Corrigé du DM 10.

1. *Montrer que D est un endomorphisme de E*

   Soit $f \in E$, alors f est une fonction de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, c'est également le cas de f', on a donc bien $D(f) \in E$.

   Par ailleurs, D est linéaire par linéarité de la dérivation, D est donc bien un endomorphisme.

2. *Déterminer le noyau et l'image de D.*

Le noyau de f est l'ensemble des fonctions de dérivée nulle c'est-à-dire l'ensemble des fonctions constantes.

Soit $f \in E$, alors f est continue donc, d'après le théorème fondamental de l'analyse, elle admet une primitive F. La dérivée de F étant de classe C^∞, F est également de classe C^∞ donc tout élément de E admet un antécédent dans E, D est surjective et $\mathrm{Im}(D) = E$.

Attention à bien montrer que f admet un antécédent <u>dans E</u>

Soient $f_1 : t \in \mathbb{R} \mapsto e^t$, $f_2 : t \in \mathbb{R} \mapsto e^{-t/2} \sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right)$ et $f_3 : t \in \mathbb{R} \mapsto e^{-t/2} \cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right)$.

Nous noterons $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3)$ et G le sous-espace vectoriel de E engendré par $\mathcal{B}$.

3. *Soient a, b et c des réels tels que $af_1 + bf_2 + cf_3$ soit la fonction nulle.*

   (a) *Montrer que la famille $\mathcal{B}$ est libre en prenant des valeurs particulières ou bien en passant à la limite.*

   On a, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $af_1(t)+bf_2(t)+cf_3(t) = 0$. donc $\lim\limits_{t\to+\infty} (af_1(t) + bf_2(t) + cf_3(t)) = 0$.
   Or $\lim\limits_{t\to+\infty} bf_2(t) + cf_3(t) = 0$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} af_1(t) = \pm\infty$ si $a \neq 0$. On en déduit donc que $a = 0$.

   Attention au signe de a.

   On prend ensuite $t = 0$, on obtient $c = 0$. On a donc $bf_2(t) = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$ ce qui impose $b = 0$ puisque f_2 n'est pas identiquement nulle. La famille est bien libre.

   Il est impératif de passer de l'égalité de fonctions $af_1+bf_2+cf_3 = 0$ à l'égalité de réels, valable pour tout $t \in \mathbb{R}$, $af_1(t)+bf_2(t)+cf_3(t) = 0$ avant de prendre des valeurs particulières de t.

   (b) *Calculer le développement limité à l'ordre 2 de la fonction $af_1 + bf_2 + cf_3$ au voisinage de 0 et montrer, d'une autre manière, que la famille $\mathcal{B}$ est libre.*

On a

$$\begin{aligned}
& af_1(t) + bf_2(t) + cf_3(t) \\
= \; & ae^t + be^{-t/2} \sin\frac{\sqrt{3}t}{2} + ce^{-t/2}\cos\frac{\sqrt{3}t}{2} \\
= \; & a\left(1 - t + \frac{t^2}{2} + o(t^2)\right) + b\left(1 - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{8} + o(t^2)\right) \times \left(\frac{\sqrt{3}t}{2} + o(t^2)\right) \\
& +c\left(1 - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{8} + o(t^2)\right) \times \left(1 - \frac{3t^2}{8} + o(t^2)\right) \\
= \; & a + at + \frac{at^2}{2} + \frac{bt\sqrt{3}}{2} - \frac{bt^2\sqrt{3}}{4} + c - \frac{ct}{2} - \frac{ct^2}{4} + o(t^2) \\
= \; & (a+c) + \left(a + \frac{b\sqrt{3}}{2} - \frac{c}{2}\right)t + \left(\frac{a}{2} - \frac{b\sqrt{3}}{4} - \frac{c}{4}\right)t^2 + o(t^2)
\end{aligned}$$

Par unicité du DL, on a donc

$$\begin{cases} a+c & =0 \\ a+\dfrac{b\sqrt{3}}{2}-\dfrac{c}{2} & =0 \\ \dfrac{a}{2}-\dfrac{b\sqrt{3}}{4}-\dfrac{c}{4} & =0 \end{cases} \text{ ou encore } \begin{cases} a+c & =0 \\ 2a+b\sqrt{3}-c & =0 \\ 2a-b\sqrt{3}-c & =0 \end{cases}$$

On raisonne par équivalence

$$\begin{cases} a+c & =0 \\ 2a+b\sqrt{3}-c & =0 \\ 2a-b\sqrt{3}-c & =0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+c & =0 \\ 2a+b\sqrt{3}-c & =0 \; L_3 \to L_3-L_2 \\ 2b\sqrt{3} & =0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+c & =0 \\ 3a & =0 \; L_2 \to L_2-\dfrac{1}{2}L_3+L_1 \\ 2b\sqrt{3} & =0 \end{cases}$$

Le système a comme unique solution $a=b=c=0$ donc la famille est libre.

La famille $\mathcal{B}$ est donc une base de G. **Remarque** et ce sous-espace est donc de dimension 3.

4. *Montrer que $\forall i \in \{1,2,3\}$, $D(f_i) \in G$. En déduire que G est stable par D, c'est-à-dire que $\forall g \in G, D(g) \in G$.*

Alors

- pour tout $t \in \mathbb{R}$, $D(f_1)(t) = f_1'(t) = e^t = f_1(t)$ donc $D(f_1) = f_1$ et $D(f_1) \in G$.
- Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$D(f_2)(t) = f_2'(t) = -\frac{1}{2}e^{-t/2}\sin\frac{\sqrt{3}t}{2} + \frac{\sqrt{3}t}{2}e^{-t/2}\cos\frac{\sqrt{3}t}{2} = -\frac{1}{2}f_2(t) + \frac{\sqrt{3}t}{2}f_3(t),$$

  ainsi

$$D(f_2) = -\frac{1}{2}f_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}f_3,$$

  donc $D(f_2) \in G$.
- Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$D(f_3)(t) = f_3'(t) = -\frac{1}{2}e^{-t/2}\cos\frac{\sqrt{3}t}{2} - \frac{\sqrt{3}t}{2}e^{-t/2}\sin\frac{\sqrt{3}t}{2} = -\frac{1}{2}f_3(t) - \frac{\sqrt{3}t}{2}f_2(t),$$

ainsi

$$D(f_3) = -\frac{\sqrt{3}}{2}f_2 - \frac{1}{2}f_3,$$

donc $D(f_3) \in G$.

Par linéarité de D, pour tout $g \in G$, $D(g) \in G$ car $g = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3$ et

$$D(g) = \lambda_1 \underbrace{D(f_1)}_{\in G} + \lambda_2 \underbrace{D(f_2)}_{\in G} + \lambda_3 \underbrace{D(f_3)}_{\in G} \in G.$$

Beaucoup m'écrivent une fonction($D(f_1)$ par exemple) égale un réel (par exemple e^t). J'ai vu également des $D(e^t)$, ce qui n'a aucun sens car D prend en argument une fonction. *Nous noterons $\widehat{D}$ l'endomorphisme de G induit par D.*

5. *Calculer $\widehat{D}^3(f_i)$ pour i variant de 1 à 3.*
   On a

   - $\widehat{D}^3(f_1) = (f_1)^{(3)} = f_1$
   - $$\begin{aligned}\widehat{D}^2(f_2) &= D\left(-\frac{1}{2}f_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}f_3\right)\\ &= -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}f_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}f_3\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}f_2 - \tfrac{1}{2}f_3\right)\\ &= -\frac{1}{2}f_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}f_3\end{aligned}$$
     donc
     $$\begin{aligned}D^3(f_2) &= -\frac{1}{2}D(f_2) - \frac{\sqrt{3}}{2}D(f_3)\\ &= -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}f_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}f_3\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}f_2 - \tfrac{1}{2}f_3\right)\\ &= f_2\end{aligned}$$
     on a donc bien $\widehat{D}^3(f_2) = f_2$.
   - De même,
     $$\begin{aligned}\widehat{D}^2(f_3) &= D\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}f_2 - \frac{\sqrt{1}}{2}f_3\right)\\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{1}{2}f_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}f_3\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}f_2 - \tfrac{1}{2}f_3\right)\\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}f_2 - \frac{1}{2}f_3\end{aligned}$$
     donc
     $$\begin{aligned}D^3(f_2) &= \frac{\sqrt{3}}{2}D(f_2) - \frac{1}{2}D(f_3)\\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{1}{2}f_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}f_3\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}f_2 - \tfrac{1}{2}f_3\right)\\ &= f_3\end{aligned}$$
     on a donc bien $\widehat{D}^3(f_3) = f_3$.

6. *En déduire que $\widehat{D}^3 = id_G$.*

   Par linéarité de D^3, on a bien $\forall g \in G$, $\widehat{D}^3 = id_G$.

7. *Montrer que $\widehat{D}$ est un automorphisme de G et exprimer $(\widehat{D})^{-1}$ en fonction de $\widehat{D}$.*

On a $\widehat{D} \circ \widehat{D}^2 = id_G = \widehat{D}^2 \circ \widehat{D}$ donc $\widehat{D}$ est bijectif et $\widehat{D}^{-1} = \widehat{D}^2$.

Le thm donne la bijectivité puis la bijection réciproque, faites pareil (on évite de parler de $\widehat{D}^{-1}$ avant d'avoir montré que $\widehat{D}$ était bijective)

Partie II

Nous nous intéressons dans cette partie à l'équation différentielle $y''' = y$, que nous noterons $(\mathcal{E})$. Une solution sur $\mathbb{R}$ de $(\mathcal{E})$ est une fonction dérivable trois fois sur $\mathbb{R}$, vérifiant $f'''(t) = f(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

1. *Montrer que toute solution f de $(\mathcal{E})$ est C^∞.*
   Soit f une solution de $\mathcal{E}$, alors f est trois fois dérivable.

   Si f est $3k$-fois dérivable, alors $f^{(3)} = f$ implique que f est $3k+3$-fois dérivable, ainsi pour tout $k \in \mathbb{N}$, f est $3k$-fois dérivable donc de classe C^{3k-1}. Si $n \in \mathbb{N}$, alors f est de classe C^{3n-1} donc de classe C^n. Ceci étant valable pour tout entier n, f est de classe C^∞.

   Beaucoup m'ont montré par récurrence que $f^{(3k)} = f$, cela ne suffit pas à me convaincre! Quand vous me montrez que pour tout k, f est D^{3k}, êtes-vous convaincus que ça implique f C^n pour tout n?

2. *Montrer que la fonction nulle est la seule solution polynomiale de $(\mathcal{E})$.*

Soit P un polynôme non nul, notons n son degré. Alors $P^{(3)} = P$ implique $\deg(P^{(3)}) = \deg(P)$. Or $\deg(P^{(3)}) < \deg(P)$, on a donc une contradiction et la seule solution polynomiale est la solution nulle.

L'égalité $\deg(P^{(3)}) = \deg(P) - 3$ n'est valable que si $\deg(P) \geqslant 3$. Notons $T = D^3 - Id$, où Id est l'identité de E, et $D^3 = D \circ D \circ D$.

3. *Montrer que le noyau de T est égal à l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$* On a montré qu'une solution de $\mathcal{E}$ est un élément de E. Soit $f \in E$, alors $f \in \mathrm{Ker}(T) \Leftrightarrow D^3(f) - f = 0 \Leftrightarrow f^{(3)} = f \Leftrightarrow f$ solution de $\mathcal{E}$. On a bien l'égalité entre ces deux ensembles.

4. *Montrer que $G \subset Ker(T)$.*

On a montré que $\forall g \in G$, $D^3(g) = g$ donc $T(g) = 0_E$. On en déduit que pour tout $g \in G$, $g \in \mathrm{Ker}(T)$ donc on a bien l'inclusion $G \subset \mathrm{Ker}(T)$.

Soit f une solution de $(\mathcal{E})$; nous noterons $g = f'' + f' + f$.

5. *Montrer que g est solution de l'équation différentielle $y' = y$.* On a

$$g' = f^{(3)} + f^{(2)} + f' = f + f" + f,$$

   car f est solution de $\mathcal{E}$. On a donc bien $g' = g$.

   Si vous souhaitez raisonner par équivalence, rédigez-le correctement !!!

6. *Décrivez rapidement l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' - y = 0$.*

   L'ensemble des solutions est $\{t \mapsto \lambda e^t, \lambda \in \mathbb{R}\}$

   Les solutions de cette équation sont des FONCTIONS !!!!!!

7. *Résolvez l'équation différentielle $y'' + y' + y = 0$; vous donnerez une base de l'ensemble des solutions.*

   On calcule l'équation caractéristique $r^2 + r + 1 = 0$, les racines sont $-\dfrac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$, les solutions sont donc les fonctions de la forme

$$t \mapsto e^{-t/2}\left(A \sin \frac{\sqrt{3}t}{2} + B \cos \frac{\sqrt{3}t}{2}\right), (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$

   Les solutions de cette équation sont des FONCTIONS !!!!!!

   Une base de l'ensemble des solutions est (f_2, f_3).

8. *Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Décrivez l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' + y' + y = \lambda e^t$.*

   On a déjà trouvé les solutions de l'équation homogène, on cherche donc une solution particulière sous la forme $y_p : t \mapsto \alpha e^t$, $\alpha \in \mathbb{R}$. On trouve $\alpha = \dfrac{\lambda}{3}$, l'ensemble des solutions est donc

$$\left\{ t \mapsto Ae^{-t/2} \sin \frac{\sqrt{3}t}{2} + Be^{-t/2} \cos \frac{\sqrt{3}t}{2} + \frac{\lambda}{3} e^t, (A, B) \in \mathbb{R}^2. \right\}$$

   Attention, j'ai vu très souvent $\dfrac{\lambda}{3}$ qui devenait C quelconque (et donc l'ensemble des solutions était G, c'est faux ! Le coefficient devant e^t est unique et dépend de λ

9. *En déduire que $Ker(T) \subset G$.*

   Si f est une solution, alors $g = f" + f' + f$ vérifie $g' = g$ donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $g : t \mapsto \lambda e^t$, f est donc solution de

$$y" + y' + y = \lambda e^t,$$

   donc il existe $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f : t \mapsto Ae^{-t/2} \sin \dfrac{\sqrt{3}t}{2} + Be^{-t/2} \cos \dfrac{\sqrt{3}t}{2} + \dfrac{\lambda}{3} e^t$. On a donc bien $f \in G$ ce qui montre $\mathrm{Ker}(T) \subset G$.

10. *Conclure*

    On a montré, par double inclusion, que l'ensemble des solutions de $\mathcal{E}$ est G, une base de l'ensemble des solutions est donc (f_1, f_2, f_2).