim_{t\to 0} \frac{1}{\sin(t)} - \frac{1}{t} = 0$ *ce qui est très très faux puisque vous avez ajouté* $\frac{1}{t}$ *à l'équivalent. Certains m'ont même écrit équivalent à* 0 *sans tiquer... sans commentaire.*

6. (a) *Déterminer* $\lim_{n\to\infty} \left(\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(nt)}{\sin t}\,dt - \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(nt)}{t}\,dt \right)$.

   On remarque que la suite dont on nous demande la limite est $\left(\int_0^{\pi/2} g(t)\sin(nt)\,dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Puisque g est $\mathscr{C}^1$, nous savons, d'après le résultat admis, que cette limite est nulle.

   (b) *En déduire* $\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(nt)}{t}\,dt$.

   $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(nt)}{t}\,dt = -\int_0^{\pi/2} g(t)\sin(nt)\,dt + J_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \boxed{\frac{\pi}{2}}$ d'après les questions 9.a) et 6.b).

   Là encore, comme pour la question 3b), on vous que vous montriez que la limite existe ET qu'elle vaut $\frac{\pi}{2}$.

   (c) *A l'aide d'un changement de variable, déterminer* $\lim_{n\to\infty} \int_0^{n\pi/2} \frac{\sin(t)}{t}\,dt$.

On pose le changement de variable affine $nu = t$:

$$\int_0^{n\pi/2} \frac{\sin(t)}{t}\,dt = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(nu)}{nu}\,n\,du = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(nu)}{u}\,du \xrightarrow[n\to+\infty]{} \boxed{\frac{\pi}{2}},$$

d'après 9.b).

7. (a) *Montrer que pour tout réel strictement positif x on a :*

$$\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{1-\cos x}{x} + \int_0^x \frac{1-\cos t}{t^2}\,dt.$$

La deuxième intégrale existe car la fonction intégrée est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et est prolongeable par continuité en 0 par la valeur $1/2$ d'après les équivalents usuels. Effectuons une IPP en intégrant $t \mapsto 1/t^2$:

$$\int_0^x \frac{1-\cos t}{t^2}\,dt = \left[-\frac{1-\cos t}{t}\right]_0^x + \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt = -\frac{1-\cos x}{x} + \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt.$$

Certains ont pensé à dériver pour montrer que les deux membres étaient égaux à une constante près. Il faut ensuite faire tendre vers 0 pour montrer que la constante est nulle.
Si on voulait être tout à fait rigoureux pour cette question, il faudrait considérer le prolongement continu de $x \mapsto \dfrac{1-\cos(x)}{x}$ pour faire notre IPP sans souci comme l'a fait Bastien.

(b) *Montrer que la fonction $H : x \geqslant 0 \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{1-\cos t}{t^2}\,dt$ est croissante, majorée, et qu'elle admet en $+\infty$ une limite réelle, après avoir prouvé que $\displaystyle\int_1^x \frac{1-\cos t}{t^2}\,dt \leqslant 2$ pour tout $x \geqslant 1$.*

▷ La fonction est croissante car $\forall 0 < x < y, H(y) - H(x) = \displaystyle\int_x^y \frac{1-\cos t}{t^2}\,dt > 0$ comme intégrale d'une fonction positive.

▷ Pour tout $x \geqslant 2$, $\left|\displaystyle\int_1^x \frac{1-\cos t}{t^2}\,dt\right| \leqslant \int_1^x \left|\frac{1-\cos t}{t^2}\right| dt \leqslant \int_1^x \frac{2}{t^2}\,dt = \left[-\frac{2}{t}\right]_1^x = 2 - \frac{2}{x} \leqslant 2.$

▷ D'après la relation de Chasles, pour tout $x \geqslant 1$, $H(x)$ est donc majorée par le réel $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-\cos t}{t^2}\,dt + 2$.

H admet donc bien une limite réelle en $= \infty$.

(c) *En déduire que la fonction $x \geqslant 0 \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$ admet en $+\infty$ une limite réelle.*

Il suffit d'utiliser l'égalité obtenue en 10.a) et de remarquer que $x \mapsto \dfrac{1-\cos x}{x}$ admet une limite finie en $+\infty$, égale à 0 puisque $x \mapsto 1 - \cos(x)$ est bornée.

(d) *Que vaut $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$?*

Notons $\psi : x \mapsto \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$. Nous venons de prouver que sa limite existait. D'après la caractérisation séquentielle des limites, celle-ci ne peut être que $\lim_{n\to+\infty} \psi\left(\frac{n\pi}{2}\right)$, qui vaut $\frac{\pi}{2}$ d'après la question 9.c).

Exercice 4 énoncé
Partie A : étude d'exemples

1. *On suppose $F \oplus G = E$. Exprimer $d_n(F,G)$ en fonction de $dim(F)$ et $dim(G)$.*
   On sait que $\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G)$ donc
   $$d_n(F,G) = (\dim(F) + \dim(F))^2 + 0 - \dim(F)^2 - \dim(G)^2 = 2\dim(F)\dim(G).$$
   Beaucoup invoque Grassman ce qui n'est pas faux mais, selon moi, pas utile étant donné que l'on montre $dim(F \oplus G) = dim(F) + dim(G)$ avant Grassman dans le cours.
2. *Dans toute cette question, $E = \mathbb{R}^4$. Soit $u = (1,1,0,0)$, $v = (0,0,1,1)$ et $F = Vect(u,v)$.*
   (a) *Déterminer une base et la dimension de F.*
   Les deux vecteurs u et v sont non colinéaires, ils forment donc une base de F qui est, par conséquent, de dimension 2.
   (b) *Soit $G = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, x-y+z = 0 = 4x-3y+2z+t = 2x-y+t\}$. Montrer que G est un sous-ev de $\mathbb{R}^3$, en déterminer une base et la dimension.*

   Soit $X = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$, on raisonne par équivalence :
   $$\begin{aligned} X \in G &\Leftrightarrow \begin{cases} x-y+z & = 0 \\ 4x-3y+2z+t & = 0 \\ 2x-y+t & = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x-y+z & = 0 \\ 2x-y+t & = 0 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 - L3 \\ &\begin{cases} z & = -x+y \\ t & = -2x+y \end{cases} \\ &\Leftrightarrow X = (x, y, -x+y, -2x+y) \\ &\Leftrightarrow X \in \text{Vect}((1,0,-1,-2),(0,1,1,1)) \end{aligned}$$
   On a montré que $G = \text{Vect}((1,0,-1,-2),(0,1,1,1))$ donc G est un ssev de $\mathbb{R}^4$. La famille $((1,0,-1,-2),(0,1$ est libre car les deux vecteurs qui la composent sont non colinéaires, on en déduit que G est de dimension 2.
   Beaucoup d'entre vous ont perdu du temps à me montrer que G (et tous les suivants) étaient stable par combinaison linéaire ce qui est inutile puisque vous montrez (normalement) que $G = vect(\,)$, ce qui vous permet d'affirmer que c'est un ssev.
   Comme dit et répété en TD, si vous prenez X dans G ou si vous utilisez "donc", "alors", "d'où", vous raisonnez par implication et non pas par équivalence, vous ne montrez donc pas l'égalité mais seulement une inclusion.
   Je me permets de vous rappeler qu'une famille est une liste, elle se note donc entre parenthèses et PAS entre accolades (réservé à un ensemble) ou sans parenthèse (aucun sens).
   Certains justifient que G est un ssev en invoquant la dimension ce qui n'a aucun sens : la dimension n'est définie que pour un ev!!
   (c) *Montrer que $F \oplus G = \mathbb{R}^4$.*
   Montrons que la somme est directe. Soit donc $(x,x,z,z) \in F \cap G$, alors
   $$\begin{cases} x-x+z & = 0 \\ 4x-3x+2z+z & = 0 \\ 2x-x+z & = 0 \end{cases}$$
   donc $z = 0$ puis $x = 0$. Ainsi, $F \cap G \subset \{0_{\mathbb{R}^4}\}$ et l'autre inclusion est évidente. La somme est donc bien directe. Comme $\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G) = 4 = \dim(\mathbb{R}^4)$, on a $F \oplus G = \mathbb{R}^4$.
   Certains ont raisonné sur la concaténation ce qui est possible si c'est correctement rédigé.
   Les fautes rencontrées sont :

— *égalité entre la famille de départ et la famille modifiée par opérations élémentaires.*
— *raisonner sur le vect, arriver dans le vect à une famille libre et en déduire que la famille de départ est libre.*
— *raisonner sur le vect, arriver à $\mathbb{R}^4$ et en déduit que la famille de départ est une base de $\mathbb{R}^4$ alors que l'égalité sur les espaces engendrés vous donne seulement le fait qu'elle est génératrice de $\mathbb{R}^4$.*
— *Commencer par remarquer que la somme des dimensions vaut 4 et en déduire (à tort) que cela implique que $\dim(F+G)=4$ donc égalité à $\mathbb{R}^4$).*

(d) *A-t-on $d_4(A,B) < \dfrac{4^2}{2}$ pour tout ssev A,B de $\mathbb{R}^4$?*

Dans l'exemple précédent, on a $d_n(F,G) = 8 = \dfrac{4^2}{2}$, l'inégalité n'est donc pas toujours stricte.

3. *Dans cette question, on suppose $E = \mathbb{R}_4[X]$, $F = \{P \in E, P(0) = P'(0) = P"(0) = 0\}$ et $G = \{P \in E, P(1) = P'(1) = 0\}$.*

(a) *Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E, en déterminer une base et la dimension.*

Soit $P \in \mathbb{R}_4[X]$, alors

$$P \in F \Leftrightarrow X^3 | P \Leftrightarrow \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, P(X) = X^3(aX+b) \Leftrightarrow P \in \text{Vect}(X^3, X^4)$$

Ainsi, $F = \text{Vect}(X^3, X^4)$ donc F est bien un ssev de $\mathbb{R}_4[X]$. La famille (X^3, X^4) est libre car les polynômes sont non nuls de degrés distincts. On en déduit que F est de dimension 2.
De même,

$$P \in G \Leftrightarrow (X-1)^2 | P \Leftrightarrow \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3, P = (X-1)^2(aX^2+bX+c) \Leftrightarrow P \in \text{Vect}\left((X-1)^2, X(X-1)^2, X^2(X-1)^2\right.$$

La famille $\left((X-1)^2, X(X-1)^2, X^2(X-1)^2\right)$ est libre car les polynômes sont non nuls de degrés distincts. On en déduit que G est de dimension 3.
On retrouve les mêmes erreurs que dans l'exemple précédent. On rajoute le :

$$P \in G \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow P \in Vect(\,) \Leftrightarrow G = Vect(\,).$$

Relisez-vous!!!!! évidemment que les deux dernières lignes ne sont pas équivalentes!!!! la dernière ligne est la conséquence de la série d'équivalences que vous avez écrites.

(b) *Montrer que $F \oplus G = E$.*

On va montrer que la somme est directe. Soit donc $P \in F \cap G$. Alors 0 est racine de P de multiplicité au moins 3 et 1 est racine de P de multiplicité au moins 2. On en déduit que $X^3(X-1)^2$ divise P. Or $P \in \mathbb{R}_4[X]$, ceci implique $P = 0$.
La somme est donc directe et $\dim(F) + \dim(G) = 5 = \dim(\mathbb{R}_4[X])$ donc $F \oplus G = E$.

(c) *Existe-t-il deux sous-espaces vectoriels A,B de E tels que $d_5(A,B) = \dfrac{5^2-1}{2}$?*

Dans l'exemple précédent, on a $d_n(F,G) = 12 = \dfrac{5^2-1}{2}$.

4. *Dans cette question, $E = M_3(\mathbb{R})$. On note $S_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de E et $T_3^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures de E.*

(a) *Montrer que $S_3(\mathbb{R})$ et $T_3^+(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de E, en déterminer une base et la dimension.*

Soit $A = (a_{ij}) \in M_3(\mathbb{R})$, alors

$$\begin{aligned} A &= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{ij}E_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{ii}E_{ii} + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_{ij}E_{ij} + \sum_{1\leqslant j<i\leqslant n} a_{ij}E_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{ii}E_{ii} + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_{ij}E_{ij} + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_{ji}E_{ji} \end{aligned}$$

en faisant un changement d'indice dans la dernière somme.
On a donc

$$\begin{aligned} A \in S_3(\mathbb{R}) &\Leftrightarrow \forall (i,j) \in [\![1,3]\!]^2, a_{ij} = a_{ji} \\ &\Leftrightarrow A = \sum_{i=1}^{3} a_{ii}E_{ii} + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant 3} a_{ij}(E_{ij}+E_{ji}) \\ &\Leftrightarrow A \in \text{Vect}\,(E_{11}, E_{22}, E_{33}, E_{12}+E_{21}, E_{13}+E_{31}, E_{23}+E_{32}) \end{aligned}$$

On a donc $S_3(\mathbb{R}) = \text{Vect}\,(E_{11}, E_{22}, E_{33}, E_{12}+E_{21}, E_{13}+E_{31}, E_{23}+E_{32})$ donc $S_3(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel. De plus, la famille $(E_{11}, E_{22}, E_{33}, E_{12}+E_{21}, E_{13}+E_{31}, E_{23}+E_{32})$ est libre car les coefficients dans la combinaison linéaire de cette famille sont unique. On en déduit que c'est une base de $S_3(\mathbb{R})$ qui est donc de dimension 6.

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} A \in T_3^+(\mathbb{R}) &\Leftrightarrow \forall i > j, a_{ij} = 0 \\ &\Leftrightarrow a_{11}E_{11} + a_{22}E_{22} + a_{33}E_{33} + a_{12}E_{12} + a_{13}E_{13} + a_{23}E_{23} \\ &\Leftrightarrow A \in \text{Vect}\,(E_{11}, E_{22}, E_{33}, E_{12}, E_{13}, E_{23}) \end{aligned}$$

On a donc $T_3^+(\mathbb{R}) = \text{Vect}\,(E_{11}, E_{22}, E_{33}, E_{12}, E_{13}, E_{23})$ donc $T_3^+(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel. De plus, la famille $(E_{11}, E_{22}, E_{33}, E_{12}, E_{13}, E_{23})$ est libre car les coefficients dans la combinaison linéaire de cette famille sont unique. On en déduit que c'est une base de $T_3^+(\mathbb{R})$ qui est donc de dimension 6.

L'erreur commune a été de ne pas savoir écrire ce qu'est une matrice symétrique (non, les coefficients diagonaux ne sont pas identiques).
Utilisez les matrices élémentaires permet de simplifier considérablement l'écriture.

(b) *Déterminer* $S_3(\mathbb{R}) \cap T_3^+(\mathbb{R})$.
Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$, alors

$$A \in S_3(\mathbb{R}) \cap T_3^+(\mathbb{R}) \Leftrightarrow A \text{ diagonale.}$$

On a donc

$$S_3(\mathbb{R}) \cap T_3(\mathbb{R}) = \text{Vect}\,(E_{11}, E_{22}, E_{33})\,.$$

(c) *Montrer que* $S_3(\mathbb{R}) + T_3^+(\mathbb{R}) = E$.
On considère la concaténation d'une base de $S_3(\mathbb{R})$ et d'une base de $T_3^+(\mathbb{R})$, montrons qu'elle est génératrice de $M_3(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} & \text{Vect}\,(E_{11}, E_{22}, E_{33}, E_{12}+E_{21}, E_{13}+E_{31}, E_{23}+E_{32}, E_{11}, E_{22}, E_{33}, E_{12}, E_{13}, E_{23}) \\ = \ & \text{Vect}\,(E_{11}, E_{22}, E_{33}, E_{12}+E_{21}, E_{13}+E_{31}, E_{23}+E_{32}, E_{12}, E_{13}, E_{23}) \\ & \text{en enlevant les répétitions} \\ = \ & \text{Vect}\,(E_{11}, E_{22}, E_{33}, E_{21}, E_{31}, E_{32}, E_{12}, E_{13}, E_{23}) \\ & \text{en enlevant les trois derniers vecteurs aux trois avant derniers} \end{aligned}$$

On reconnaît alors la base canonique de $M_3(\mathbb{R})$, la famille est donc bien génératrice de $M_3(\mathbb{R})$ donc $S_3(\mathbb{R}) + T_3^+(\mathbb{R}) = M_3(\mathbb{R})$.

(d) *Si on note $n = dim(E)$, vérifier que $d_n(S_3(\mathbb{R}), T_3^+(\mathbb{R})$ satisfait bien l'inégalité attendue.*

On a $\dim(S_3(\mathbb{R}) + T_3^+(\mathbb{R})) = 9$ et $\dim(S_3(\mathbb{R}) \cap T_3^+(\mathbb{R})) = 3$ donc

$$d_n(S_3(\mathbb{R}), T_3^+(\mathbb{R})) = 9^3 + 3^2 - 6^2 - 6^2 = 90 - 72 = 18 \leqslant \frac{9^2 - 1}{2}$$

On a donc bien l'inégalité attendue.

Partie B : Cas général.

E est de nouveau quelconque, on note $\dim(E) = n \in \mathbb{N}^\star$ et $\dim(F) = k$.

5. *Montrer que $d_n(F,G) = 2\,(dim(F) - dim(F \cap G))\,(dim(G) - dim(F \cap G))$.*
D'après la formule de Grassman, on a $\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$ donc

$$\begin{aligned} d_n(F,G) &= (\dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G))^2 + \dim(F \cap G)^2 - \dim(F)^2 - \dim(G)^2 \\ &= 2\dim(F \cap G)^2 - 2\dim(F)\dim(F \cap G) - 2\dim(G)\dim(F \cap G) + 2\dim(F)\dim(G) \\ &= 2\,(\dim(F) - \dim(F \cap G))\,(\dim(G) - \dim(F \cap G)) \end{aligned}$$

On a bien l'égalité souhaitée.

6. *En déduire que $d_n(F,G) \geqslant 0$.*
$F \cap G$ est un ssev de F et de G, il est donc de dimension inférieure ou égale. Les deux termes du produit sont positifs, $d_n(F,G)$ est donc positif.
On vous a fait factoriser $d_n(F,G)$ puis on vous demande de montrer que c'est positif. Dire simplement que les deux facteurs sont positifs sans explication pourrait être un coup de bluff, aucun point ne vous sera accordé si vous ne justifiez pas.

7. *Montrer que $d_n(F,G) = 0 \Leftrightarrow (F \subset G$ ou $G \subset F)$.*
D'après la factorisation, on a

$$\begin{aligned} d_n(F,G) = 0 &\Leftrightarrow \dim(F) = \dim(F \cap G) \text{ ou } \dim(G) = \dim(F \cap G) \\ &\Leftrightarrow F = F \cap G \text{ ou } G = F \cap G \\ &\text{ car on a } F \cap G \subset F \text{ et } F \cap G \subset G \\ &\Leftrightarrow F \subset G \text{ ou } G \subset F \end{aligned}$$

On a donc bien l'équivalence.
Là encore, si vous écrivez

$$\begin{aligned} d_n(F,G) = 0 &\Leftrightarrow dim(F) = dim(F \cap G) \text{ ou } dim(G) = dim(F \cap G) \\ &\Leftrightarrow G \subset F \text{ ou } F \subset G \end{aligned}$$

cela pourrait juste être que vous utilisez l'énoncé sans savoir pourquoi on a l'équivalence, on attend donc une justification précise.

8. *Démontrer que $dim(F \cap G) \geqslant dim(F) + dim(G) - n$.*
On a $\dim(F+G) \leqslant n$ donc, d'après la formule de Grassman,

$$\dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G) \leqslant n,$$

puis

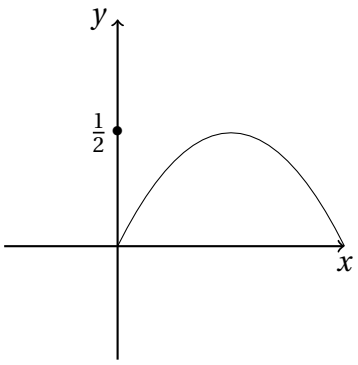
$$\dim(F \cap G) \geqslant \dim(F) + \dim(G) - n.$$

9. *En déduire que $d_n(F,G) \leqslant 2k(n-k)$.*
On a $\dim(F) - \dim(F \cap G) \leqslant \dim(F)$ et $\dim(G) - \dim(F \cap G) \leqslant n - \dim(F)$, on en déduit, comme $\dim(F) = k$, que

$$d_n(F,G) \leqslant 2k(n-k).$$

10. *Étudier et tracer la fonction définie sur* $[0,1]$ *par* $\varphi(t) = 2t(1-t)$.
φ est dérivable sur $[0,1]$, de dérivée $t \mapsto 2-4t^2$, on a donc

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$\varphi'(t)$		$+$	0	$-$	
φ		↗	$\frac{1}{2}$	↘	



11. *On suppose dans cette question que n est pair.*

(a) *Montrer que* $d_n(F,G) \leqslant \dfrac{n^2}{2}$.
On a

$$d_n(F,G) \leqslant 2k(n-k) = n^2\varphi\left(\frac{k}{n}\right),$$

donc

$$d_n(F,G) \leqslant \frac{n^2}{2},$$

car φ est majorée par 2. On a donc bien l'inégalité souhaitée.
Certains ont refait une étude de fonction (quel dommage), d'autre ont tenté de me convaincre que ce n'était pas nécessaire avec des phrases du type "si n joue le rôle de 1". Rassurez-moi, vous le savez que ça ne passera pas au moment où vous l'écrivez ?

(b) *Démontrer que* $d_n(F,G) = \dfrac{n^2}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} F \oplus G = E \\ 2\dim(F) = n \end{cases}$

D'après le travail précédent, on a montré $d_n(F,G) \leqslant \dfrac{n^2}{2}$ à l'aide de deux inégalités successives (question 9 et 11a)), on a donc $d_n(F,G) = \dfrac{n^2}{2} \Leftrightarrow d_n(F,G) = 2k(n-k) = n^2\varphi\left(\dfrac{k}{n}\right)$. Ainsi :

$$\begin{aligned} d_n(F,G) = \frac{n^2}{2} &\Leftrightarrow \begin{cases} \dim(F) - \dim(F\cap G) = \dim(F) \\ \dim(G) - \dim(F\cap G) = n - \dim(F) \\ \varphi\left(\dfrac{k}{n}\right) = \dfrac{1}{2} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} F \cap G = \{0_E\} \\ \dim(G) + \dim(F) = n \\ \dfrac{k}{n} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} F \oplus G = E \\ 2\dim(F) = n \end{cases} \end{aligned}$$

On a bien l'équivalence souhaitée.

l'équivalence est souvent mal justifiée, il faut que les deux inégalités utilisées soient des égalités et chacune est importante.

(c) *Justifier qu'il existe deux-sous-espaces vectoriels A, B de E tels que $d_n(A,B) = \dfrac{n^2}{2}$.*
Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E, on pose $A = \text{Vect}(e_1, \dots, e_{n/2})$ et $B = \text{Vect}(e_{n/2+1}, \dots, e_n)$. On a alors $A \oplus B = E$ donc, d'après la question précédente, $d_n(A,B) = \dfrac{n^2}{2}$.

Bon, là j'ai suivi le corrigé qui donnait la construction d'un ssev de dimension $\dfrac{n}{2}$ puisque, après tout, on n'a jamais écrit dans le cours que pour tout $p \in [\![1, n]\!]$, il existe un ssev de E de dimension p.

12. *Déterminer la valeur maximale prise par d_n lorsque n est impair.*
On sait déjà que $d_n(F,G)$ est majoré, on cherche à savoir s'il y a un maximum.

On suppose $n = 2p+1$. On sait déjà que $d_n(F,G) \leqslant \dfrac{n^2}{2}$ par le travail précédent. Or $d_n(F,G)$ est un entier, on obtient donc

$$d_n(F,G) \leqslant \left\lfloor \frac{n^2}{2} \right\rfloor,$$

et

$$\left\lfloor \frac{n^2}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{4p^2+4p+1}{2} \right\rfloor = 2p^2+2p = \frac{n^2-1}{2}.$$

On a donc $d_n(F,G) \leqslant \dfrac{n^2-1}{2}$. Reste à savoir si cette valeur est bien le maximum.
Si $\dim(F) = p$ et $\dim(G) = p+1$ avec $F \cap G = \{0_E\}$ (et donc $F \oplus G = E$), alors $d_n(F,G) = 2p(p+1)$ d'après la première question, ce qui est égal à $\dfrac{n^2-1}{2}$. Il suffit donc de considérer deux tels ssev de E. Pour les construire, on peut considérer une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E et poser $F = \text{Vect}\left(e_1, \dots, e_p\right)$ et $G = \text{Vect}\left(e_{p+1}, \dots, e_n\right)$.

Exercice 5 énoncé

La plupart d'entre vous n'ont même pas abordé le problème et ceux qui y ont touché sont passés à côté, travaillez donc le bien, les fonctions définies par des intégrales occupent une grande partie du programme de deuxième année!!!

1. Pour $x \neq 0$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t^2}$ est continue sur le segment $[x, 2x]$ si $x > 0$ et le segment $[2, x]$ si $x < 0$, donc l'intégrale est définie et ainsi f est définie pour $x \neq 0$. De plus, l'énoncé donne $f(0)$, donc f est définie sur $\mathbb{R}$.

   100 % d'échec sur cette question. Retenez qu'une intégrale est définie si on intègre une fonction continue (ou continue par morceaux) sur un intervalle, il faut donc s'assurer que l'intégrande est continue sur l'intervalle d'intégration (donc, ici, que 0 n'appartient jamais à l'intervalle d'intégration.
   Je me permets de rappeler que $\dfrac{\sin(t)}{t^2}$ n'est pas une fonction et que ça devient lassant de le répéter à chaque devoir. Et tant qu'on y est, une fonction est un nom féminin, elle est donc continuE.

   Soit $x \in \mathbb{R}^\star$, alors $f(-x) = \displaystyle\int_{-x}^{-2x} \frac{\sin(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$. On effectue le changement de variable $u = -t$ dans l'intégrale. On a $du = -dt$, et u varie de x à $2x$. On a donc

   $$f(-x) = \int_x^{2x} \frac{(-\sin u)(-\mathrm{d}u)}{u^2} = \int_x^{2x} \frac{\sin(u)\,\mathrm{d}u}{u^2} = f(x).$$

   donc f est paire.
   Pas mal d'arnaques dans ce changement de variable. Ne démarrez pas votre calcul sans préciser ce qu'est x.

2. On considère g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin(t) - t}{t^2} & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$

   (a) $\sin(t) - t \underset{0}{=} -\frac{t^3}{3!} + o(t^3)$ avec les DL usuels. Donc, $g(t) \underset{0}{=} \frac{t}{6} + o(t) \to 0$ et g est continue en 0. Puisque pour $t \neq 0$, g est un quotient de fonctions usuelles, g est continue sur $\mathbb{R}$.

   Ici g est définie en 0, la fonction $t \mapsto \dfrac{\sin(t) - t}{t^2}$ a été prolongée, à vous de vérifier que ce prolongement est continu. Je rappelle qu'un prolongement n'est pas nécessairement continu et que cela n'a aucun sens de conclure par " la fonction est prolongeable par continuité " puisqu'elle est déjà définie sur $\mathbb{R}$
   Une fonction continue sur un segment étant bornée, g est bornée sur $[-1, 1]$.

   Le mot segment doit apparaître (ainsi que la continuité de la fonction)

   (b) Puisque g est bornée, il existe M tel que $\forall t \in [-1,1]$, $|g(t)| \leqslant M$. Ainsi, pour $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\sin(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t = \int_x^{2x} (\frac{1}{t} + g(t))\,\mathrm{d}t = \underbrace{\int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t}}_{=\ln(2)} + \underbrace{\int_x^{2x} g(t)\,\mathrm{d}t}_{=I_2}$. Or le second membre vérifie $I_2 = \left|\displaystyle\int_x^{2x} g(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant |x|M$. Ainsi, lorsque $x \to 0$, on a $I_2 \to 0$ par comparaison et donc $f(x) \to \ln(2) = f(0)$. On a bien f est continue en 0.

   Beaucoup de bêtises là aussi avec des confusions avec f définie en 0 ou avec la continuité de l'intégrande

3. (a) Soit $x \neq 0$, alors $f(x) = G(2x) - G(x)$ où G est une primitive de $t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t^2}$ (cette fonction admet des primitives car elle est continue sur $[x, 2x]$ puisque cet intervalle ne contient pas 0). Ainsi,

f est dérivable comme différence de deux fonctions dérivables et $f'(x) = 2\dfrac{\sin(2x)}{(2x)^2} - \dfrac{\sin(x)}{x^2} = \dfrac{\sin(x)(\cos(x)-1)}{x^2}$

Il était aussi possible de ne pas introduire G mais de préciser que les fonctions qui définissent les bornes de f sont dérivables (et toujours que l'intégrande est continue sur l'intervalle d'intégration).

(b) Calculons $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{1}{x}\left(\displaystyle\int_x^{2x} \frac{\sin(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t - \ln(2)\right)$. Or $\ln(2) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t}$. Ainsi,

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{1}{x}\int_x^{2x} g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Or, on a déjà vu qu'au voisinage de 0, $g(t) \underset{0}{=} O(t)$. Ainsi, pour t assez petit, on a $\left|\dfrac{g(t)}{t}\right| \leqslant M$ donc, pour x assez petit, on a $\left|\displaystyle\int_x^{2x} g(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \left|\displaystyle\int_x^{2x} Mt\,\mathrm{d}t\right|$ (attention, on ne peut appliquer directement l'inégalité triangulaire car les bornes de l'intégrale ne sont croissantes que si x est positif). Ainsi, pour x assez petit, on a $\left|\displaystyle\int_x^{2x} g(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{3}{2}Mx^2$. On en déduit que, $\left|\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}\right| \leqslant \tilde{M}x$ et par comparaison, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$.

(c) f' est du signe de $-\sin(x)$ et donc $f'(x) \leqslant 0$ pour $x \in [2k\pi, \pi + 2k\pi]$ et est positive sinon.

4. $|f(x)| = \left|\displaystyle\int_x^{2x} \frac{\sin(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_x^{2x} \frac{|\sin(t)|}{t^2}\,\mathrm{d}t$. (Les bornes sont dans le bon sens car $x > 0$). Or, $|\sin(t)| \leqslant 1$ donne $|f(x)| \leqslant \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \left[-\frac{1}{t}\right]_x^{2x} = \frac{1}{2x}$. Par comparaison, puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

5. (a) $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est toujours positive et sur $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, $\sin(t) \geqslant 0$. L'intégrale d'une fonction positive avec les bornes dans le bon sens donne $f\left(\frac{\pi}{2}\right) \geqslant 0$. Le même type d'argument ($\sin \leqslant 0$ sur $[\pi, 2\pi]$) donne $f(\pi) \leqslant 0$.

(b) $f(2\pi) = \displaystyle\int_{2\pi}^{4\pi} \frac{\sin(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t = \int_{2\pi}^{3\pi} \frac{\sin(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t + \int_{3\pi}^{4\pi} \frac{\sin(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$. Dans la seconde intégrale, on pose $u = t - \pi$ et on a $\displaystyle\int_{3\pi}^{4\pi} \frac{\sin(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t = \int_{2\pi}^{3\pi} \frac{\sin(u+\pi)}{(u+\pi)^2}\,\mathrm{d}u$. Enfin, $\sin(u+\pi) = -\sin(u)$ donne l'égalité souhaitée.

(c) Entre 2π et 3π, le sinus est positif et la différence $\dfrac{1}{t^2} - \dfrac{1}{(t+\pi)^2}$ est positive. Les bornes étant dans le bon sens, on en déduit que

$$\int_{2\pi}^{3\pi} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{(t+\pi)^2}\right)\sin(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0.$$

De plus, l'intégrale d'une fonction positive et continue est nulle ssi la fonction est nulle, donc $f(2\pi) = \displaystyle\int_{2\pi}^{3\pi} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{(t+\pi)^2}\right)\sin(t)\,\mathrm{d}t > 0$.

Exercice 6 énoncé

On pose pour tout réel x :

$$F(x) = \int_0^1 \frac{e^{x(1+t^2)}}{1+t^2} dt.$$

1. *Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs positives, et calculer $F(0)$*

   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'application $t \mapsto \dfrac{e^{x(1+t^2)}}{1+t^2}$ est continue sur $[0,1]$, l'intégrale est donc bien définie pour tout x. De plus, on a $\dfrac{e^{x(1+t^2)}}{1+t^2} > 0$ pour tout x et t donc F est à valeurs positives. Enfin,

   $$F(0) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt = [\arctan(t)]_0^1 = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

   On demande F positive, inutile donc d'invoquer la stricte positivité. Pour que l'intégrale soit définie, dire que l'intégrande est définie ne suffit. Il faut parler de continuité de la fonction $t \mapsto \dfrac{e^{x(t^1+1)}}{t^2+1}$. Attention à ne pas parler de la continuité de $\dfrac{e^{x(t^1+1)}}{t^2+1}$ sans préciser par rapport à quelle variable !

2. *Montrer que F est croissante sur $\mathbb{R}$.*

   Soient $x > y$, alors , pour tout $t \in [0,1]$, on a

   $$\frac{e^{x(1+t^2)}}{1+t^2} > \frac{e^{y(1+t^2)}}{1+t^2}$$

   par croissance de l'exponentielle d'où, en intégrant entre 0 et 1, $F(x) \geqslant F(y)$ et F est bien croissante.

3. (a) *Montrer que, pour tout $x \geqslant 0, F(x) \geqslant F(0)e^x$, et déduisez-en que $F(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.*

   On a

   $$F(x) - F(0)e^x = \int_0^1 \frac{e^{x(1+t^2)}}{1+t^2} \mathrm{d}t - e^x \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} \mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{e^{x(1+t^2)} - e^x}{1+t^2} \mathrm{d}t$$

   or $1 + t^2 \geqslant 1$ pour tout $t \in [0,1]$ donc pour $x \geqslant 0$, on a $x(1+t^2) \geqslant x$ d'où l'inégalité souhaitée en utilisant la croissance de l'exponentielle puis en intégrant.

   On passe ensuite à la limite quand x tend vers $+\infty$. Comme $F(0) > 0$, on a $F(0)e^x \to +\infty$ donc par comparaison, $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$.

   (b) *Avec un raisonnement analogue, montrer que $F(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$.*

   On suppose désormais $x < 0$, on a alors $x(1+t^2) \leqslant x$ donc par croissance de l'exponentielle,

   $$e^{x(1+t^2)} \leqslant e^x \text{ d'où } \frac{e^{x(1+t^2)}}{1+t^2} \leqslant \frac{e^x}{1+t^2}$$

   et finalement $F(x) \leqslant F(0)e^x$ en intégrant entre 0 et 1.
   Pour passer à la limite, il faut utiliser la question 1 dans laquelle nous avons montré que F est à valeurs positives. On a donc

   $$F(0)e^x \geqslant F(x) \geqslant 0, \forall x < 0$$

   donc en passant à la limite quand $x \to -\infty$, par le théorème d'encadrement, on peut conclure que $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$.

Plusieurs personnes ont majoré par $F(0)e^{2x}$, oubliant que x était négatif étant donné que l'on va le faire tendre vers $-\infty$.

Attention à ne pas oublier de dire que F est positive pour bien avoir le thm des gendarmes

4. *Pour cette question, nous admettrons provisoirement le résultat de la question 5.* :

$$F \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = \int_0^1 e^{x(1+t^2)}\,dt.$$

(a) *Soit $g : x \in \mathbb{R} \mapsto F(-x^2)$. Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner une expression de sa dérivée sous forme intégrale.*

La fonction g est la composée de F, supposée dérivable et $x \mapsto -x^2$ qui est dérivable, elle est donc dérivable et sa dérivée est

$$g'(x) = -2xF'(-x^2) = -2x\int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)}\,dt$$

(b) *Justifier que la fonction $\Psi : x \in \mathbb{R} \mapsto \left(\int_0^x e^{-t^2}\,dt\right)^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, puis prouver que pour tout $x \in \mathbb{R}, \Psi'(x) = 2xe^{-x^2}\int_0^1 e^{-x^2u^2}\,du$.*

La fonction $x \mapsto \int_0^x e^{-t^2}\,dt$ est l'unique primitive de $t \mapsto e^{-t^2}$ qui s'annule en 0, elle est donc dérivable ce qui montre que la fonction Ψ est dérivable en tant que carré d'une fonction dérivable.

Sa dérivée vaut

$$\Psi'(x) = 2\left(\int_0^x e^{-t^2}\,dt\right)\left(\int_0^x e^{-t^2}\,dt\right)' = 2e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}\,dt$$

On pose $t = xu$, $dt = xdu$ d'où

$$\Psi'(x) = 2e^{-x^2}\int_0^1 e^{-x^2u^2}\,xdu = 2xe^{-x^2}\int_0^1 e^{-x^2u^2}\,du$$

Certains me démontrent en détail que $x \mapsto \int_0^x e^{-t^2}\,dt$ est dérivable ou bien le justifie en parlant de la dérivabilité de ses bornes. On s'intéresse à la dérivabilité des bornes quand elles ne sont pas de la forme cste et x, c'est-à-dire en s'appuyant sur ce cas-là puis en raisonnant par composition. Il suffit donc de parler de l'unique primitive ou bien de citer le thm fondamental de l'analyse pour justifier la dérivabilité de $x \mapsto \int_0^x e^{-t^2}\,dt$

(c) *En déduire que la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto g(x) + \Psi(x)$ est constante, puis que*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(-x^2) + \left(\int_0^x e^{-t^2}\,dt\right)^2 = \frac{\pi}{4}.$$

Cette fonction est dérivable et d'après les deux questions précédentes, sa dérivée vaut :

$$-2x\int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)}\,dt + 2xe^{-x^2}\int_0^1 e^{-x^2u^2}\,du = -2x\int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)}\,dt + 2xe^{-x^2}\int_0^1 e^{-x^2t^2}\,dt$$

en posant $t = u$, d'où

$$g'(x) + \Psi'(x) = 2x\int_0^1 \left(-e^{-x^2(1+t^2)} + e^{-x^2}e^{-x^2t^2}\right)dt = 0$$

la fonction est donc constante ; on a par exemple $g(x) + \Psi(x) = g(0) + \Psi(0) = F(0) + 0 = \frac{\pi}{4}$.

(d) *Conclure que* $\int_0^x e^{-t^2}\,dt \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

On passe à la limite quand $x \to +\infty$ dans l'égalité que l'on vient de montrer. Comme $\lim_{x\to+\infty} F(-x^2) = \lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$, on a $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \frac{\pi}{4}$. La racine carrée étant continue, et l'intégrale positive on a $\sqrt{g(x)} = \int_0^1 e^{-x^2 t}\,dt \to \sqrt{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Attention, $\sqrt{y^2} = |y|$ donc pour avoir la limite de l'intégrale sans valeur absolue, il faut justifier de son signe

5. *On fixe $x_0 \in \mathbb{R}$ et on cherche donc à prouver que*

$$\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} - \int_0^1 e^{x_0(1+t^2)}\,dt \xrightarrow[h\to0]{} 0.$$

(a) *Montre qu'il existe $C>0$ tel pour tout $x \in y \in [-2,2]$,*

$$\left|e^y - 1 - y\right| \leqslant Cy^2$$

Soit $y \in [-2,2]$. On applique l'inégalité de Taylor Lagrange à l'ordre 2 à la fonction exp entre 0 et y :

$$\left|e^y - 1 - y\right| \leqslant \frac{y^2}{2} \sup_{[\min(0,y),\max(0,y)]} \left|e^y\right|,$$

on a donc, pour tout $y \in [-2,2]$,

$$\left|e^y - 1 - y\right| \leqslant \frac{y^2 e^2}{2}.$$

On a donc bien le résultat voulu en posant $C = \frac{e^2}{2}$.

Je crois qu'il y a une seule personne qui m'a cité correctement Taylor Lagrange, en faisant le sup sur le bon intervalle (et en prenant en compte le signe de y. Vous allez trop vite en citant Taylor et en majorant par le sup sur $[-2,2]$.

(b) *Montrer que pour tout $h \in [-1,1]$ et tout $t \in [0,1]$*

$$\left|e^{h(1+t^2)} - 1 - h(1+t^2)\right| \leqslant 4Ch^2.$$

Pour tout $h \in [-1,1]$ et tout $t \in [0,1]$, on a bien $h(1+t^2) \in [-2,2]$ donc on peut appliquer l'inégalité donnée à $y = h(1+t^2)$:

$$\left|e^{h(1+t^2)} - 1 - h(1+t^2)\right| \leqslant C(h(1+t^2))^2$$

et comme $(1+t^2) \leqslant 2$, on a $(1+t^2)^2 \leqslant 4$ d'où le résultat souhaité.

(c) *En déduire que pour h petit, on a*

$$\left|\int_0^1 \left(\frac{e^{(x_0+h)(1+t^2)}}{1+t^2} - \frac{e^{x_0(1+t^2)}}{1+t^2} - he^{x_0(1+t^2)}\right)dt\right| = \left|F(x_0+h) - F(x_0) - h\int_0^1 e^{x_0(1+t^2)}\,dt\right|$$

Soit $h \in [-1,1]$. On multiplie l'inégalité trouvée à la question précédente par $\frac{e^{x_0(1+t^2)}}{1+t^2}$ qui est positif, cela ne change donc pas l'inégalité :

$$\frac{e^{x_0(1+t^2)}}{1+t^2}\left|e^{h(1+t^2)} - 1 - h(1+t^2)\right| \leqslant \frac{e^{x_0(1+t^2)}}{1+t^2} 4Ch^2,$$

donc, en faisant rentrer $\dfrac{e^{x_0(1+t^2)}}{1+t^2}$ dans la valeur absolue ce qui est légitime puisque c'est positif, on obtient :

$$\left|\frac{e^{(x_0+h)(1+t^2)}}{1+t^2}-\frac{e^{x_0(1+t^2)}}{1+t^2}-he^{x_0(1+t^2)}\right|\leqslant\frac{e^{x_0(1+t^2)}}{1+t^2}4Ch^2.$$

On a

$$\frac{e^{x_0(1+t^2)}}{1+t^2}\leqslant e^{x_0(1+t^2)}$$

et comme $x_0\leqslant|x_0|$, on a $x_0(1+t^2)\leqslant|x_0|(1+t^2)\leqslant 2|x_0|$ d'où, par croissance de l'exponentielle, $e^{x_0(1+t^2)}\leqslant e^{2|x_0|}$.

On intègre enfin l'inégalité entre 0 et 1 :

$$\int_0^1\left|\frac{e^{(x_0+h)(1+t^2)}}{1+t^2}-\frac{e^{x_0(1+t^2)}}{1+t^2}-he^{x_0(1+t^2)}\right|\mathrm{d}t\leqslant\int_0^1 4Ch^2e^{2|x_0|}\,\mathrm{d}t=4Ch^2e^{2|x_0|}$$

On sait, par ailleurs, que la valeur absolue de l'intégrale est plus petite que l'intégrale de la valeur absolue, on a donc

$$\left|\int_0^1\left(\frac{e^{(x_0+h)(1+t^2)}}{1+t^2}-\frac{e^{x_0(1+t^2)}}{1+t^2}-he^{x_0(1+t^2)}\right)\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_0^1\left|\frac{e^{(x_0+h)(1+t^2)}}{1+t^2}-\frac{e^{x_0(1+t^2)}}{1+t^2}-he^{x_0(1+t^2)}\right|\mathrm{d}t$$

et par linéarité de l'intégrale,

$$\left|\int_0^1\left(\frac{e^{(x_0+h)(1+t^2)}}{1+t^2}-\frac{e^{x_0(1+t^2)}}{1+t^2}-he^{x_0(1+t^2)}\right)\mathrm{d}t\right|=\left|F(x_0+h)-F(x_0)-h\int_0^1 e^{x_0(1+t^2)}\,\mathrm{d}t\right|$$

d'où l'inégalité souhaitée.

(d) *Conclure*.

On divise par h l'inégalité précédente :

$$\left|\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}-\int_0^1 e^{x_0(1+t^2)}\,\mathrm{d}t\right|\leqslant 4Che^{2|x_0|}$$

et on fait tendre h vers 0. On a alors $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}=\displaystyle\int_0^1 e^{x_0(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$ donc F est dérivable en tout point x_0, de dérivée $F'(x_0)=\displaystyle\int_0^1 e^{x_0(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$.

Vous étiez sans doute contents d'être arrivés au bout du problème mais la conclusion attendue est dans l'intro de la question : on cherche à montrer la dérivabilité de F

Exercice 7 énoncé

1. (a) *Montrer que ch_n est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n$.*
La matrice nulle appartient à ch_n qui est donc non vide. Soit $A, B \in \text{ch}_n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Par linéarité de la trace, on a $\text{Tr}(\lambda A + B) = \lambda \text{Tr}(A) + \text{Tr}(B) = 0$ donc $\lambda A + B \in \text{ch}_n$.
On peut aussi caractériser les éléments de ch_n : Soit $M = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} m_{ij} E_{ij} \in \mathcal{M}_n$. On raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned} M \in \text{ch}_n &\Leftrightarrow \text{Tr}(M) = 0 \\ &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} m_{ii} = 0 \\ &\Leftrightarrow m_{nn} = -\sum_{i=1}^{n-1} m_{ii} \\ &\Leftrightarrow M = \sum_{i \neq j} m_{ij} E_{ij} + \sum_{i=1}^{n-1} (m_{ii} - m_{nn}) E_{ii} \end{aligned}$$

On a montré que $\text{ch}_n = \text{vect}\left\{\left\{E_{ij}, i \neq j\right\} \cup \left\{E_{ii} - E_{nn}, i \in [\![1, n-1]\!]\right\}\right\}$ ce qui montre que ch_n est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n$ (et nous donne une famille génératrice de ch_n).

(b) *Déterminer la dimension de ch_n.*
On a montré à la question précédente que ch_n est engendré par la famille composée des éléments de

$$\left\{E_{ij}, i \neq j\right\} \cup \left\{E_{ii} - E_{nn}, i \in [\![1, n-1]\!]\right\}$$

De plus, cette famille est libre car $\left\{E_{ij}, i \neq j\right\}$ est une sous-famille de la base canonique de $\mathcal{M}_n$. La famille $\left\{E_{ii} - E_{nn}, i \in [\![1, n-1]\!]\right\}$ est également clairement libre et, pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, $E_{ii} - E_{nn} \notin \text{Vect}\left\{E_{ij}, i \neq j\right\}$. On peut aussi dire que l'écriture d'un élément de ch_n en tant que CL de $\left\{\left\{E_{ij}, i \neq j\right\} \cup \left\{E_{ii} - E_{nn}, i \in [\![1, n-1]\!]\right\}\right\}$ est unique car ce sont les coefficients de la matrice.
Ainsi, on a trouvé une base de ch_n composée de $n^2 - 1$ éléments donc $\dim \text{ch}_n = n^2 - 1$.

(c) *Est-ce que ch_n est stable par produit matriciel ?*

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On a $A, B \in \text{ch}_n$ mais $AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \notin \text{ch}_n$. Ainsi, ch_n n'est pas stable par produit matriciel.

(d) *Soit $A, B \in \mathcal{M}_n$. Montrer que si $AB \in ch_n$, alors $BA \in ch_n$.*

On sait que $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$ donc si $AB \in \text{ch}_n$, alors $BA \in \text{ch}_n$.

(e) *Soit $A \in ch_n \cap GL_n$. A-t-on $A^{-1} \in ch_n$?*
On prend $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, alors $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{pmatrix}$ et $A^{-1} \notin \text{ch}_n$. Le résultat est donc faux en général.

2. (a) On a déjà vu que $\mathcal{N}_n$ n'est pas stable par somme (par exemple $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont nilpotentes mais leur somme ne l'est pas). On en déduit que $\mathcal{N}_n$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n$.
Certains m'ont "montré" que $\mathcal{N}_n$ était stable par somme en utilisant la formule du binôme de Newton. Cette formule n'est valable que lorsque les deux matrices commutent donc pas dans le cas général.

(b) *Montrer l'inclusion directe.*
On a admis qu'une matrice nilpotente est de trace nulle. On a donc $\mathcal{N}_n \subset \text{ch}_n$ et ch_n est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n$ donc $\text{vect}(\mathcal{N}_n) \subset \text{ch}_n$.
Il est impératif de préciser que ch_n est un ssev pour justifier de l'implication $\mathcal{N}_n \subset \text{ch}_n \Rightarrow \text{Vect}(\mathcal{N}_n) \subset \text{ch}_n$

(c) *Soit $M \in ch_n$. Montrer que M s'écrit comme la somme d'une matrice B de diagonale nulle et d'une matrice diagonale de trace nulle.*

Soit $M = (m_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. On pose $D = \text{diag}(m_{11}, \dots, m_{nn})$, on a bien $\text{Tr}(D) = \text{Tr}(M) = 0$. Alors $B = M - D$ est une matrice de diagonale nulle. On a donc le résultat souhaité.

(d) *Pour $1 \leqslant i, j \leqslant n$, on note E_{ij} la matrice élémentaire de $\mathcal{M}_n$ d'indice (i, j).*

i. *Montrer que si $i \neq j$, alors $E_{ij} \in \mathcal{N}_n$.*
On a $E_{ij}^2 = (0)$ donc $E_{ij} \in \mathcal{N}_n$.

Rappel : $E_{ij}E_{kl} = \begin{cases} (0) & \text{si } j \neq k \\ E_{il} & \text{si } j = k \end{cases}$

ii. *On pose $A = E_{ii} + E_{ij} - E_{ji} - E_{jj}$. Montrer que si $i \neq j$, alors $A^2 = 0_n$.*
On a
— $AE_{ii} = E_{ii} - E_{ji}$
— $AE_{ij} = E_{ij} - E_{jj}$
— $AE_{ji} = E_{ii} - E_{ji}$
— $AE_{jj} = E_{ij} - E_{jj}$
donc $A^2 = (0)$. Un indice ij dans l'énoncé au lieu de ji rendait la question compliquée puisque $E_{ii} - E_{jj}$ n'est pas de carré nul

iii. *En déduire que si $i \neq j$, $E_{ii} - E_{jj} \in Vect(\mathcal{N}_n)$.*
D'après les questions précédentes, $A, E_{ij}, E_{ji} \in \mathcal{N}_n$ donc aussi dans $\text{vect}(\mathcal{N}_n)$. On en déduit que $A - E_{ij} + E_{ij} \in \text{Vect}(\mathcal{N}_n)$ donc

$$E_{ii} - E_{jj} \in \text{Vect}(\mathcal{N}_n).$$

(e) *Montrer que $B \in vect(\mathcal{N}_n)$.*
B est de diagonale nulle, c'est donc une combinaison linéaire de E_{ij} avec $i \neq j$. Or $\forall i \neq j, E_{ij} \in \mathcal{N}_n$ d'après la question 2(d)i donc $B \in \text{Vect}(\mathcal{N}_n)$.

(f) *Montrer que $D \in vect(\mathcal{N}_n)$.* On sait que D est de trace nulle, elle s'écrit donc comme combinaison linéaire de $(E_{ii} - E_{nn})_{1\leqslant i\leqslant n-1}$. Comme chaque $E_{ii} - E_{nn}$ appartient à $\mathcal{N}_n$, on a bien $D \in \text{Vect}(\mathcal{N}_n)$.

(g) On a montré que toute matrice de trace nulle s'écrit comme la somme de B et D avec $B, D \in \text{vect}(\mathcal{N}_n)$. On a donc $M \in \text{vect}(\mathcal{N}_n)$ ce qui montrer l'inclusion réciproque $\text{ch}_n \subset \text{vect}\mathcal{N}_n$.

3. *Soit $M \in \mathcal{N}_n$. On veut montrer que $M \in \mathcal{N}_n$ si et seulement si $Tr(M^k) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$.*

(a) *Montrer le sens direct.*
On suppose que $M \in \mathcal{N}_n$. Alors il existe un entier p tel que $M^p = (0)$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, $M^k \in \mathcal{N}_n$, on a $\left(M^k\right)^p = M^{kp} = (0)$ car $kp \geqslant p$. On a donc $M^k \in \mathcal{N}_n$ donc on a bien $\text{Tr}(M^k) = 0$.
Plusieurs d'entre vous ont écrit M^k nilpotente si M l'est. Il faut une ligne pour le justifier, faites-le plutôt que de ne pas prendre le maximum de points sur cette question.

(b) *On suppose que M est telle que $\forall k \in \mathbb{N}^\star$, $Tr(M^k) = 0$. On admet qu'il existe une matrice $P \in G_n(\mathbb{C})$, N une matrice nilpotente complexe et D une matrice diagonale complexe telles que $M = P(D + N)P^{-1}$ avec $ND = DN$.*

i. *Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, $Tr(D^k) = 0$.*
On sait que D et N commutent donc on peut appliquer le binôme de Newton. Soit $k \in \mathbb{N}^\star$, on a

$$M^k = P\left(\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} D^i N^{k-i}\right) P^{-1}$$

Pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, on a N^{k-i} nilpotente donc $D^i N^{k-i}$ aussi puisque N et D commutent. Ainsi, en prenant la trace, on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(M^k) &= \mathrm{Tr}\left(P\left(\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} D^i N^{k-i}\right) P^{-1}\right) \\
&= \mathrm{Tr}\left(\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} D^i N^{k-i}\right) \\
&= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \mathrm{Tr}\left(D^i N^{k-i}\right) \\
&= \mathrm{Tr}(D^k),
\end{aligned}$$

car, d'après ce qui précède, tous les termes de la somme sauf un sont nuls. On en déduit que $\mathrm{Tr}(D^k) = 0$.

ii. *En déduire que D est nulle puis que M est nilpotente.*
Notons $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, alors $D^k = \mathrm{diag}\left(\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k\right)$. On a, pour tout entier $k \geqslant 1$, $\sum_{k=1}^{n} \lambda_i^k = 0$. Montrons que tous les λ_i sont nuls. On considère les n premières équations :

$$\begin{cases}
\lambda_1 & +\lambda_2 & +\ldots+\lambda_n & = 0 \\
\lambda_1^2 & +\lambda_2^2 & +\ldots+\lambda_n^2 & = 0 \\
\vdots & & & \vdots \\
\lambda_1^n & +\lambda_2^n & +\ldots+\lambda_n^n & = 0
\end{cases}$$

Pour tout $i \geqslant 2$, on fait $L_i \leftarrow L_i - \lambda_1 L_{i-1}$. On obtient :

$$\begin{cases}
\lambda_1 & +\lambda_2 & +\ldots+\lambda_n & = 0 \\
 & +\lambda_2(\lambda_2-\lambda_1) & +\ldots+\lambda_n(\lambda_n-\lambda_1) & = 0 \\
\vdots & & & \vdots \\
 & +\lambda_2^{n-1}(\lambda_2-\lambda_1) & +\ldots+\lambda_n^{n-1}(\lambda_n-\lambda_1) & = 0
\end{cases}$$

Pour $i \geqslant 3$, on fait $L_i - \lambda_2 L_{i-1}$ et en itérant, on va obtenir un système triangulaire homogène qui admet donc uniquement la solution nulle. Ainsi, les λ_i sont nuls donc $D = (0)$. On en déduit que $M = PNP^{-1}$ donc M est nilpotente.

iii. *Conclure.*
On a montré qu'une matrice vérifiant $\mathrm{Tr}(M^k) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$ est nilpotente, on a donc l'équivalence.