Lycée du Parc
PCSI 842
Feuille 21

Année 2024-2025

TD 21: Séries numériques.

1 Nature de séries

Exercice 1.
Étudier la nature des séries de terme général donné dans les cas suivants; on précisera si besoin le type de convergence.

1. $\dfrac{1}{n^2+n}$
2. $\dfrac{e^n}{n^5+e^{-n}}$
3. $\dfrac{\cos(n)}{n^2}$
4. $\cos\left(\pi+\dfrac{n}{n+1}\right)$
5. $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\sin\dfrac{\pi}{2n}$
6. $\dfrac{1+n\cos(n\pi)}{n^2}$
7. $\sqrt[n]{n}$
8. $\sqrt[n]{n+1}-\sqrt[n]{n}$

Exercice 2.
Soit $\sum u_n$ une série convergente à termes positifs. Étudier la convergence des séries de termes généraux :

1. u_n^2
2. $\dfrac{u_n}{1+u_n}$
3. $\dfrac{u_n}{1-u_n}$
4. $\dfrac{\sqrt{u_n}}{n}$

Exercice 3. *Série alternée*

1. On veut étudier la nature de la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. On note $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ la suite des sommes partielles. On a donc, pour tout $n\geqslant 1$, $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$.
   (a) On pose $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}=(S_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $(W_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}=(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}^\star}$. Montrer que $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $(W_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ sont adjacentes.
   (b) En déduire la nature de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ puis celle de la série.
2. On considère la série de terme général $\sqrt{1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}-1$.
   (a) Faites un DL en $o\left(\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ du terme général.
   (b) Conclure sur la nature de la série.

Exercice 4. *Série harmonique - constante d'Euler*
On pose, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $v_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln(n)=H_n-\ln(n)$, où $H_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

1. Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ \dfrac{1}{x+1}\leqslant\ln(x+1)-\ln(x)\leqslant\dfrac{1}{x}$.
2. Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\},\ \displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}\leqslant\ln(n)\leqslant\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$.
3. Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ v_n\geqslant 0$. Étudier la monotonie de la suite (v_n).
4. En déduire que (v_n) converge vers une constante γ (**constante d'Euler**), et qu'on peut écrire :
$$H_n=\ln(n)+\gamma+o(1).$$
5. Montrer que la série de terme général $\dfrac{1}{n}$ est divergente, et prouver que : $H_n\sim\ln(n)$.
6. On considère à présent la *série harmonique alternée* de terme général $\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$.
   Pour x dans $[0,1]$ et n dans $\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$, on pose : $S_n(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^kx^k$
   (a) Calculer une autre expression de $S_n(x)$. En déduire que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}=\ln 2+(-1)^n\int_0^1\frac{x^{n+1}}{1+x}\,\mathrm{d}x$.
   (b) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1\frac{x^{n+1}}{1+x}\mathrm{d}x=0$ à l'aide d'un encadrement.
   (c) Démontrer enfin que cette est convergente, et calculer sa somme.

Exercice 5.
On définit la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ par $u_1\in\mathbb{R}$ et $\forall n\geqslant 1, u_{n+1}=\dfrac{1}{n}e^{-u_n}$. On souhaite étudier les séries $\sum u_n$ et $\sum(-1)^n u_n$.

1. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}u_n=0$.
2. En déduire que $u_n\sim\dfrac{1}{n}$.
3. Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}u_n$?
4. On pose $v_n=-u_n+\dfrac{1}{n-1}$. Montrer que $v_n\sim\dfrac{1}{n^2}$.
5. Montrer : $u_{2n}-u_{2n-1}=\mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$
6. En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n u_n$?

2 Détermination de la somme

Exercice 6.
Déterminer la somme de la série de terme général $2^{n+1}3^{2-n}$, $n \geqslant 0$.

Exercice 7.
Montrer que la série de terme général $\ln\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$, pour $n \geqslant 2$, est convergente et calculer sa somme.

Exercice 8.
Montrer que la série de terme général $\dfrac{k}{(k+1)!}$ est convergente et calculer sa somme.

Exercice 9.
On admet que la série $\sum \dfrac{1}{k^2}$ converge et que sa somme vaut $\dfrac{\pi^2}{6}$. Déterminer la somme de la série $\sum \dfrac{1}{k^2(k+1)^2}$.

Exercice 10.
Montrer que la série de terme général $u_n = \dfrac{\lfloor\sqrt{n+1}\rfloor - \lfloor\sqrt{n}\rfloor}{n}$ converge et calculer sa somme.

Exercice 11.
Soit $x \in \mathbb{R}$. L'objectif de l'exercice est de mettre en évidence une technique pour calculer les sommes du type $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} P(n)\dfrac{x^n}{n!}}$, où P est un polynôme.

1. Déterminer (après avoir montré son existence) la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n\frac{x^n}{n!}$.
2. Même question avec $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\frac{x^n}{n!}$.
3. En déduire la réponse à la question initiale dans le cas où P est de degré $\leqslant 2$.
4. Que faire lorsque P est de degré quelconque ?

3 Si besoin d'encore un peu d'entrainement

Exercice 12.

Étudier la nature des séries de terme général u_n dans les cas suivants; on précisera si besoin le type de convergence.

1. $u_n = \dfrac{1}{n+\ln(n)}$
2. $u_n = \ln\left(1-\dfrac{1}{n+2}\right)$
3. $u_n = \ln(\cos(1/2n))$
4. $u_n = \dfrac{1}{n\sqrt[n]{n}}$
5. $u_n = (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^\alpha$.
6. $u_n = n\ln n\, e^{-\sqrt{n}}$
7. $u_n = \left(\dfrac{1}{\ln 3n}\right)^n$
8. $\dfrac{\ln((n+1)(n+2))}{n(n+3)}$
9. $u_n = \dfrac{e^{-2n}+n}{n^3+1}$
10. $u_n = \dfrac{\cos(n^2)+n\sin(n)}{n^2\sqrt{n}}$

Exercice 13.
Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. Déterminer la nature de $\sum \dfrac{u_n}{1+n^2u_n}$.

Exercice 14.
Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs telle que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. On suppose que $\sum\sqrt{u_nu_{n+1}}$ converge, qu'en est-il de $\sum u_n$?

Exercice 15.
Montrer que la série de terme général $\dfrac{3^{n-1}}{5^{n+1}}$, $n \geqslant 0$ est convergente et calculer sa somme.

Exercice 16.
Vérifier que la série est convergente $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{n+1}{3^n}$ et calculer sa somme.

Exercice 17.
Vérifier que la série est convergente $\displaystyle\sum_{k\geqslant 2}\frac{1}{\sqrt{k-1}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}-\frac{2}{\sqrt{k}}$ et calculer sa somme.

4 Une fois qu'on est à l'aise

Exercice 18.
Soit $\sum u_n$ une série convergente à termes positifs. Que dire des séries de termes généraux $\sqrt{u_n}$ et $(-1)^n\sqrt{u_n}$?

Exercice 19.

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite positive. On pose $v_n = \dfrac{1}{n(n+1)}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} ku_k$. Montrer que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature et, lorsqu'elles convergent, même somme.

Exercice 20. **(ENSI PC 1999)**

Déterminer la nature de la série de terme général $\ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}\right)$.

Exercice 21. **(Mines-Pont MP 2005)**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle positive et $v_n = \dfrac{1}{1+n^2u_n}$. Montrer que $\sum u_n$ converge implique $\sum v_n$ diverge.

Que dire si $\sum u_n$ diverge?

Exercice 22. **(Mines MP 2000)**

Soit $\alpha > 0$, étudier la série de terme général $\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}}$.

Exercice 23.

Soit $\sum u_n$ une série convergente à termes positifs. Étudier la nature de la série de terme général $v_n = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} ku_k$

Memo

- Comment déterminer la nature d'une série?
  - Identifier une divergence grossière
  - Majorer le terme général positif (ou sa valeur absolue) par le t.g d'une série convergente.
  - Montrer que la somme partielle (avec t.g positif) est bornée.
  - Multiplier le terme général par n^α, $\alpha > 1$ et montrer que le tout tend vers zéro.
  - Multiplier le terme général par n^α, $\alpha \leqslant 1$ et montrer que le tout tend vers $+\infty$.
  - Déterminer un équivalent du terme général et conclure s'il est de signe constant.
  - Faire apparaître une somme télescopique
  - Déterminer un développement limité du terme général en espérant tomber sur un cas où l'on peut conclure (CV+CV ou DIV+CV)
- Comment déterminer la somme d'une série convergente?
  - Reconnaître ou exprimer à l'aide d'une somme télescopique
  - Reconnaître ou exprimer à l'aide d'une somme géométrique
  - Reconnaître ou exprimer à l'aide d'une série exponentielle