Correction du TD n 20

Correction 1 Une base de $\mathbb{R}_1[X]$ est $(1, X)$, une de vect $\big((1+X+X^2)\big)$ est $(1+X+X^2)$, la concaténation est la famille $(1, X, 1+X+X^2)$, famille de trois polynômes non nuls de degrés distincts, c'est donc une famille libre de $\mathbb{R}_2[X]$. Comme elle est de cardinal 3, c'est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ donc les ssev sont supplémentaires.

Correction 2 On a $F = \{(x, y, -x, -y), (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$ donc $\dim(F) = 2$ et $\dim(F') = 1$. Les deux espaces sont en somme directe, on a donc $\dim(F \oplus F') = \dim \mathbb{R}^3$ et comme on a l'inclusion $F \oplus F' \subset \mathbb{R}^3$, on en déduit l'égalité $F \oplus F' = \mathbb{R}^3$ donc les deux espaces sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

Correction 3 Soit $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On raisonne par équivalence :

$$\begin{array}{ll} X \in F \Leftrightarrow & 2x - y = 0 = x + z \\ \Leftrightarrow & 2x = y = -2z \\ \Leftrightarrow & X = (x, 2x, -x). \end{array}$$

Par équivalence, on a montré que $F = \text{Vect}\,((1, 2, -1))$.

Soit $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On raisonne par équivalence :

$$\begin{array}{ll} X \in G \Leftrightarrow & x + y + z = 0 \\ \Leftrightarrow & z = -x - y \\ \Leftrightarrow & X = (x, y, -x - y) \\ \Leftrightarrow & X = x(1, 0, -1) + y(0, 1, -1). \end{array}$$

Par équivalence, on a montré que $G = \text{Vect}\,((1, 0, -1), (0, 1, -1))$.

On a $\dim(F) + \dim(G) = \dim(\mathbb{R}^3)$. Pour montrer qu'ils sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$, il suffit donc de montrer qu'ils sont en somme directe.
Soit $X = (x, y, z) \in F \cap G$, alors $2x = y = -2z$ et $x + y + z = 0$ d'où $2x = 0$ puis $X = (0, 0, 0)$. La somme est bien directe et les espaces sont supplémentaires.

Soit $X = (x, y, z)$, on sait que X peut s'écrire comme la somme d'un élément de F et d'un élément de G, ce qui signifie qu'il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$X = \underbrace{(a, 2a, -a)}_{\in F} + \underbrace{(b, c, -b - c)}_{\in G}.$$

On a $p(X) = (a, 2a, -a)$, on cherche donc a. En identifiant les coordonnées, on obtient :

$$\begin{cases} a + b & = x \\ 2a + c & = y \\ -a - b - c & = z \end{cases}$$

En additionnant toutes les lignes, on obtient $a = \dfrac{x+y+z}{2}$. Ainsi,

$$p(x, y, z) = \frac{x+y+z}{2}(1, 2, -1).$$

Correction 4

1. Si la somme était directe, on aurait $\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G)$. Or, $F \oplus G$ est un sous-espace vectoriel de E, sa dimension ne peut donc pas être strictement supérieure à celle de E. La somme n'est donc pas directe.
2. La somme n'est pas nécessairement directe. Prenons par exemple $E = \mathbb{R}_3[X]$, $F = \text{Vect}(1, X)$ et $G = \text{Vect}(1, X^3)$. Alors $\dim(F) + \dim(G) \leqslant 4$ mais les deux espaces ne sont pas en somme directe.

Correction 5 On raisonne par analyse synthèse.

<u>Analyse</u> :Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe une matrice symétrique S et une matrice anti-symétrique S telles que $M = S + A$.

Alors ${}^t(M) = {}^t(S) + {}^t(A) = S - A$. On a donc $M = S + A$ et ${}^t(M) = S - A$ d'où $S = \dfrac{M + {}^t(M)}{2}$ et $A = \dfrac{M - {}^t(M)}{2}$.

<u>Synthèse</u> :Soit $M \in M_2(\mathbb{R})$, on pose $S = \dfrac{M + {}^t(M)}{2}$ et $A = \dfrac{M - {}^t(M)}{2}$. Montrons que

- $M = S + A$
- S est symétrique
- A est antisymétrique.

On a $S + A = \dfrac{M + {}^t(M)}{2} + \dfrac{M - {}^t(M)}{2} = M$.

Par ailleurs, ${}^t(S) = \dfrac{{}^t(M) + M}{2} = S$ par linéarité de la transposée, donc S est symétrique. De même, on a ${}^t(A) = \dfrac{{}^t(M) - M}{2} = -A$ donc A est antisymétrique.

On a montré que tout élément de $M_n(\mathbb{R})$ s'écrit comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique. De plus, par la phase d'analyse, on a montré l'unicité de l'écriture. Ainsi, les deux ensembles sont bien supplémentaires dans $M_n(\mathbb{R})$.

On cherche une base de $S_n(\mathbb{K})$. Soit $A=(a_{ij})\in M_n(\mathbb{K})$. On a $A=\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{ij}E_{ij}$ où E_{ij} désigne les matrices élémentaires.

$$\begin{aligned} A\in S_n(\mathbb{R}) &\Leftrightarrow \forall (i,j)\in [\![1,n]\!]^2, a_{ij}=a_{ji}\\ &\Leftrightarrow A=\sum_{1\leqslant i<j} a_{ij}\left(E_{ij}+E_{ji}\right)+\sum_{i=1}^{n} a_{ii}E_{ii}\end{aligned}$$

La famille $(E_{ij}+E_{ji})_{1\leqslant i<j\leqslant n}$ concaténée avec $(E_{ii})_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une famille génératrice de $S_n(\mathbb{K})$. Par unicité de l'écriture, c'est une base.

Correction 6 On commence par déterminer la forme générale d'un élément de F. Pour cela, on prend $(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$ et on raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned}(x,y,z,t)\in F &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccccc} x&+&y&+&z&&&=&0\\ 2x&-&y&+&2z&+&t&=&0\end{array}\right.\\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} t&=&3y\\ z&=&-x-y.\end{array}\right.\end{aligned}$$

Une base de F est donc (). On pose $G=\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4, x=y=0\right\}=\operatorname{Vect}\left((0,0,1,0),(0,0,0,1)\right)$. La famille

$$\left((1,0,-1,0),(0,1,-1,3),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\right)$$

est échelonnée donc libre, de cardinal 4 donc c'est une base de $\mathbb{R}^4$. On en déduit que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

Correction 7 1. On va montrer que F est l'espace engendré par $\left((X-2)X^k\right)_{0\leqslant k\leqslant n-1}$ ce qui permettra à la fois d'affirmer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ et d'en donner une famille génératrice.
Soit $P\in\mathbb{R}_n[X]$. On raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned} P\in F\Leftrightarrow\ & (X-2)|P\\ \Leftrightarrow\ & \exists Q\in\mathbb{R}_{n-1}[X], P(X)=(X-2)Q(X)\\ \Leftrightarrow\ & \exists Q=\sum_{k=0}^{n-1}a_kX^k, P(X)=\sum_{k=0}^{n-1}a_k\left((X-2)X^k\right)\\ \Leftrightarrow\ & P\in\operatorname{Vect}\left(\left((X-2)X^k\right)_{0\leqslant k\leqslant n-1}\right).\end{aligned}$$

Par équivalence, on a montré que $F=\operatorname{Vect}\left(\left((X-2)X^k\right)_{0\leqslant k\leqslant n-1}\right)$ donc F est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ et une famille génératrice de F est $\left((X-2)X^k\right)_{0\leqslant k\leqslant n-1}$.

2. Soit $P\in\mathbb{R}_n[X]$. On fait la division euclidienne de P par $(X-2)$. Le reste est de degré strictement inférieur à 1 donc c'est une constante. Il existe donc $(Q,r)\in\mathbb{R}_n[X]\times\mathbb{R}$ tel que :

$$P(X)=\underbrace{(X-2)Q(X)}_{\in F}+\underbrace{r}_{\in\mathbb{R}}.$$

On a montré qu'un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ s'écrit comme la somme d'un élément de F et d'un élément de $\mathbb{R}$ ce qui montre l'inclusion :

$$\mathbb{R}_n[X]\subset F+\mathbb{R}.$$

L'inclusion réciproque étant claire, on a l'égalité. Reste à montrer que la somme est directe ce qui est clair étant donné que le seul polynôme constant admettant 2 pour racine est le polynôme nul. On a donc :

$$F\oplus\mathbb{R}=\mathbb{R}_n[X],$$

et l'ensemble $\mathbb{R}$ des polynômes constants est un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}_n[X]$.

On peut aussi dire que la concaténation d'une base de F et d'une base de $\mathbb{R}_0[X]$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

En effet, la famille $(1,(X-2),X(X-2),\dots,X^{n-1}(X-2))$ est libre car de degrés distincts. Elle comporte $n+1$ éléments, c'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$. On en déduit que $\mathbb{R}_0[X]$, l'ensemble des polynômes constants, est un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}_n[X]$.

3. Pour $k=0$, on a $\mathbb{R}=\operatorname{Vect}(1)$ supplémentaire de F d'après la première question et il est engendré par un polynôme de degré 0. Soit maintenant $k\in[\![1,n]\!]$, montrons que $1+X^{k-1}(X-2)$ engendre un supplémentaire de F. On raisonne par analyse-synthèse.
<u>Analyse</u> :Soit $P\in\mathbb{R}_n[X]$, supposons qu'il existe $Q\in F$ et $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que :

$$P=Q+\lambda\left(1+X^{k-1}(X-2)\right).$$

Pour $X=2$, on a :

$$\begin{aligned}P(2)&=Q(2)+\lambda\\ &=\lambda\text{car } Q\in F\end{aligned}$$

On a donc $\lambda=P(2)$.
<u>Synthèse</u> :Soit $P\in\mathbb{R}_n[X]$.
On pose $\lambda=P(2)$ et $Q=P-\lambda\left(1+X^{k-1}(X-2)\right)$. On a alors :

- $\lambda\left(1+X^{k-1}(X-2)\right) \in \text{Vect}\left(1+X^{k-1}(X-2)\right)$,
- $Q \in F$ car $Q(2) = P(2) - \lambda = 0$,
- $P = Q + \lambda\left(1+X^{k-1}(X-2)\right)$ par définition de Q.

On a montré que tout polynôme P peut s'écrire comme un élément de F et d'un élément de $\text{Vect}\left(1+X^{k-1}(X-2)\right)$. De plus, d'après la phase d'analyse, cette écriture est unique. On en déduit que les espaces F et $\text{Vect}(1+X^{k-1}(X-2))$ sont supplémentaires. On a bien trouvé, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$ un supplémentaire engendré par un polynôme de degré k.

Remarque: Ici, on a simplement pris un élément de degré k qui n'appartient pas à F. Vous pouvez montrer (par que la dimension d'un supplémentaire est ici 1), que pour tout $P \notin F$, on a $\text{Vect}(P)$ supplémentaire de F dans $\mathbb{R}_n[X]$.

Correction 8 1. $\mathcal{F}_1$ n'a que deux éléments, ce n'est pas une base de $\mathbb{R}^3$.

2. $\mathcal{F}_2$ a quatre éléments, ce n'est pas une base de $\mathbb{R}^3$.

3. On regarde si la famille est génératrice de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned}\text{vect}\left((1,2,3),\ (4,5,6),\ (7,8,9)\right) &= \text{vect}\left((1,2,3),(0,-3,-6),(0,-6,-12)\right) (v_2 \leftarrow v_2 - 4v_1,\ v_3 \leftarrow v_3 - 7v_1)\\ &= Vect\left((1,2,3),(0,1,2)\right) \text{ car les deux derniers vecteurs sont colinéaires}\end{aligned}$$

On en déduit que l'espace engendré par $\mathcal{F}_3$ est de dimension 2 donc il n'est pas égal à $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{F}_3$ n'est pas une base de $\mathbb{R}^3$.

4. On procède par disjonction de cas:

- Si $eb \neq 0$, alors la famille est échelonnée donc libre. Comme elle est de cardinal 3, c'est une base de $\mathbb{R}^3$.
- Si $e = 0$, alors toute combinaison linéaire de la famille a comme troisième coordonnées 0, la famille ne peut donc pas engendré $\mathbb{R}^3$.
- Si $b = 0$, alors les deux premiers vecteurs sont colinéaires et la famille n'est pas libre.

On en déduit que $\mathcal{F}_4$ est une base de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si $eb \neq 0$.

Correction 9 On note $u_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{i} e_j$ les éléments de cette famille. Celle-ci est de cardinal n avec $n = \dim(E)$, il suffit donc de montrer qu'elle est libre pour affirmer que c'est une base de E. On suppose qu'il existe des réels $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ tel que :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = 0_E.$$

On remplace u_i par son expression :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(\sum_{j=1}^{i} e_j\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} \lambda_i e_j\\ &= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=j}^{n} \lambda_i\right) e_j\end{aligned}$$

Ainsi, on a une combinaison linéaire nulle de la famille $(e_1, \cdots, e_n)$ qui est libre donc les coefficients sont nuls. Le système correspondant, d'inconnues $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ est échelonné, son unique solution est donc $(0, \cdots, 0)$ ce qui montre que la famille $(u_1, \cdots, u_n)$ est une famille libre, donc une base de E.

Correction 10 Soit $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$, on raisonne par équivalence :

$(x,y,z,t) \in G \Leftrightarrow x = 3y+2z$ et $t = 4y+3z \Leftrightarrow (x,y,z,t,) = y(3,1,0,4)+z(2,0,1,3)$.

On a donc $G = \text{Vect}((3,1,0,4),(2,0,1,3))$. Les deux vecteurs $(3,1,0,4)$ et $(2,0,1,3)$ ne sont pas colinéaires, ils sont libres et forment donc une base de G. Pour obtenir un supplémentaire de G, on complète ces deux vecteurs en une base de $\mathbb{R}^4$. On pose $\tilde{G} = \text{vect}\left((1,0,0,0),(0,0,0,1)\right)$. Montrons rapidement que la famille $((3,1,0,4),(2,0,1,3),(1,0,0,0),(0,0,0,1))$ est une base de $\mathbb{R}^4$. Il suffit pour cela que les quatre vecteurs forment une famille libre puisqu'elle est de cardinal 4 et $\dim\mathbb{R}^4 = 4$. Supposons qu'il existe $\alpha_1, \cdots, \alpha_4$ des réels tels que :

$$\alpha_1(3,1,0,4) + \alpha_2(2,0,1,3) + \alpha_3(1,0,0,0) + \alpha_4(0,0,0,1) = (0,0,0,0)$$

on a alors :

$$\begin{cases} 3\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0\\ \alpha_1 = 0\\ \alpha_2 = 0\\ 4\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_4 = 0\end{cases}$$

soit $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$ est la famille est bien libre donc c'est une base de $\mathbb{R}^4$ ce qui montre que $\tilde{G}$ est un supplémentaire de G dans $\mathbb{R}^4$.

Correction 11 Il suffit de montrer que cette famille est génératrice ou libre puisqu'elle est de cardinal 3. On va montrer qu'elle est génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$ car on doit ensuite calculer des coordonnées. On se donne $aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$, montrons qu'il existe $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$aX^2 + bX + C = \lambda X + \mu(X-1) + \nu(X-1)^2,$$

c'est-à-dire :

$$aX^2+bX+c=\nu X^2+(\lambda+\mu-2\nu)X+(\nu-\mu).$$

Par unicité des coordonnées, on a :

$$\begin{cases}\nu=a\\ \lambda+\mu-2\nu=b\\ \nu-\mu=c\end{cases}\quad\text{d'où}\quad\begin{cases}\nu=a\\ \mu=a-c\\ \lambda=b+a+c\end{cases}$$

On a montré que tout polynôme aX^2+bX+c pouvait s'écrit comme combinaison linéaire de la famille $\big(X, X-1, (X-1)^2\big)$ donc cette famille est génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$. Comme elle est de cardinal 3, c'est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

On cherche les coordonnées de $P=2X^2-5X+6$ dans cette base, c'est-à-dire un triplet (λ,μ,ν) tel que :

$$2X^2-5X+6=\lambda X+\mu(X-1)+\nu(X-1)^2.$$

Le polynôme est de la forme aX^2+bX+c avec $a=2, b=-5$ et $c=6$. D'après le calcul fait ci-dessus, on a $\nu=1$, $\mu=-4$ et $\lambda=3$. Les coordonnées de P dans cette nouvelle base sont donc $(3,-4,2)$

Correction 12 1. On commence par se dire que cette famille compte n vecteurs donc elle a le "bon" cardinal pour être une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ qui est de dimension n $(n-1+1)$. Si on regarde bien, chaque L_i est de degré $n-1$ puisque c'est un produit de $n-1$ facteurs $(j\neq i)$ de la forme $X-a_j$. On ne peut donc pas jouer sur les degrés pour montrer la liberté ou le caractère générateur. En revanche, on observe que l'on connaît les racines de ces polynômes. En effet, si on prend L_1, par exemple, il s'écrit comme le produit d'une grosse constante $\left(\dfrac{1}{\prod_{j=2}^{n}(a_1-a_j)}\right)$ par $\prod_{j=2}^{n}(X-a_j)$, il s'annule donc en les réels $(a_2,\dots,a_n)$.

De manière générale, le polynôme L_i admet pour racines les a_j, $a_j\neq a_i$. Ainsi, on va utiliser ces racines pour montrer la liberté de la famille.

On se donne donc des réels $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{R}^n$ tels que

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i L_i(X)=0,$$

et on va évaluer cette égalité en les différents a_j.

Si on évalue en a_1, on aura $L_i(a_1)=0$ pour tout $i>1$ donc $\lambda_1L_1(a_1)=0$. Or, (et c'est tout là l'intérêt d'avoir divisé par le gros produit moche), on a :

$$L_1(a_1)=\frac{\prod_{j=2}^{n}(a_1-a_j)}{\prod_{j=2}^{n}(a_1-a_j)}=1.$$

On se retrouve donc avec $\lambda_1=0$.

On revient à notre égalité qui est désormais :

$$\sum_{i=2}^{n}\lambda_i L_i(X)=0,$$

et on évalue en a_2. On va se retrouver avec tous les $L_i(a_2)=0$ pour $i>2$ et $L_2(a_2)=1$ donc $\lambda_2=0$. En itérant le procédé, on montre que tous les λ_i sont nuls donc la famille est libre.

Vous pouvez aussi dire que $L_i(a_j)=\delta_{ij}$ (symbole de Kronecker, celui qui vaut 0 si $i\neq j$ et 1 sinon). Pour tout $j\in[\![1,n]\!]$, on a

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i L_i(a_j)=\lambda_j,$$

donc $\forall j\in[\![1,n]\!], \lambda_j=0$. La famille $(L_1,\dots,L_n)$ est donc une famille libre de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, de cardinal $\dim(\mathbb{R}_{n-1}[X])=n$, donc c'est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

2. (a) On applique (calmement) la définition.

$$L_1(X)=\frac{(X-a_2)(X-a_3)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)},$$

donc $L_1(X)=-\dfrac{1}{2}(X+2)(X-1)$.

$$L_2(X)=\frac{(X-a_1)(X-a_3)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)},$$

donc $L_2(X)=\dfrac{1}{6}X(X-1)$.

$$L_3(X)=\frac{(X-a_1)(X-a_2)}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)},$$

donc $L_3(X)=\dfrac{1}{3}X(X+2)$

(b) Si $P \in \mathbb{R}[X]$, alors il existe $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$P = \lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \lambda_3 L_3.$$

- En évaluant en 0, on obtient : $P(0) = \lambda_1$.
- En évaluant en -2, on obtient $P(-2) = \lambda_2$.
- En évaluant en 1, on obtient $P(1) = \lambda_3$.

Les coordonnées de P dans la base (L_1, L_2, L_3) sont donc $(P(0), P(-2), P(1))$. On peut maintenant calculer les coordonnées des polynômes de la base canonique :

- Pour 1, les coordonnées sont $(1, 1, 1)$.
- Pour X, les coordonnées sont $(0, -2, 1)$.
- Pour X^2, les coordonnées de X^2 sont $(0, 4, 1)$.

Ces polynômes s'appellent les polynômes interpolateurs de Lagrange (interpolateur car, grâce à eux, on peut construire des polynômes qui prennent des valeurs données en des points donnés, autrement dit des polynômes qui passent par un nuage de points, par exemple). C'est ultra classique. Il est donc utile de bien comprendre cet exercice !

Correction 13 Pour déterminer le rang de ces familles, il faut déterminer la dimension de l'espace engendré.

1. On a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vect}\,(\mathcal{F}_1) &= \mathrm{Vect}\,(v_1,\ v_1 + v_2,\ \ldots,\ v_1 + v_2 + \cdots + v_k) \\
&= \mathrm{Vect}\,(v_1, v_2, v_2 + v_3, \ldots, v_2 + \ldots + v_k) \\
&\ \text{en enlevant } v_1 \text{ à tous les vecteurs de 2 à k} \\
&= \mathrm{Vect}\,(v_1, v_2, v_3, \ldots, v_3 + \ldots + v_k) \\
&\ \text{en enlevant } v_2 \text{ à tous les vecteurs de 3 à k}
\end{aligned}$$

   En réitérant le procédé, on obtient :

$$\mathrm{Vect}\,(\mathcal{F}_1) = \mathrm{Vect}\,(v_1, \ldots, v_k)\,.$$

   Or, on sait que la famille $(v_1, \ldots, v_k)$ est libre donc de rang k (égal à son cardinal). On en déduit que $\mathrm{Vect}\,(\mathcal{F}_1)$ est de dimension k donc $\mathcal{F}_1$ est de rang k.

2. On remarque que la somme des vecteurs de cette famille $\mathcal{F}_2$ faut 0_E donc le rang de cette famille est strictement inférieur à k. De plus, si la somme des vecteurs de $\mathcal{F}_2$ vaut 0_E, alors (par exemple) le dernier vecteur $v_k - v_1$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des $k-1$ premiers vecteurs de la famille (il est égal à l'opposé de la somme des $k-1$ premiers vecteurs), on peut donc "l'enlever" dans l'espace engendré :

$$\mathrm{Vect}(\mathcal{F}_2) = \mathrm{Vect}\,(v_1 - v_2,\ v_2 - v_3,\ \ldots,\ v_{k-1} - v_k)$$

Montrons maintenant que la famille $(v_1 - v_2,\ v_2 - v_3,\ \ldots,\ v_{k-1} - v_k)$ est libre ce qui montrera que $\mathcal{F}_2$ est de rang $k-1$.
On suppose donc qu'il existe une combinaison linéaire nulle de la famille, autrement dit des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_{k-1}$ tels que

$$\lambda_1\,(v_1 - v_2) + \lambda_2\,(v_2 - v_3) + \cdots + \lambda_{k-1}\,(v_{k-1} - v_k) = 0_E$$

ou bien, réécrit proprement :

$$\sum_{j=1}^{k-1} \lambda_j\,(v_j - v_{j+1}) = 0_E.$$

Pour pouvoir utiliser la liberté de la famille $(v_1, \ldots, v_k)$, il faut faire apparaître une combinaison linéaire nulle de la famille. On écrit donc :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{k-1} \lambda_j\,(v_j - v_{j+1}) &= \sum_{j=1}^{k-1} \lambda_j v_j - \sum_{j=1}^{k-1} \lambda_j v_{j+1} \\
&= \sum_{j=1}^{k-1} \lambda_j v_j - \sum_{i=2}^{k} \lambda_{i-1} v_i
\end{aligned}$$

On a posé $i = j+1$, j varie de 1 à $n-1$ donc i varie de 2 à n et on a $j = i-1$. Comme i une variable muette, on la renomme j, on a donc

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{k-1} \lambda_j v_j - \sum_{i=2}^{k} \lambda_{i-1} v_i \\
&= \sum_{j=1}^{k-1} \lambda_j v_j - \sum_{j=2}^{k} \lambda_{j-1} v_j \\
&= \lambda_1 v_1 + \sum_{j=2}^{k-1} \lambda_j v_j - \sum_{j=2}^{k-1} \lambda_{j-1} v_j - \lambda_{k-1} v_k \\
&= \lambda_1 v_1 + \sum_{j=2}^{k-1} (\lambda_j - \lambda_{j-1})\, v_j - \lambda_{k-1} v_k
\end{aligned}$$

Ainsi, on a réécrit la combinaison linéaire de la famille $\mathcal{F}_2$ comme une combinaison linéaire de la famille $(v_1, \ldots, v_k)$, on a donc :

$$\lambda_1 v_1 + \sum_{j=2}^{k-1} (\lambda_j - \lambda_{j-1})\, v_j - \lambda_{k-1} v_k = 0_E.$$

La famille $(v_1, \dots, v_k)$ étant libre, tous les coefficients de la combinaison linéaire nulle doivent être nuls, on a donc :

$$\begin{cases} \lambda_1 & = 0 \\ \lambda_2 - \lambda_1 & = 0 \\ \lambda_3 - \lambda_2 & = 0 \\ \vdots & \\ \vdots & \\ \lambda_{k-1} - \lambda_{k-2} & = 0 \\ \lambda_{k-1} & = 0 \end{cases}$$

On en déduit que $\forall i \in [\![1, k-1]\!], \lambda_i = 0$. On a montré que la famille

$$(v_1 - v_2,\ v_2 - v_3,\ \dots,\ v_{k-1} - v_k)$$

est libre. Comme elle engendre $\text{Vect}\,(\mathcal{F}_2)$, c'en est une base. Ainsi, $\mathcal{F}_2$ est de rang $k-1$.

3. Nous allons chercher à savoir si la famille $\mathcal{F}_3$ est une famille libre. Pour cela, on suppose qu'il existe une combinaison linéaire nulle de la famille, c'est-à-dire des réels $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ tels que

$$\lambda_1 (v_1 + v_2) + \lambda_2 (v_2 + v_3) \dots + \lambda_{k-1} (v_{k-1} + v_k) + \lambda_k (v_k + v_1) = 0_E,$$

soit encore $\displaystyle\sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i (v_i + v_{i+1}) + \lambda_k (v_k + v_1) = 0_E$.

À nouveau, on va réécrire cette somme pour faire apparaître une combinaison linéaire nulle de la famille $(v_1, \dots, v_k)$. On écrit :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i (v_i + v_{i+1}) + \lambda_k (v_k + v_1) &= \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i v_i + \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i v_{i+1} + \lambda_k (v_k + v_1) \\ \text{on pose } j = i+1, j \in [\![2, k]\!] \quad & \text{dans la deuxième somme, on obtient} \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i v_i + \sum_{j=2}^{k} \lambda_{j-1} v_j + \lambda_k (v_k + v_1) \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i v_i + \sum_{i=2}^{k} \lambda_{i-1} v_i + \lambda_k (v_k + v_1) \\ &= (\lambda_1 + \lambda_k)\, v_1 + \sum_{i=2}^{k-1} (\lambda_i + \lambda_{i-1}) + (\lambda_k + \lambda_{k-1}) v_k \end{aligned}$$

Ainsi, on a réécrit la combinaison linéaire de $\mathcal{F}_3$ en une combinaison linéaire de la famille $(v_1, \dots, v_k)$, on a donc :

$$(\lambda_1 + \lambda_k)\, v_1 + \sum_{i=2}^{k} (\lambda_i + \lambda_{i-1}) = 0_E.$$

La famille $(v_1, \dots, v_k)$ étant libre, les coefficients sont nuls donc :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_k & = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_1 & = 0 \\ \vdots & \vdots \\ \lambda_{k-1} + \lambda_{k-2} & = 0 \\ \lambda_k + \lambda_{k-1} & = 0 \end{cases}$$

Si k est impair, on a $\lambda_1 = -\lambda_2 = \lambda_3$ et par une récurrence immédiate, $\lambda_1 = \lambda_k$. Or $\lambda_1 + \lambda_k = 0$. On a donc $\lambda_1 = \lambda_k = 0$ puis $\forall i \in [\![2, k-1]\!], \lambda_i = 0$ donc la famille est libre et elle est de rang k.

En revanche, si $k = 2p$, on peut prendre $\lambda_i = (-1)^i$ et on trouve une CL nulle de la famille, la famille est donc liée. On enlève le dernier vecteur (peut importe lequel on enlève puisque l'on a trouvé une CL nulle avec TOUS les coefficients non nuls, on peut donc enlever celui que l'on veut). On suppose maintenant qu'il existe des réels $\mu_1, \dots, \mu_{k-1}$ tels que

$$\sum_{k=1}^{k-1} \mu_i (v_i + v_{i+1}) = 0_E.$$

On peut réécrire cette somme sous la forme

$$\mu_1 v_1 + \sum_{i=2}^{k-1} (\mu_i + \mu_{i-1}) v_i + \mu_{k-1} v_k = 0_E.$$

Par liberté de la famille $(v_1, \dots, v_k)$, on a ce que l'on peut réécrire :

$$\begin{cases} \mu_1 & = 0 \\ \mu_2 + \mu_1 & = 0 \\ \vdots & \vdots \\ \mu_{k-1} + \mu_{k-2} & = 0 \\ \mu_{k-1} & = 0 \end{cases}$$

Le système est alors triangulaire donc admet comme unique solution la solution nulle. Ainsi, on a montré que la famille $(v_1 + v_2, \dots, v_{k-1} + v_k)$ est libre , elle est donc de rang son cardinal c'est-à-dire $k-1$.

En conclusion,

$$\mathrm{rg}(\mathcal{F}_3) = \begin{cases} k \text{ si } k \text{ est impair} \\ k-1 \text{ si } k \text{ est pair} \end{cases}$$

Correction 14 1. Soit $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On raisonne par équivalence:

$$\begin{aligned} X \in F_1 &\Leftrightarrow -x + 3y + z = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 3y + z \\ &\Leftrightarrow X = (3y + z, y, z) \\ &\Leftrightarrow X = y(3, 1, 0) + z(1, 0, 1) \end{aligned}$$

On a montré que X appartient à F_1 si et seulement si X s'écrit comme combinaison linéaire de $(3, 1, 0)$ et $(1, 0, 1)$ qui est donc une famille génératrice de F_1. Elle libre car les deux vecteurs sont non colinéaires (ou parce que l'écriture de X en tant que combinaison linéaire est unique), c'est donc une base de F_1 qui est, par conséquent, de dimension 2.

On peut aussi raisonner en disant que $F_1 \neq \mathbb{R}^3$ donc $\dim(F_1) < 3$. Par ailleurs $(1, 0, 1)$ et $(3, 1, 0)$ appartiennent à F_1. Comme ils sont non colinéaires, ils forment une famille libre de F_1 qui est donc de dimension au moins 2. On en déduit que $\dim(F_2) = 2$ et que les deux vecteurs trouvés forment une base de F_1.

2. Soit $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On raisonne par équivalence.

$$\begin{aligned} X \in F_1 &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - 3y = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3y + y + z = 0 \\ x = 3y \end{cases} \\ &\Leftrightarrow X = (3y, y, -4y) \\ &\Leftrightarrow X = y(3, 1, -4) \end{aligned}$$

On a montré que X appartient à F_1 si et seulement si X s'écrit comme combinaison linéaire de $(3, 1, -4)$ qui est non nul, c'est donc une base de F_2. On en déduit que F_2 est de dimension 1.

3. Soit $M \in M_2(\mathbb{R})$. On raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned} M \in F_3 &\Leftrightarrow \exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, M = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & a & 0 \\ c & 0 & a+b \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, M = a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On a montré que M appartient à F_3 si et seulement si M est combinaison linéaire des matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ces matrices forment une famille libre (l'écrire) donc c'est une base de F_3. On en déduit que F_3 est de dimension 3.

Correction 15 Soit $P = \sum_{k=0}^{3} a_k X^k \in \mathbb{R}_3[X]$. On raisonne par équivalence :

$$P \in F \Leftrightarrow P = a_2 X^3 + a_2 X^2 + a_1 X.$$

Tout élément de F s'écrit, de manière unique (par unicité des coefficients) comme combinaison linéaire de la famille (X, X^2, X^3) qui est, par conséquent, une base de F. Ce dernier est donc de dimension 3.

Correction 16 1. On a $(1 + X, 1 - X)$ famille libre car les deux vecteurs sont non colinéaires. On en déduit que $\mathrm{Vect}(1 + X, 1 - X)$ est de dimension 2. On a $\mathrm{Vect}(1 + X, 1 - X) \subset \mathbb{R}_1[X]$ et il y a égalité des dimensions donc égalités des sous-ev.

2. On note $V = Vect((1 + X)^2, (1 + X)(1 - X), (1 - X)^2)$. La première inclusion est claire puisque les trois éléments qui engendrent V appartiennent à $\mathbb{R}_2[X]$ qui est un espace vectoriel. Pour l'inclusion réciproque, on peut remarquer que

$$(1 + X)^2 - (1 - X)^2 = 4X$$

donc $4X \in V$, ce qui implique $X \in V$. On écrit ensuite :

$$(1 + X)^2 + (1 - X)(1 + X) - 2X = 2$$

ce qui montre $2 \in V$ et donc $1 \in V$.
Enfin, on a $(1 + X)^2 - 2X - 1 = X^2$ donc $X^2 \in V$. On a montré que la famille $(1, X, X^2)$ est une famille de V. Comme elle engendre $\mathbb{R}_2[X]$, cela implique $\mathbb{R}_2[X] \subset V$ d'où l'égalité.

On peut aussi montrer que la famille $((1 + X)^2, (1 + X)(1 - X), (1 - X)^2)$ est libre. On suppose qu'il existe (λ, μ, γ) tels que

$$\lambda(1 + X)^2 + \mu(1 - X)(1 + X) + \gamma(1 - X)^2 = 0.$$

En prenant l'évaluation en 1, on obtient $\lambda = 0$.
En prenant l'évaluation en -1, on obtient $\gamma = 0$ puis $\mu = 0$.

La famille est libre, c'est donc une base de V qui est donc de dimension 3. Comme c'est un ssev de $\mathbb{R}_2[X]$, de même dimension, on en déduit que $V = \mathbb{R}_2[X]$.

3. Notons $A = \text{Vect}((1,5,3),(2,8,-1))$ et $B = \text{Vect}((0,2,7),(1,3,-4))$. On a :

$$(0,2,7) = 2(1,5,3) - (2,8,-1),$$

donc $(0,2,7) \in A$ et :

$$(1,3,-4) = (2,8,-1) - (1,5,3),$$

donc $(1,3,4) \in A$. Comme A est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, on a $B \subset A$.

On remarque ensuite que les deux espaces sont de dimension 2 car engendrés par deux familles libres de cardinal 2 (deux vecteurs non colinéaires). On en déduit que $A = B$.

Correction 17 1. On raisonne par analyse/synthèse.

Analyse:

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$, on suppose qu'il existe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in G$ telles que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Soit $n \in \mathbb{N}$, alors

$$\begin{aligned} x_n + x_{n+1} &= a_n + b_n + a_{n+1} + b_{n+1} = b_n + b_{n+1} \\ x_{n+1} + x_{n+2} &= a_{n+1} + b_{n+1} + a_{n+2} + b_{n+2} = b_{n+1} + b_{n+2} \end{aligned}$$

car $a_n + a_{n+1} = 0 = a_{n+1} + a_{n+2}$, puisque $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$.

On en déduit que $x_{n+2} + 2x_{n+1} + x_n = b_{n+2} + 2b_{n+1} + b_n$. Or, par hypothèse, $b_{n+2} + b_n = 2b_{n+1}$. Ainsi, $4b_{n+1} = x_{n+2} + 2x_{n+1} + x_n$. On peut faire mieux en écrivant $x_n = -x_{n+3} + x_{n+2} + x_{n+1}$ donc

$$4b_{n+1} = -x_{n+3} + 2x_{n+2} + 3x_{n+1},$$

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$b_n = \frac{1}{4}\left(-x_{n+2} + 2x_{n+1} + 3x_n\right).$$

Synthèse: Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$. On pose

$$\begin{cases} (b_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\dfrac{1}{4}\left(-x_{n+2} + 2x_{n+1} + 3x_n\right)\right)_{n\in\mathbb{N}} \\ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} - (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \end{cases}$$

On veut montrer que

- $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$
- $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$
- $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in G$.

Le premier point est clair.

Soit $n \geqslant 0$, on a $a_n = b_n - x_n = \dfrac{1}{4}x_n - \dfrac{1}{2}x_{n+1} + \dfrac{1}{4}x_{n+2}$.

On a donc

$$a_n + a_{n+1} = \frac{1}{4}\left(x_n - x_{n+1} - x_{n+2} + x_{n+3}\right) = 0,$$

car $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$.

On a donc bien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$

Soit maintenant $n \in \mathbb{N}$, alors

$$\begin{aligned} &4\left(b_{n+2} - 2b_{n+1}\right) \\ &= -x_{n+2} + 4x_{n+3} - 6x_{n+1} - x_{n+4} \\ &= -x_{n+2} + 4x_{n+3} - 6x_{n+1} + x_{n+1} - x_{n+2} - x_{n+3} \\ &= -2x_{n+2} + 3x_{n+3} - 5x_{n+1} \\ &= -2x_{n+2} + 3\left(-x_n + x_{n+1} + x_{n+2}\right) - 5x_{n+1} \\ &= x_{n+2} - 2x_{n+1} - 3x_n \\ &= -4b_n \end{aligned}$$

on a donc bien $b_{n+2} - 2b_{n+1} + b_n = 0$ donc $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in G$.

On a montré que tout élément de E s'écrit comme la somme d'un élément de F et d'un élément de G. De plus, cette écriture est unique d'après la phase d'analyse. On a donc $E = F \oplus G$.

2. On a $F = \{\alpha\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}, \alpha \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}\left(\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}\right)$ donc $\dim(F) = 1$. On sait que les éléments de G sont de la forme $(\alpha + \beta n)_{n\in\mathbb{N}}$ car l'équation caractéristique admet une unique racine double égale à 1. Ainsi, $G = \text{Vect}\left((1)_{n\in\mathbb{N}}, (n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$ donc $\dim(G) = 2$. On en déduit que $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G) = 3$.

Correction 18 L'application est linéaire par linéarité du produit matriciel et de la transposition car $f(X) = {}^tA^tX$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Déterminons son noyau, soit $U = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$. On raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned} U \in \text{Ker}(f) &\Leftrightarrow f(u_1,u_2) = (0,0,0) \Leftrightarrow u_1 + u_2 = 0, u_1 - u_2 = 0 \text{ et } 2u_1 = 0 \\ &\Leftrightarrow u_1 = u_2 = 0. \end{aligned}$$

Le noyau est réduit à zéro, l'application est donc injective.

Par le thm du rang, on sait que l'image est de dimension 2 donc l'application n'est pas surjective. Pour déterminer son image, il suffit de donner deux vecteurs non colinéaires (car on est en dimension 2, une famille libre est donc facile à voir) de l'image: $\text{Im}(f) = \text{Vect}\left((1,1,2),(1,-1,0)\right)$; C'est beaucoup plus rapide que de chercher à quelle(s) condition(s) un élément admet un antécédent mais on n'a pas l'équation de l'image. Si on veut l'équation de l'image, on peut revenir à la méthode piétonne: Soit $Y \in \mathbb{R}^3$ et cherchons à quelle(s) condition(s) il existe $X \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(X) = Y$. On écrit $Y = (y_1, y_2, y_3)$ et on cherche à savoir s'il existe $X = (x_1, x_2)$. On doit donc déterminer si le système suivant admet une solution.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = y_1 \\ x_1 - x_2 = y_2 \\ 2x_1 = y_3 \end{cases}$$

Ce système est équivalent à :

$$\begin{cases} x_1 &= \dfrac{y_1+y_2}{2} \\ x_2 &= \dfrac{y_1-y_2}{2} \\ 2x_1 &= y_3 \end{cases} \text{ c'est-à-dire } \begin{cases} x_1 &= \dfrac{y_1+y_2}{2} \\ x_2 &= \dfrac{y_1-y_2}{2} \\ 0 &= y_3 - y_2 - y_3 \end{cases}$$

Le système admet donc une solution si et seulement si $y_1 + y_2 = y_3$. L'image de f est donc l'ensemble des $Y = (y_1, y_2, y_3)$ vérifiant $y_1 + y_2 = y_3$.

On peut aussi le voir ainsi. Soit $Y \in \mathbb{R}^3$, alors $Y \in \mathrm{Im}(f)$ si et seulement si Y est CL de $(1, 1, 2)$ et $(1, -1, 0)$ donc $Y \in \mathrm{Im}(f) \Leftrightarrow \exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, Y = \lambda(1, 1, 2) + \mu(1, -1, 2)$. On voit que c'est équivalent à chercher si le système admet des solutions donc à chercher la ou les conditions de compatibilité c'est-à-dire précisément ce que l'on a fait au-dessus.

Remarque. *Le système précédent, quand la condition de compatibilité est vérifiée, admet une unique solution. L'application f est donc injective et le calcul du noyau fait précédemment est inutile.*

Correction 19 par double implication, thm du rang implique pair. Si pair, soit $(e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_{2p})$ une base. On définit u par

$$u(e_i) = \begin{cases} 0_E & \text{si } i \in [\![1, p]\!] \\ e_{i-p} & \text{si } i \in [\![p+1, 2p]\!] \end{cases}$$

On a alors $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)$.

Correction 20 Soit f une telle application, alors $f(0, 1, 0) = f(1, 1, 0) - f(1, 0, 0) = (0, 0)$ par linéarité et $f(0, 0, 1) = f(1, 1, 1) - f(1, 1, 0) = (0, 1)$. On a donc, toujours par linéarité, $f(x, y, z) = (x, z)$. Réciproquement, cette application linéaire vérifie bien ce que l'on souhaite. On remarque que son image contient $(1, 0)$ et $(0, 1)$ donc $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^2$. Par le thm du rang, son noyau est de dimension 1 et $f(0, 1, 0) = (0, 0)$ donc $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(0, 1, 0)$.

Correction 21 Soit $y \in \mathrm{Im}(f - 2id_E)$, alors il existe $x \in E$, tel que $f(x) - 2x = y$. On a donc :

$$\begin{aligned} f(y) + 2y &= f(f(x) - x) + 2\,(f(x) - 2x) \\ &= f^2(x) - 2f(x) + 2f(x) - 4x \\ &= f^2(x) - 4x \\ &= 0_E \text{car } f^2 = 4id_E \end{aligned}$$

On a donc bien $y \in \mathrm{Ker}(f + 2id_E)$ d'où l'inclusion.

D'après le théorème du rang appliqué à $(f - 2id_E)$, on sait que :

$$\dim(\mathrm{Ker}(f - 2id_E)) + \mathrm{rg}\,(f - 2id_E) = \dim(E)$$

donc il suffit de montrer que la somme est directe.

Soit $x \in \mathrm{Ker}(f - 2id_E) \cap \mathrm{Im}(f - 2id_E)$, alors $x \in \mathrm{Ker}(f - 2id_E) \cap \mathrm{Ker}(f + 2id_E)$ d'après l'inclusion montrée ci-dessus. On a donc $f(x) + 2x = 0_E = f(x) - 2x$, ce qui n'est possible que si $x = 0_E$.

La somme est directe, on a bien l'égalité souhaitée.

Correction 22

1. On remarque que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $(n+1)P - XP' \in \mathbb{R}_n[X]$. De plus, si $\deg(P) = n + 1$, alors le terme dominant de XP' vaut $(n + 1)a_{n+1}X^{n+1}$ avec a_{n+1} le coefficient dominant de P, c'est-à-dire le même terme dominant que $(n + 1)P$. Ainsi, le polynôme $(n + 1)P - XP' \in \mathbb{R}_n[X]$, l'application est donc bien définie. Elle est linéaire par linéarité de la dérivation.

2. Soit $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} a_k X^k \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$. On a

$$\begin{aligned} P \in \mathrm{Ker}(\varphi) &\Leftrightarrow \varphi(P) = 0 \\ &\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n+1}(n+1)a_kX^k = \sum_{k=0}^{n+1} ka_kX^k \\ &\Leftrightarrow \forall k \in [\![0, n+1]\!](n + 1 - k)a_k = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall k \in [\![0, n]\!]a_k = 0 \\ &\Leftrightarrow P = a_{n+1}X^{n+1} \\ &\Leftrightarrow P \in \mathrm{Vect}(X^{n+1}) \end{aligned}$$

On a montré, par équivalence, que $\ker(\varphi) = \mathrm{Vect}(X^{n+1})$. Une base de $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est $\left(X^{n+1}\right)$.

3. D'après le thm du rang, le rang de φ est $n + 1$. On en déduit que l'image de φ est de même dimension que $\mathbb{R}_n[X]$, et comme $\mathrm{Im}(\varphi) \subset \mathbb{R}_n[X]$, on a égalité donc φ est surjective.

4. On cherche $P = \sum_{k=0}^{n+1} a_k X^k$ tel que $\varphi(P) = X$. On doit avoir $\sum_{k=0}^{n+1} (n+1-k)a_k X^k = X$. On a donc, a_{n+1} quelconque, $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $k \neq 1$, $a_k = 0$ et $a_1 = \frac{1}{n}$. On en déduit que les solutions sont les polynômes de la forme $\lambda X^{n+1} + \frac{X}{n}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Correction 23 1. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M_{31}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} X \in \mathrm{Ker}\phi_A \quad & \Leftrightarrow \phi_A(X) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y & = 0 \\ -x + y + 2z & = 0 \\ y - z & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 3y \\ y \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Une base de $\mathrm{Ker}\phi_A$ est, par exemple, composée du vecteur $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. Par le thm du rang, on en déduit que $\mathrm{rg}\phi_A = 2$.

3. Il suffit de prendre deux éléments non colinéaires de l'image. Par exemple, $\phi_A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\phi_A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Correction 24 1. Il suffit de montrer que $f \circ f = f$ ce qui est équivalent à montrer que :

$$\forall (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ f \circ f(x,y,z,t) = f(x,y,z,t)$$

ce qui est immédiat.

2. On a :

$$\mathrm{Ker}(f) = \{(x,y,z,t), x = y = z = 0\} = \mathrm{Vect}(0,0,0,1)$$

et :

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(f) \quad & = \mathrm{Ker}(f - id) = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, f(x,y,z,t) = (x,y,z,t)\} \\ & = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, z = t\} = \mathrm{Vect}\left((1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,1)\right). \end{aligned}$$

3. On note s cette symétrie, on sait que $s = 2f - id$, on a donc :

$$s(1,2,3,4) = 2f(1,2,3,4) - (1,2,3,4) = 2(1,2,3,3) - (1,2,3,4) = (1,2,3,2).$$

Correction 25 On calcule $\phi_A \circ \phi_A$. Soit donc $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in M_{21}(\mathbb{R})$, alors

$$\phi_A(x,y) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2x - 4y \\ -x + 2y \end{pmatrix}$$

puis

$$\phi_A \circ \phi_A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 2(2x-4y) - 4(-x+2y) \\ -(2x-4y) + 2(-x+2y) \end{pmatrix} = \frac{1}{16}(8x - 16y, -4x + 8y) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2x - 4y \\ -x + 2y \end{pmatrix} = \phi_A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

On en déduit que ϕ_A est bien un projecteur de $\mathbb{R}^2$. Pour déterminer ses éléments caractéristiques, on doit déterminer son noyau et son image.

On commence par le noyau. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in M_{21}(\mathbb{R})^2$, alors

$$X \in \mathrm{Ker}\phi_A \Leftrightarrow \phi_A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = 2y \Leftrightarrow X = y\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On a montré que $\mathrm{Ker}\phi_A = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Pour l'image, on sait, par le thm du rang qu'elle est de dimension 1, il suffit donc d'en donner un vecteur non nul. On prend $\phi_A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, on en déduit que $\mathrm{Im}(\phi_A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

On a montré que ϕ_A est le projecteur sur $\mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ parallèlement à $\mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Correction 26 On doit calculer $\phi_A \circ \phi_A$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M_{31}(\mathbb{R})$, alors

$$\phi_A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -8x + 4y + z \\ 4x + 7y + 4z \\ x + 4y - 8z \end{pmatrix},$$

et

$$\phi_A \circ \phi_A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{81}\begin{pmatrix} 81x \\ 81y \\ 81z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

On a bien $\phi_A \circ \phi_A = id_{M_{31}(\mathbb{R})}$ donc ϕ_A est une symétrie.

On doit déterminer $\mathrm{Ker}(\phi_A - id_{M_{31}(\mathbb{R})}$ et $\mathrm{Ker}(\phi_A + id_{M_{31}(\mathbb{R})}$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M_{31}(\mathbb{R})$, alors

$$X \in \mathrm{Ker}(\phi_A - id_{M_{31}(\mathbb{R})}) \Leftrightarrow \phi_A(X) = X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -8x+4y+z \\ 4x+7y+4z \\ x+4y-8z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9x \\ 9y \\ 9z \end{pmatrix}$$

On résout le système, on trouve $X \in \mathrm{Ker}(\phi_A - id_{M_{31}(\mathbb{R})}) \Leftrightarrow X = z\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, on a donc $\mathrm{Ker}(\phi_A - id_{M_{31}(\mathbb{R})}) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

De même, $X \in \mathrm{Ker}(\phi_A + id_{M_{31}(\mathbb{R})}) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -8x+4y+z \\ 4x+7y+4z \\ x+4y-8z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9x \\ 9y \\ 9z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$ $x+4y+z=0$, on a donc

$$\mathrm{Ker}(\phi_A + id_{M_{31}(\mathbb{R})}) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M_{31}(\mathbb{R}), x+4y+z=0 \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

Correction 27 On suppose que f est non nulle et on montre que g l'est nécessairement. Si f est non nulle, il existe $x_0 \in E$ tel que $f(x_0) \neq 0$. On a donc $g(x_0) = 0$. Soit maintenant $y \in E$ quelconque. Alors $f(x_0+y)g(x_0+y) = 0$. Or, par linéarité,

$$f(x_0+y)g(x_0+y) = f(x_0)g(x_0) + f(y)g(x_0) + f(x_0)g(y) + f(y)g(y).$$

On sait, par hypothèse, que $f(y)g(y) = 0$ et $g(x_0) = 0$ donc $f(x_0)g(y) = 0$. Comme on a supposé $f(x_0) \neq 0$, on a $g(y) = 0$. Ceci étant vrai pour tout y, g est nulle.

Correction 28 On remarque tout d'abord que F et G sont des sous-espaces vectoriels de H sont $F + G \subset H$. Déterminons la dimension de ces espaces vectoriels. Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$. On raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned} P \in F \quad & \Leftrightarrow P(-1) = P(1) = P(0) = 0 \\ & \Leftrightarrow P \text{ est divisible par } (X-1)X(X+1) \\ & \Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R},\ P = aX(X^2-1) \text{car } P \text{ est de degré au plus 3.} \end{aligned}$$

On a donc $G = \mathrm{Vect}\left(X(X^2-1)\right)$. De même, on montre que $H = \mathrm{Vect}\left(X(X-1)(X-2)\right)$. Pour H, on écrit :

$$\begin{aligned} P \in H \quad & \Leftrightarrow P(1) = P(0) = 0 \\ & \Leftrightarrow P \text{ est divisible par } X(X-1) \\ & \Leftrightarrow \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ P = X(X^2-1)(aX+b) \\ & \Leftrightarrow \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ P = aX^2(X-1) + bX(X-1) \end{aligned}$$

Ainsi, on a montré que tout élément de $H = \mathrm{Vect}\left(X^2(X-1), X(X-1)\right)$.

On a donc $\dim(F) = \dim(G) = 1$ et $\dim(H) = 2$. On remarque que F et G sont en somme directe car le seul polynôme de $\mathbb{R}_3[X]$ admettant $0, -1, 1$ et 2 pour racines est le polynôme nul. Ainsi, $\dim(F \oplus G) = 2$ or $F \oplus G \subset H$ d'où l'égalité.

Correction 29 Soit $M \in M_n(\mathbb{K})$, $M = (m_{ij})$. On pose $D = diag(m_{11}, ..., m_{nn})$, $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ avec

$$a_{ij} = \begin{cases} m_{ij} & \text{si } i < j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \text{ et } b_{ij} = \begin{cases} m_{ij} & \text{si } i > j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a $A \in T_n^+$ et $B \in T_n^-$ et $M = D + A + B$.

On a montré que tout élément de $M_n(\mathbb{K})$ s'écrit comme la somme d'un élément de $D_n(\mathbb{K})$, un élément de T_n^+ et un élément de T_n^-.

Montrons l'unicité de l'écriture. Soit $M = (m_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$. On suppose que $M = D + A + B$ avec $(D, A, B) \in D_n(\mathbb{K}) \times T_n^+(\mathbb{K}) \times T_n^-(\mathbb{K})$. On note $D = diag(d_1, \dots, d_n), A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$. Alors, par identification des coefficients, on a

$$m_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{si } i < j \\ d_i & \text{si } i = j \\ b_{ij} & \text{si } i > j \end{cases}.$$

Ainsi, les matrices A, B et D sont uniques. On a donc bien

$$M_n(\mathbb{K}) = D_n(\mathbb{K}) \oplus T_n^+(\mathbb{K}) \oplus T_n^-(\mathbb{K}).$$

Correction 30 Tout élément de F s'écrit $(x, y, -x-y, 3y)$ donc $((1,0,-1,0),(0,1,-1,3))$ est une base de F.
La famille :

$$((1,0,-1,0),(0,1,-1,3),(0,0,1,0),(0,0,0,1))$$

est une famille échelonnée de $\mathbb{R}^4$ donc libre. Comme elle est de cardinal 4, c'est une base de $\mathbb{R}^4$, on peut donc affirmer que $\mathrm{Vect}\left((0,0,1,0),(0,0,0,1)\right)$ est un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^4$.

Correction 31 On va compléter la famille :

$$\left((X-1)^2, (X+1)^2\right)$$

en une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Montrons que la famille :

$$\left((X-1)^2, (X+1)^2, (X-1)(X+1)\right)$$

est une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Comme elle est de cardinal 3, il suffit de montrer qu'elle est libre. Soit donc $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ des réels tels que :

$$\lambda_1(X-1)^2 + \lambda_2(X+1)^2 + \lambda_3(X-1)(X+1) = 0.$$

Ce polynôme est nul, son évaluation en 1 est donc nulle ce qui donne :

$$\lambda_2 = 0.$$

De même, son évaluation en -1 est nulle donc $\lambda_1 = 0$. On a donc, en revenant à l'équation initiale :

$$\lambda_3(X-1)(X+1) = 0,$$

donc $\lambda_3 = 0$, ce qui montre que la famille est libre. On en déduit que c'est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ donc $\text{Vect}\left(X^2-1\right)$ est un supplémentaire de $\text{Vect}\left((X-1)^2, (X+1)^2\right)$.

Correction 32 Comme la famille est de cardinal 3, qui est la dimension de $\mathbb{R}^3$, il suffit de montrer qu'elle est libre. On suppose donc qu'il existe α, β, γ trois réels tels que :

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = 0_{\mathbb{R}^3}.$$

On a donc :

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \end{cases}$$

ce qui impose $\alpha = \beta = \alpha = 0$ et la famille est libre, donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

Correction 33 Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. On raisonne par équivalence :

$$(x, y, z, t) \in F \Leftrightarrow t = 0,\ x = y \text{ et } 3y = z \Leftrightarrow (x, y, z, t) = (x, x, 3x, 0) = x(1, 1, 3, 0).$$

Le vecteur $(1, 1, 3, 0)$ est donc une famille génératrice de F et comme il est non-nul, c'est une famille libre, donc une base de F.

Pour obtenir un supplémentaire de F, il suffit de compléter ce vecteur en une base de $\mathbb{R}^4$. On peut la choisir échelonnée en prenant les trois vecteurs suivants: $(1, 1, 1, 1), (1, 1, 0, 0)$ et $(1, 0, 0, 0)$. La famille $((1, 1, 3, 0), (1, 1, 1, 1), (1, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 0))$ est une base de $\mathbb{R}^4$ car elle est échelonnée (donc libre) et de cardinal 4. Un supplémentaire de F est $\text{vect}\left((1, 1, 1, 1), (1, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 0)\right)$.

Correction 34
1. Il suffit de montrer que les vecteurs forment une famille libre puisqu'elle est de cardinal 3 et $\dim \mathbb{R}^3 = 3$. On suppose donc qu'il existe $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ des réels tels que :

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = (0, 0, 0).$$

On a :

$$\begin{cases} \alpha_1 - 2\alpha_2 + 3\alpha_3 &= 0 \\ -2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3 &= 0 \\ 3\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 - 2\alpha_2 + 3\alpha_3 &= 0 \\ -\alpha_2 + 8\alpha_3 &= 0\ (L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1) \\ 5\alpha_2 - 8\alpha_3 &= 0\ (L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

La famille est bien une famille libre et forme donc une base de $\mathbb{R}^3$.

2. Sans calcul, on trouve que les coordonnées de $(0, 0, 0)$ sont $(0, 0, 0)$ et ceux de $(1, -2, 3) = v_1$ sont $(1, 0, 0)$.

Correction 35
1. Soit $(x, y, z, t) \in F$, alors $x + z = 0$ et $3y = 2z$ donc :

$$(x, y, z, t) = x(1, 0, -1, 0) + y(0, 1, 0, \frac{3}{2}).$$

Une famille génératrice de F est donc :

$$\left((1, 0, -1, 0), \left(0, 1, 0, \frac{3}{2}\right)\right),$$

les deux vecteurs étant non colinéaires, c'est une famille libre, ce qui implique que c'est une base de F. Celui-ci est donc de dimension 2.

2. Pour déterminer un supplémentaire de F, il suffit de compléter la base de F en une base de $\mathbb{R}^4$. En rajoutant les vecteurs $(1, 1, 0, 0)$ et $(1, 0, 0, 0)$, on obtient une famille échelonnée donc libre. Comme elle est de cardinal 4, c'est une base de $\mathbb{R}^4$ ce qui nous permet d'affirmer qu'un supplémentaire de F est $\text{vect}\left((1, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 0)\right)$, dont une base est $\left((1, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 0)\right)$.

Correction 36 Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$. On raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned} P \in G &\Leftrightarrow P(1) = 0 = P(2) \\ &\Leftrightarrow P \text{ est divisible par } (X-1)(X-2) \\ &\Leftrightarrow \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ P(X) = (X-1)(X-2)(aX+b) \\ &\Leftrightarrow \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ P = aX(X-1)(X+2) + b(X-1)(X-2) \end{aligned}.$$

On a montré que tout élément de P s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire de $(X(X-1)(X+2), (X-1)(X+2))$, l'unicité de l'écriture découlant de celle de la division euclidienne. Cette famille est, par conséquent, une base de G. Le sous-espace vectoriel G est donc de dimension 2.

Correction 37 L'application est linéaire, car elle peut s'écrire $f(X) = {}^tA^tX$ avec $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ et le produit matriciel et la transposition sont linéaires. Soit $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned} X \in \mathrm{Ker}(\varphi_{13}) &= \varphi_{13}(X) = (0,0) \\ &\Leftrightarrow (2x - 3y + z, x - y + z/3) = (0,0) \end{aligned}$$

On doit résoudre le système

$$\begin{cases} 2x - 3y + z &= 0 \\ 3x - 3y + z &= 0 \end{cases}$$

En faisant $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ on obtient $x = 0$ puis $z = 3y$. On a donc

$$X \in \mathrm{Ker}(\varphi_{13}) \Leftrightarrow X = (0, y, 3y) \Leftrightarrow X \in \mathrm{Vect}(0, 1, 3),$$

donc $\ker \varphi_{13} = \mathrm{vect}(0, 1, 3)$.

On utilise maintenant le thm du rang: on sait que l'image est de dimension 2. Or c'est un ssev de $\mathbb{R}^2$ donc $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathbb{R}^2$.

Sans utiliser le thm du rang, c'est plus long : Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ (espace d'arrivée). On cherche à savoir à quelle(s) condition(s) sur (a, b), il existe $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\varphi_{13}(x, y, z) = (a, b)$. Autrement dit, on cherche pour quel(s) couple(s) (a, b), le système :

$$\begin{cases} 2x - 3y + z &= a \\ x - y + z/3 &= b \end{cases}$$

admet des solutions. On fait $L_2 \leftarrow 3L_2 - L_1$, on obtient :

$$\begin{cases} 2x - 3y + z &= a \\ x &= 3b - a \end{cases}$$

Le système est alors triangulaire donc il admet toujours des solutions. Ainsi $\mathrm{Im}\,\varphi = \mathbb{R}^2$.

Correction 38 Soit $U, V \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $U = (a, b, c)$, $V = (d, e, f)$, alors :

$$\begin{aligned} f(\lambda U + V) &= f(\lambda a + d, \lambda b + e, \lambda c + f) \\ &= (\lambda a + d + \lambda b + e, 2(\lambda c + f), \lambda b + e + \lambda c + f) \\ &= (\lambda(a + b) + d + e, 2\lambda c + 2f, \lambda(b + c) + e + f) \\ &= \lambda f(U) + f(V) \end{aligned}$$

Ainsi, f est linéaire. Comme on nous demande de déterminer sa bijection réciproque, on va chercher à résoudre le système $f(U) = V$. Soit donc $V = (d, e, f)$ et on cherche $U = (a, b, c)$ vérifiant $f(U) = V$. Il nous faut résoudre le système suivant, d'inconnue (a, b, c) :

$$\begin{cases} a + b &= d \\ 2c &= e \\ b + c &= f \end{cases}$$

On trouve $(a, b, c) = \left(d - f + \frac{e}{2}, f - \frac{e}{2}, \frac{e}{2}\right)$. La bijection réciproque de f est donnée par $(x, y, z) \mapsto \left(x - z + \frac{y}{2}, z - \frac{y}{2}, \frac{y}{2}\right)$.

Correction 39 Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$, on raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned} P \in F &\Leftrightarrow P(a_1) = \cdots = P(a_k) = 0 \\ &\Leftrightarrow \prod_{i=1}^{k} (X - a_i) | P \\ &\Leftrightarrow \exists Q \in \mathbb{K}_{n-k}[X], P(X) = Q(X) \prod_{i=1}^{k} (X - a_i) \\ &\Leftrightarrow \exists (c_0, \ldots, c_{n-k}) \in \mathbb{K}^{n-k+1}, P(X) = \sum_{j=0}^{n-k} c_j X^j \prod_{i=1}^{k} (X - a_i) \end{aligned}$$

On a montré qu'un polynôme P est un élément de F si et seulement s'il s'écrit comme combinaison linéaire de la famille $\left(X^j \prod_{i=1}^{k} (X - a_i)\right)_{j=0}^{n-k} = \left(\prod_{i=1}^{k} (X - a_i), X \prod_{i=1}^{k} (X - a_i), \ldots, X^{n-k} \prod_{i=1}^{k} (X - a_i)\right)$. De plus, les coefficients de cette combinaison linéaire sont uniques donc c'est une base de F qui est donc de dimension $n - k$.

(On peut aussi dire que les degrés sont distincts donc la famille est libre). Les éléments de la base de F trouvée sont de degrés k à n. On peut donc compléter cette famille en une base de $\mathbb{K}_n[X]$ en rajoutant les vecteurs $(1, \ldots, X^{k-1})$. Ainsi, le ssev $Vect(1, \ldots, X^{k-1})$, c'est-à-dire $\mathbb{K}_{k-1}[X]$ est un supplémentaire de F dans $\mathbb{K}_n[X]$.

Correction 40 On se donne F et G deux ssev de E de même dimension. On commence par poser $s = \dim(F \cap G)$, $n = \dim(E)$ et $p = \dim(F) = \dim(G)$. Si $s \neq 0$, on prend une base $(e_1, \ldots, e_s)$ de $F \cap G$. On va compléter cette famille libre de E de deux façons différentes :

- Tout d'abord de telle sorte que $(e_1, \ldots, e_s, u_1, \ldots, u_{p-s})$ soit une base de F.
- Puis telle que $(e_1, \ldots, e_s, v_1, \ldots, v_{p-s})$ soit une base de G.

Dans le cas où $s=0$, on prend juste une base de F et une base de G. On sait, d'après le cours, qu'une base de $F+G$ est la famille $(e_1,\dots,e_s,u_1,\dots,u_{p-s},v_1,\dots,v_{p-s})$ (cf démonstration de la formule $\dim(F+G)=\dim(F)+\dim(G)-\dim(F\cap G)$).

Avec nos notations, on a $\dim(F+G)=2p-s$. Si $2p-s=n$, cela signifie que $F+G=E$ (on a $F+G\subset E$ et mêmes dimensions). Si ce n'est pas le cas, on peut compléter cette famille libre de E en une base de E en rajoutant des vecteurs $(w_1,\dots,w_{n-2p+s})$.

A ce stade là, on sait que la famille :

$$(e_1,\dots,e_s,u_1,\dots,u_{p-s},v_1,\dots,v_{p-s},w_1,\dots,w_{n-2p+s})$$

est une base de E.

On pose $H=\mathrm{Vect}(u_1+v_1,\dots,u_{p-s}+v_{p-s},w_1,\dots,w_{n-2p+s})$. Montrons que H est un supplémentaire commun à F et G dans E.

On commence par montrer que la famille

$$(u_1+v_1,\dots,u_{p-s}+v_{p-s},w_1,\dots,w_{n-2p+s})$$

est bien une base de H. Il suffit, pour cela, de montrer qu'elle est libre. On peut, pour éviter tout calcul, remarquer que, par opérations sur la famille

$$(e_1,\dots,e_s,u_1,\dots,u_{p-s},v_1,\dots,v_{p-s},w_1,\dots,w_{n-2p+s}),$$

la famille

$$(e_1,\dots,e_s,u_1,\dots,u_{p-s},u_1+v_1,\dots,u_{p-s}+v_{p-s},w_1,\dots,w_{n-2p+s})$$

est aussi libre. La famille

$$(u_1+v_1,\dots,u_{p-s}+v_{p-s},w_1,\dots,w_{n-2p+s})$$

est alors une sous-famille d'une famille libre, elle est donc libre.

Par ailleurs, on vient de dire que la concaténation d'une base de F et d'une base de H formait une base de E (la concaténation est la famille :

$$(e_1,\dots,e_s,u_1,\dots,u_{p-s},u_1+v_1,\dots,u_{p-s}+v_{p-s},w_1,\dots,w_{n-2p+s})$$

ci-dessus).
Ainsi, H est bien un supplémentaire de F dans E.

Avec le même raisonnement, on part de la base

$$(e_1,\dots,e_s,u_1,\dots,u_{p-s},v_1,\dots,v_{p-s},w_1,\dots,w_{n-2p+s})$$

de E. Par opérations élémentaires, la famille

$$(e_1,\dots,e_s,u_1+v_1,\dots,v_{p-s}+u_{p-s},v_1,\dots,v_{p-s},w_1,\dots,w_{n-2p+s}),$$

est aussi une base de E. On peut permuter ses éléments et obtenir que

$$(e_1,\dots,e_s,v_1,\dots,v_{p-s},u_1+v_1,\dots,u_{p-s}+v_{p-s},w_1,\dots,w_{n-2p+s}),$$

est une base de E. C'est la concaténation d'une base de G et d'une base de H donc H est bien un supplémentaire de G dans E.

On vient de montrer que H est un supplémentaire commun de F et G dans E.

Correction 41 Montrons que $\mathrm{Im}(u)=u(F)$ par double inclusion. On a $u(F)\subset\mathrm{Im}(u)$, montrons l'inclusion réciproque. Soit donc $y\in\mathrm{Im}(u)$, alors il existe $x\in E$ tel que $u(x)=y$. Or x s'écrit $a+b$ avec $(a,b)\in\mathrm{Ker}(u)\times F$. On a donc $u(x)=u(b)$ puisque $u(a)=0_E$. Ainsi, y admet un antécédent dans F donc $y\in u(F)$ ce qui montre l'inclusion $\mathrm{Im}(u)\subset u(F)$ d'où l'égalité.

Ainsi, on a $\mathrm{Im}(u)=u(F)$ d'où $\mathrm{rg}(u)=\dim(u(F))$. Or, d'après le théorème du rang, $\mathrm{rg}(u)=\dim(E)-\dim(\mathrm{Ker}(u))$ et l'égalité $\mathrm{Ker}(u)\oplus F=E$ implique l'égalité $\dim(F)=\dim(E)-\dim(\mathrm{Ker}(u))$, on a donc :

$$\dim(F)=\dim(u(F)).$$

Correction 42

1. Montrons que $\mathrm{rg}(f\circ g)\leqslant\mathrm{rg}f$ et $\mathrm{rg}(f\circ g)\leqslant\mathrm{rg}g$ ce qui impliquera :

   $$\mathrm{rg}(f\circ g)\leqslant\min(\mathrm{rg}f,\mathrm{rg}g).$$

   On a $g(E)\subset E$ donc $f\circ g(E)\subset f(E)$. Cela implique $\mathrm{rg}(f\circ g)\leqslant\mathrm{rg}f$.

   Si on applique le théorème du rang à $f|_{g(E)}$, on obtient :

   $$\dim(g(E))=\dim\mathrm{Ker}\left(f|_{g(E)}\right)+\mathrm{rg}\left(f|_{g(E)}\right)$$

   d'où $\dim(g(E))\geqslant\mathrm{rg}\left(f|_{g(E)}\right)$. Or $\dim(g(E))=\mathrm{rg}(g)$ et

   $$\mathrm{rg}\left(f|_{g(E)}\right)=\dim f\circ g(E)=\mathrm{rg}(f\circ g)$$

   d'où l'inégalité $\mathrm{rg}(f\circ g)\leqslant\mathrm{rg}(g)$.

2. On a $\mathrm{Im}(f+g)\subset\mathrm{Im}f+\mathrm{Im}g$ donc :

   $$\mathrm{rg}(f+g)\leqslant\dim(\mathrm{Im}(f)+\mathrm{Im}(g))\leqslant\mathrm{rg}(f)+\mathrm{rg}(g),$$

   ce qui montre la première inégalité. Par ailleurs, en appliquant ce résultat à $f=(f+g)+(-g)$ et $g=(f+g)+(-f)$, on obtient :

   $$\mathrm{rg}(f)\leqslant\mathrm{rg}(f+g)+\mathrm{rg}(-g)\text{ et }\mathrm{rg}(g)\leqslant rg(f+g)+\mathrm{rg}(-f),$$

   d'où, comme $\mathrm{rg}(-g)=\mathrm{rg}(g)$ et $\mathrm{rg}(-f)=\mathrm{rg}(f)$:

   $$\mathrm{rg}(f)\leqslant\mathrm{rg}(f+g)+\mathrm{rg}(g)\text{ et }\mathrm{rg}(g)\leqslant\mathrm{rg}(f+g)+\mathrm{rg}(f),$$

   ce qui implique $\mathrm{rg}(f+g)\geqslant\mathrm{rg}f-\mathrm{rg}g$ et $\mathrm{rg}(f+g)\geqslant\mathrm{rg}g-\mathrm{rg}f$ d'où l'inégalité souhaitée.

3. On suppose $f+g$ un automorphisme et $f\circ g=0$. Si $f+g$ est un automorphisme, on a $\mathrm{rg}(f+g)=n$. D'après la question précédente, on a donc $\mathrm{rg}(f)+\mathrm{rg}(g)\geqslant n$.

   On sait également que $f\circ g=0$, ce qui implique $\mathrm{Im}(g)\subset \mathrm{Ker}(f)$ donc $\mathrm{rg}(g)\leqslant \dim(\ker(f))$. Par ailleurs, on a $\mathrm{rg}(g)+\mathrm{rg}(f)=\mathrm{rg}(g)+n-\dim(\mathrm{Ker}(f))\geqslant n$ donc $\mathrm{rg}(g)\geqslant \dim\mathrm{Ker}(f)$. On en déduit que $\mathrm{rg}(g)=\dim\ker(f)$ et comme on a une inclusion, on a égalité.

Correction 43 Montrons que $\mathrm{Ker}(\varphi)=\{(x,-x),x\in F\cap G\}$. L'inclusion :

$$\{(x,-x),x\in F\cap G\}\subset \mathrm{Ker}(\varphi)$$

est claire. Soit maintenant $(x,y)\in\mathrm{Ker}(\varphi)$. Alors $x+y=0_E$. On a donc :

$$\underbrace{x}_{\in F}=\underbrace{-y}_{\in G}.$$

On a donc $x\in F\cap G$ donc $(x,y)\in\{(x,-x),x\in F\cap G\}$, d'où l'égalité.
Il reste maintenant à se convaincre que $\dim\{(x,-x),x\in F\cap G\}=\dim(F\cap G)$. Pour cela, on considère une base $(e_1,\cdots,e_r)$ de $F\cap G$. Alors, pour tout élément $(a,-a)$ de $\{(x,-x),x\in F\cap G\}$, il existe un unique r-uplet $(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)\in\mathbb{R}^r$ tel que $a=\sum_{i=1}^{r}\alpha_i e_i$. On a alors :

$$(a,-a)=\left(\sum_{i=1}^{r}\alpha_i e_i,-\sum_{i=1}^{r}e_i\right)=\sum_{i=1}^{r}\alpha_i(e_i,-e_i).$$

On a montré que $(a,-a)$ s'écrit, de manière unique, comme une combinaison linéaire de la famille $((e_i,-e_i))_{1\leqslant i\leqslant r}$. Ainsi, cette famille est une base de $\mathrm{Ker}(\varphi)$ car elle est de cardinal r donc $\dim\mathrm{Ker}(\varphi)=\dim(F\cap G)$.

Montrons maintenant que $\mathrm{Im}(\varphi)=F+G$. Il est clair que $\mathrm{Im}(\varphi)\subset F+G$. Montrons l'autre inclusion. Soit donc $x\in F+G$, alors il existe un couple $(a,b)\in F\times G$ tel que $x=a+b=\varphi(a,b)$. Ainsi, $x\in\mathrm{Im}(\varphi)$. On a donc $F+G\subset\mathrm{Im}(\varphi)$ d'où l'égalité. Ainsi, $\mathrm{rg}(\varphi)=\dim(F+G)$.
Appliquons maintenant le théorème du rang à φ :

$$\dim(F\times G)=\dim(F\cap G)+\dim(F+G).$$

Comme $\dim(F\times G)=\dim(F)+\dim(G)$, on retrouve l'égalité de Grassman.

Correction 44 Soit $m=\mathrm{rg}(f)=\dim\mathrm{Ker}(f)$ et $(y_1,\cdots,y_m)$ une base de $\mathrm{Ker}(f)$. Pour tout $i\in[\![1,m]\!]$, on choisit x_i un antécédent de y_i par f. Montrons que la famille $(x_1,\cdots,x_m,y_1,\cdots,y_m)$ est une base de E. Elle est de cardinal $\dim(E)$ d'après le théorème du rang, il suffit donc de montrer qu'elle est libre.
Soit $(\lambda_1,\cdots,\lambda_m,\mu_1,\cdots,\mu_m)\in\mathbb{R}^{2m}$ tel que :

$$\sum_{i=1}^{m}\lambda_i x_i+\sum_{j=1}^{m}\mu_j y_j=0_E.$$

On applique f à l'égalité, par linéarité, on obtient :

$$\begin{aligned}0_E&=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i f(x_i)+\sum_{j=1}^{m}\mu_j f(y_j)\\&=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i y_j \text{car } y_j\in\mathrm{Ker}(f) \text{ et } f(x_i)=y_i\end{aligned}$$

On obtient une combinaison linéaire nulle de la famille $(y_1,\cdots,y_m)$ qui est libre puisque c'est une base de $\mathrm{Ker}(f)$. On en déduit que $\forall i\in[\![1,m]\!],\lambda_i=0$.

En revenant à l'égalité de départ, on a $\sum_{j=1}^{m}\mu_j y_j=0_E$ et on utilise, à nouveau, la liberté de la famille $(y_1,\cdots,y_m)$ pour affirmer que $\mu_j=0,\forall j\in[\![1,m]\!]$. Ainsi la famille $(x_1,\cdots,x_m,y_1,\cdots,y_m)$ est une base de E.
Montrons l'existence de g par analyse-synthèse.
Analyse :Supposons qu'il existe une telle application $g\in(E)$. Alors, on a :

$$\forall i\in[\![1,n]\!],\ f\circ g(x_i)+g\circ f(x_i)=x_i,$$

ce qui est équivalent à $f\circ g(x_i)+g(y_i)=x_i$ car $f(x_i)=y_i$.

On a également :

$$\forall i\in[\![1,n]\!],\ f\circ g(y_i)+g\circ f(y_i)=y_i,$$

ce qui est équivalent à $f\circ g(y_i)=y_i$ car $f(y_i)=0_E$. En posant $g(y_i)=x_i$ et $g(x_i)=0_E$, on a bien les deux égalités souhaitées.
Synthèse :Soit $g\in(E)$ l'application définie par $g(y_i)=x_i$ et $g(x_i)=0_E$. Cette application est bien définie car on l'a définit sur une base de E. Montrons que $f\circ g+g\circ f=id_E$.
Il suffit de montrer que cette égalité est vraie sur une base de E.

Soit $i\in[\![1,m]\!]$, on a :

$$f\circ g(x_i)+g\circ f(x_i)=f(0_E)+g(y_i)=x_i,$$

et

$$f\circ g(y_i)+g\circ f(y_i)=f(x_i)+g(0_E)=y_i.$$

L'égalité est vraie sur une base de E. Par linéarité, elle est vraie pour tout $x \in E$ donc $f \circ g + g \circ f = id_E$. Par analyse-synthèse, on a montré qu'il existe $g \in (E)$ telle que $f \circ g + g \circ f = id_E$

Correction 45 On suppose que $\mathbb{R}^n = \mathrm{Im}(f) \bigoplus \mathrm{Ker}(f)$, montrons que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$.

On sait déjà que $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)$ car c'est vrai pour tout endomorphisme. En effet, si $y \in \mathrm{Im}(f^2)$, alors il existe $x \in \mathbb{R}^n$, $y = f^2(x)$. Or $f^2(x) = f(f(x)) \in \mathrm{Im}(f)$ donc $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Im}(f^2)$.

Montrons maintenant l'autre inclusion. Soit donc $y \in \mathrm{Im}(f)$. Alors il existe $x \in \mathbb{R}^n$, $f(x) = y$. On utilise maintenant l'égalité $\mathbb{R}^n = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f)$. On peut donc écrire $x = a + b$ avec $a \in \mathrm{Im}(f)$ et $b \in \mathrm{Ker}(f)$. On traduit $a \in \mathrm{Im}(f)$ par l'existence de $a' \in \mathbb{R}^n$ tel que $a = f(a')$. Remplaçons maintenant $x = f(a') + b$ dans $y = f(x)$. On obtient :

$$y = f(x) = f(f(a') + b) = f \circ f(a') + f(b) = f \circ f(a'),$$

car $b \in \ker(f)$. On a donc $y = f^2(a')$ ce qui montre que $y \in \mathrm{Im}(f^2)$. Ainsi, on a montré l'inclusion $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Im}(f^2)$ d'où l'égalité, par double inclusion.

On suppose maintenant que l'on a $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$, montrons que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$.

On applique le théorème du rang à f et à f^2 :

$$n = \dim(\ker(f)) + rg(f),$$

et

$$n = \dim(\ker(f^2)) + \mathrm{rg}(f^2).$$

Comme $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$, on a $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f^2)$ donc nécessairement $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim(\mathrm{Ker}(f^2))$.

Par ailleurs, on a $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2)$ car ceci est vrai pour tout endomorphisme. En effet, si $x \in \mathrm{Ker}(f)$, on a $f(x) = 0_{\mathbb{R}^n}$ donc $f(f(x)) = f(0_{\mathbb{R}^n}) = 0_{\mathbb{R}^n}$.

On a donc $\ker(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2)$ et $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim(\mathrm{Ker}(f^2))$ donc les deux espaces sont égaux.

Supposons maintenant $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$ et montrons que $\mathbb{R}^n = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f)$. On va, tout d'abord, montrer que la somme est directe. Soit donc $x \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$. On a donc $x = f(a)$ avec $a \in \mathbb{R}^n$ et $f(x) = 0_{\mathbb{R}^n}$. Ainsi, $f^2(a) = 0_{\mathbb{R}^n}$. On a donc $a \in \mathrm{Ker}(f^2)$. Or, on a supposé $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$ donc $a \in \mathrm{Ker}(f)$. Cela implique $f(a) = 0_{\mathbb{R}^n}$ et comme $x = f(a)$, on vient de montrer que x est nul. Ainsi, on $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ et la somme est directe.

Considérons maintenant le ssev $\mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f)$. Comme la somme est directe, sa dimension vaut $\dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\mathrm{Ker}(f))$, ce qui est égal, d'après le théorème du rang, à n. Ainsi, $\mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f)$ est un ssev de $\mathbb{R}^n$ de dimension n, il est donc égal à $\mathbb{R}^n$ donc on a :

$$\mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f) = \mathbb{R}^n.$$

Ceci achève de montrer la dernière implication. On a montré l'équivalence des trois assertions.

Correction 46

1. On veut montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_{n+1} \subset F_n$ et $G_n \subset G_{n+1}$.
   Soit donc $y \in F_{n+1}$, alors il existe $x \in E$ tel que $y = u^{n+1}(x)$. On remarque que l'on peut écrire $y = u^n(u(x))$ avec $u(x) \in E$, ce qui montre que y appartient à F_n. On a donc

   $$\boxed{F_{n+1} \subset F_n}$$

   D'autre part, soit $x \in G_n$, alors $u^n(x) = 0$ et en appliquant u, on obtient $u^{n+1}(x) = u(u^n(x)) = u(0) = 0$ puisque u est linéaire donc $x \in G_{n+1}$ ce qui montre que

   $$\boxed{G_n \subset G_{n+1}}$$

   La suite $(dim(F_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, minorée par 0 donc convergente. Comme c'est une suite d'entiers, il existe N_0 tel que $\forall n \geqslant N_0$, $\dim(F_n) = \dim(F_{N_0})$. Comme on a, pour tout $n \geqslant N_0$, $F_n \subset F_{N_0}$, on en déduit que pour tout $n \geqslant N_0$, $F_n = F_{N_0}$.

   On note N le plus petit entier à partir duquel la suite $(\mathrm{Im}(u^n))_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire, on a alors $\mathrm{rg}(u^k) = \mathrm{rg}(u^N)$, $\forall k \geqslant N$; d'après le théorème du rang, cela implique que $\dim(\ker u^k) = \dim(\ker u^N)$, $\forall k \geqslant N$. Comme on a également $\forall k \geqslant N, \ker(u^N) \subset \ker u^k$, on en déduit que la suite des noyaux est également stationnaire à partir de l'entier N.

2. Soit $x \in E$, alors $u^N(x) \in \mathrm{Im} u^N$. Or, la suite $(\mathrm{Im}(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ étant stationnaire à partir du rang N (et $2N \geqslant N$), on a $\mathrm{Im}(u^N) = \mathrm{Im}(u^{2N})$. Il existe donc $a \in E$ tel que $u^N(x) = u^{2N}(a)$ d'où $x - u^N(a) \in \ker u^N$.
   On pose $b = x - u^N(a)$, on a alors $x = u^N(a) + b$ avec $b \in \ker u^N$. On donc montré que tout élément de E s'écrit comme la somme d'un élément de $\mathrm{Im} u^N$ et de $\ker u^N$.

   Montrons maintenant que la somme est directe. Soit donc $x \in \ker u^N \cap \mathrm{Im} u^N$, alors $u^N(x) = 0$ et il existe $a \in E$ tel que $x = u^N(a)$, on a donc $a \in \ker u^{2N}$. Or, toujours parce que la suite $(\mathrm{Ker} u^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire à partir du rang N (et que $2N \geqslant N$), on a $\ker(u^{2N}) = \ker u^N$ donc $a \in \mathrm{Ker}(u^N)$ c'est-à-dire $u^N(a) = 0 = x$. On a montré que la somme est directe.

3. Soit $x \in \mathrm{Im} u^N$, alors il existe $a \in E$ tel que $x = u^N(a)$. Montrons que $u(x) \in \mathrm{Im}(u^N)$. On a $u(x) = u^{N+1}(a) \in \mathrm{Im} u^{N+1}$. Or $\mathrm{Im}(u^{N+1}) = \mathrm{Im} u^N$ donc $u(x) \in \mathrm{Im}(u^N)$, ce qui montre que $\mathrm{Im} u^N$ est stable par u.

   De même, soit $y \in \ker u^N$, alors $u^N(y) = 0$. Comme u est linéaire, on a $u^{N+1}(y) = 0$ donc $u^N(u(y)) = 0$ ce qui montre que $u(x) \in \mathrm{Ker}(u^N)$ donc $\ker u^N$ est stable par u.

4. Soit $x \in \ker u|_F$, alors $u(x) = 0$ et $x \in F = F_N$. Par définition de $F_N = \mathrm{Im}(u^N)$, on sait qu'il existe $a \in E$ tel que $u^N(a) = x$; On a supposé $u(x) = 0$ donc $u^{N+1}(a) = 0$. On a donc $a \in G_{N+1}$ et comme $G_{N+1} = G_N$, on en déduit $u^N(a) = 0 = x$. Ainsi, $u|_F$ est injectif.
   c'est un endomorphisme d'un espace de dimension finie (car F est stable par u),

   $$\boxed{\text{l'endomorphisme } u|_F \text{ est bijectif}}$$

   Considérons maintenant $u|_G$. Pour tout $x \in G = G_N$, on a $u^N(x) = 0$ donc $u^N|_G = 0_{\mathcal{L}(G)}$ et

   $$\boxed{\text{l'endomorphisme } u|_G \text{ est nilpotent}}$$

Correction 47 Soit $x_0 \in E \setminus H$, alors $\mathrm{Vect}(x_0) \oplus H = E$. Il existe donc $(\lambda, b) \in \mathbb{K} \times H$ tel que $u(x_0) = \lambda x_0 + b$.

Soit maintenant $x \in E$. Alors $x = \alpha x_0 + a$ avec $\alpha \in \mathbb{K}$ et $a \in H$. On a

$$\begin{aligned} u(x) - \lambda x &= \alpha u(x_0) + u(a) - \lambda \alpha x_0 - \lambda a \\ &= \alpha \lambda x_0 + \alpha b + u(a) - \lambda \alpha x_0 - \lambda a \\ &= \alpha b + u(a) - \lambda a \end{aligned}$$

On sait que H est stable par u, on a donc $u(a) \in H$ et H est un ssev donc $\alpha b + u(a) - \lambda a \in H$. On a donc

$$\forall x \in E, u(x) - \lambda x \in H,$$

c'est-à-dire $\mathrm{Im}(u - \lambda id_E) \subset H$.

Correction 48 Si $H_1 = H_2$, on a $\dim(H_1 \cap H_2) = \dim(H_1) = n-1$. Sinon, il existe $x \in H_1$ et $x \notin H_2$, on a alors $\mathrm{Vect}(x) \oplus H_2 = E$ donc $H_1 + H_2 = E$. On en déduit que

$$n = \dim(H_1) + \dim(H_2) - \dim(H_1 \cap H_2),$$

d'après la formule de Grassmann. Ainsi, $\dim(H_1 \cap H_2) = n - 2$.