Devoir surveillé 8, sujet 1.

Chaque résultat doit être justifié, les réponses doivent être soulignées ou encadrées, vos pages (et pas vos copies) doivent être numérotées, votre nom et classe doivent être mentionnés et tout ceci doit être fait durant le temps de composition. Les étapes des éventuels calculs doivent apparaître sur la copie. On peut admettre un résultat ou une question en le précisant explicitement. La clarté et la précision de la rédaction ainsi que la présentation de la copie seront prises en compte dans l'évaluation.

Calculatrice interdite.

Exercice 1.

On se propose d'étudier quelques propriétés de la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par la relation :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, f(x) = \int_0^1 \frac{e^t}{x+t} dt.$$

On ne cherchera pas à calculer l'intégrale définissant $f(x)$;

1. Montrer que f est décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.
2. Soit x_0 un réel strictement positif quelconque.

(a) Montrer que :

$$\forall x \in \left[\frac{x_0}{2}, +\infty \right[, |f(x) - f(x_0)| \leq \frac{2e|x - x_0|}{x_0^2}.$$

(b) En déduire que f est continue au point x_0 .

3. Montrer que pour tout réel x strictement positif :

$$\frac{e-1}{x+1} \leq f(x) \leq \frac{e-1}{x}.$$

En déduire :

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e-1}{x}.$$

4. (a) En utilisant l'inégalité des accroissements finis, déterminer un réel positif M tel que :

$$\forall t \in [0, 1], |e^t - 1| \leq Mt.$$

(b) Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par la relation :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, g(x) = \int_0^1 \frac{e^t - 1}{x+t} dt.$$

Montrer que g est bornée sur $\mathbb{R}^{+*}$.

(c) Montrer finalement :

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -\ln(x).$$

Indication : remarquer que pour x strictement positif, $f(x) = \int_0^1 \frac{1}{x+t} dt + g(x)$.

On cherche désormais à déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de $f(1)$.

On introduit la fonction h définie sur $[0, 1]$ par la relation : $\forall t \in [0, 1], h(t) = \frac{e^t}{1+t}$.

On définit également deux suites $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ en posant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} h\left(\frac{k}{n}\right) \text{ et } v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} h\left(\frac{k+1}{n}\right).$$

5. (a) Vérifier que la fonction h est croissante sur le segment $[0, 1]$.
(b) Donner une interprétation géométrique des réels u_n et v_n et leurs limites.
(c) Montrer que :

$$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \frac{1}{n} h\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{k/n}^{(k+1)/n} h(t) dt \leq \frac{1}{n} h\left(\frac{k+1}{n}\right).$$

- (d) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leq f(1) \leq v_n$.
(e) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer v_n à l'aide de u_n , $h(0)$, $h(1)$ et n .
(f) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|u_n - f(1)| \leq \frac{h(1) - h(0)}{n} \text{ et } |v_n - f(1)| \leq \frac{h(1) - h(0)}{n}$$

- (g) En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \left| f(1) - \frac{u_n + v_n}{2} \right| \leq \frac{h(1) - h(0)}{2n}.$$

- (h) Expliquer comment obtenir une valeur approchée de $f(1)$ à $\frac{10^{-2}}{2}$ près.

Exercice 2.

On se place dans $E = \mathbb{R}^4$ muni de sa structure d'espace vectoriel usuelle.

1. On considère le sous-espace vectoriel F de E engendré par la famille (v_1, v_2, v_3) où :

$$v_1 = (1, 3, -1, 0), v_2 = (5, 4, -2, 1), v_3 = (-13, 5, 1, -4).$$

- (a) Montrer que v_3 peut s'écrire comme combinaison linéaire de v_1 et de v_2 .
(b) En déduire une base de F .
2. On considère le sous-espace vectoriel G de E engendré par la famille (u_1, u_2) , où :

$$u_1 = (-1, 1, 1, 0), u_2 = (0, 0, 1, 1).$$

- (a) Montrer que (v_1, v_2, u_1, u_2) est une base de E .
(b) Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.
(c) On note p la projection sur F parallèlement à G . Calculer $p(7, 10, -3, 2)$.
3. Soit H le sous-espace vectoriel de E défini par :

$$H = \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid 3x_1 - x_2 + 7x_4 = 0 \text{ et } x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 0\}.$$

- (a) Déterminer une base de H .
(b) Montrer que $v_1 \in H$ et $v_2 \notin H$.
(c) En déduire la dimension de $F \cap H$ et une base de $F \cap H$.

Exercice 3.

1. exemple :

Montrez que $(X^2, (X-1)^2, (X+1)^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

on généralise :

Dans les questions suivantes, on adopte les notations ci-dessous :

- $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
- n et d deux entiers naturels.
- $a_0, a_1, \dots, a_n$ sont $n+1$ scalaires distincts.
- P est un polynôme de degré d .
- pour tout entier k entre 0 et n compris, $A_k = P(X + a_k) = P \circ (X + a_k)$.
- la famille $\mathcal{F}$ est définie par $\mathcal{F} = (A_0, A_1, \dots, A_n)$.

2. (a) Montrez que, si $n > d$ alors $\mathcal{F}$ est liée.

(b) Montrez que, si $n < d$ alors $\mathcal{F}$ n'engendre pas $\mathbb{K}_d[X]$, ni aucun des $\mathbb{K}_N[X]$ avec N entier naturel.

3. On suppose dans cette question que $n = d$.

Soient $c_0, c_1, \dots, c_n$ des scalaires tels que $\sum_{k=0}^n c_k A_k = 0$.

(a) Appliquez à P une formule du cours et déduisez-en :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, A_k(X) = \sum_{j=0}^n \frac{P^{(j)}(a_k)}{j!} X^j$$

(b) Déduisez-en :

$$\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket, \sum_{k=0}^n c_k P^{(j)}(a_k) = 0$$

(c) Justifiez simplement que $(P, P', \dots, P^{(n)})$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$

(d) En déduire que :

$$\forall Q \in \mathbb{K}_n[X], \sum_{k=0}^n c_k Q(a_k) = 0$$

(e) En choisissant bien le polynôme Q de la question précédente, montrez que $c_0 = 0$ et plus généralement $c_k = 0$ pour tout entier k entre 0 et n compris.

(f) Montrez que $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{K}_d[X]$.

4. (a) Vérifiez que, si $n \geq d$ alors $\mathcal{F}$ engendre $\mathbb{K}_d[X]$.

(b) Vérifiez que, si $n \leq d$ alors $\mathcal{F}$ est libre.

Correction du DS n 8, sujet 2

Exercice 1 On se propose d'étudier quelques propriétés de la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par la relation :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, f(x) = \int_0^1 \frac{e^t}{x+t} dt.$$

On ne cherchera pas à calculer l'intégrale définissant $f(x)$;

1. Montrer que f est décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Soit $x < y$, alors pour tout $t \in [0, 1]$, $\frac{1}{1+y} < \frac{1}{1+x}$ donc $\frac{e^t}{y+t} \leq \frac{e^t}{x+t}$ puis, par croissance de l'intégrale, les bornes étant croissantes, $f(y) \leq f(x)$. On a montré que f est décroissante.

2. Soit x_0 un réel strictement positif quelconque.

(a) Montrer que :

$$\forall x \in \left[\frac{x_0}{2}, +\infty \right[, |f(x) - f(x_0)| \leq \frac{2e|x - x_0|}{x_0^2}.$$

Soit $x \in \left[\frac{x_0}{2}, +\infty \right[$, alors

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= \left| \int_0^1 \left(\frac{e^t}{x+t} - \frac{e^t}{x_0+t} \right) dt \right| \text{ par linéarité de l'intégrale} \\ &\leq \left| \int_0^1 \frac{e^t(x_0 - x)}{(x+t)(x_0+t)} dt \right| \\ &\leq \int_0^1 \frac{e^t|x_0 - x|}{(x+t)(x_0+t)} dt \\ &\leq \int_0^1 \frac{2e^t|x_0 - x|}{x_0^2} dt \text{ car } \forall t \in [0, 1], (x+t)(x_0+t) \geq xx_0 \geq \frac{x_0^2}{2} \end{aligned}$$

On a bien l'inégalité souhaitée.

(b) En déduire que f est continue au point x_0 .

D'après la question précédente et le théorème des gendarmes, $f(x)$ tend vers $f(x_0)$ lorsque x tend vers x_0 , la fonction f est donc continue au point x_0 .

3. Montrer que pour tout réel x strictement positif :

$$\frac{e-1}{x+1} \leq f(x) \leq \frac{e-1}{x}.$$

Soit $x > 0$, alors pour tout $t \in [0, 1]$,

$$\frac{e^t}{x+1} \leq \frac{e^t}{x+t} \leq \frac{e^t}{x},$$

donc, par croissance de l'intégrale :

$$\int_0^1 \frac{e^t}{x+1} dt \leq f(x) \leq \int_0^1 \frac{e^t}{x} dt,$$

puis

$$\frac{1}{x+1} [e^t]_0^1 \leq f(x) \leq \frac{1}{x} [e^t]_0^1.$$

On a bien l'encadrement souhaité.

En déduire :

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e-1}{x}.$$

On divise l'encadrement précédent par $\frac{e-1}{x} > 0$, on obtient

$$\frac{x}{x+1} \leq \frac{f(x)}{(e-1)/x} \leq 1,$$

d'où, en faisant tendre x vers $+\infty$, $\frac{f(x)}{(e-1)/x} \rightarrow 1$, on a donc bien $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e-1}{x}$.

4. (a) En utilisant l'inégalité des accroissements finis, déterminer un réel positif M tel que :

$$\forall t \in [0, 1], |e^t - 1| \leq Mt.$$

Soit $t \in [0, 1]$. On applique l'inégalité des accroissements finis à la fonction exponentielle continue, entre 0 et t : il existe un réel $c \in]0, t[$ tel que $\frac{e^t - 1}{t} = e^c$. Or, $c \leq 1$ donc $e^c \leq e$. On a donc $\frac{e^t - 1}{t} \leq e$. En multipliant par $t > 0$, on obtient $e^t - 1 \leq et$. On peut donc poser $M = e$ et on a montré pour tout entier $t \in [0, 1]$, $e^t - 1 \leq et$, ce qui est l'inégalité souhaitée puisque $|e^t - 1| = e^t - 1$.

Remarque : Je ne sais pas trop pourquoi le sujet demande l'inégalité avec une valeur absolue, sans doute pour vous aider à la question suivante.

(b) Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par la relation :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, g(x) = \int_0^1 \frac{e^t - 1}{x+t} dt.$$

Montrer que g est bornée sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Soit $x > 0$. D'après la question précédente, on sait que pour tout $t \in [0, 1]$, on a $e^t - 1 \leq et$ donc $\frac{e^t - 1}{x+t} \leq \frac{et}{x+t}$. Par ailleurs, $\frac{1}{x+t} \leq \frac{1}{t}$ donc $0 \leq \frac{e^t - 1}{x+t} \leq e$. Par croissance de l'intégrale, on obtient $0 \leq g(x) \leq e$ donc g est bornée.

On peut aussi utiliser l'inégalité triangulaire :

$$|g(x)| \leq \int_0^1 \frac{|e^t - 1|}{x+t} dt,$$

puis, par le même raisonnement que ci-dessus, $|g(x)| \leq e$ donc g est bornée

(c) Montrer finalement :

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -\ln(x).$$

Indication : remarquer que pour x strictement positif, $f(x) = \int_0^1 \frac{1}{x+t} dt + g(x)$.

Soit $x > 0$. Comme suggéré dans l'énoncé, on écrit

$$f(x) = \int_0^1 \frac{e^t}{x+1} dt = \int_0^1 \frac{e^t - 1 + 1}{x+1} dt = g(x) + \int_0^1 \frac{1}{x+t} dt.$$

La deuxième intégrale se calcule :

$$\int_0^1 \frac{1}{x+t} dt = [\ln|x+t|]_0^1 = \ln(x+1) - \ln(x).$$

On divise l'égalité $f(x) = g(x) + \ln(x+1) - \ln(x)$ par $-\ln(x)$:

$$\frac{f(x)}{-\ln(x)} = \frac{g(x)}{-\ln(x)} - \frac{\ln(x+1)}{\ln(x)} + 1.$$

Les deux quotients tendent vers 0 car g est bornée et $\ln(x+1) \rightarrow 0$. On en déduit que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{-\ln(x)} = 1$ donc on a bien $f(x) \sim_{x \rightarrow 0^+} -\ln(x)$.

On cherche désormais à déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de $f(1)$.

On introduit la fonction h définie sur $[0, 1]$ par la relation : $\forall t \in [0, 1], h(t) = \frac{e^t}{1+t}$.

On définit également deux suites $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ en posant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} h\left(\frac{k}{n}\right) \text{ et } v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} h\left(\frac{k+1}{n}\right).$$

5. (a) Vérifier que la fonction h est croissante sur le segment $[0, 1]$. La fonction h est dérivable sur $[0, 1]$

et pour tout $t \in [0, 1], h'(t) = \frac{te^t}{(1+t)^2} \geq 0$ donc h est croissante.

(b) Donner une interprétation géométrique des réels u_n et v_n et leurs limites.

Les réels u_n et v_n sont des sommes de Riemann qui approxime $\int_0^1 h(t) dt$ par valeurs inférieures et supérieures.

(c) Montrer que :

$$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \frac{1}{n} h\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{k/n}^{(k+1)/n} h(t) dt \leq \frac{1}{n} h\left(\frac{k+1}{n}\right).$$

. Soit $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. On sait que h est croissante donc pour tout $t \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$, on a

$$h\left(\frac{k}{n}\right) \leq h(t) \leq h\left(\frac{k+1}{n}\right),$$

d'où, par croissance de l'intégrale,

$$\int_0^1 h\left(\frac{k}{n}\right) dt \leq \int_0^1 h(t) dt \leq \int_0^1 h\left(\frac{k+1}{n}\right) dt,$$

puis, l'intervalle $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$ étant de longueur $\frac{1}{n}$,

$$\frac{1}{n} h\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{k/n}^{(k+1)/n} h(t) dt \leq \frac{1}{n} h\left(\frac{k+1}{n}\right).$$

(d) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, u_n \leq f(1) \leq v_n$.

Soit $n > 0$. On somme les encadrements trouvés à la question précédente pour k variant de 0 à $n-1$:

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} h\left(\frac{k}{n}\right) \leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k/n}^{(k+1)/n} h(t) dt \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} h\left(\frac{k+1}{n}\right).$$

On applique Chasles pour obtenir $\sum_{k=0}^{n-1} \int_{k/n}^{(k+1)/n} h(t) dt = \int_0^1 h(t) dt = f(1)$. On a bien $u_n \leq f(1) \leq v_n$

(e) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer v_n à l'aide de u_n , $h(0)$ et $h(1)$ et n .

On écrit :

$$v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} h\left(\frac{k+1}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n h\left(\frac{j}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} h\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{n} h(1) = u_n - \frac{1}{n} h(0) + \frac{1}{n} h(1).$$

(f) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|u_n - f(1)| \leq \frac{h(1) - h(0)}{n} \text{ et } |v_n - f(1)| \leq \frac{h(1) - h(0)}{n}$$

Soit $n > 0$. On sait que $u_n \leq f(1) \leq v_n$ donc, en utilisant la question précédente,

$$u_n \leq f(1) \leq u_n + \frac{h(1) - h(0)}{n},$$

d'où

$$0 \leq f(1) - u_n \leq \frac{h(1) - h(0)}{n},$$

puis

$$|u_n - f(1)| \leq \frac{h(1) - h(0)}{n}.$$

De même, on a

$$v_n - \frac{h(1) - h(0)}{n} \leq f(1) \leq v_n,$$

donc

$$-\frac{h(1) - h(0)}{n} \leq f(1) - v_n \leq 0,$$

d'où

$$|v_n - f(1)| \leq \frac{h(1) - h(0)}{n}$$

(g) En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \left| f(1) - \frac{u_n + v_n}{2} \right| \leq \frac{h(1) - h(0)}{2n}.$$

Soit $n > 0$, alors

$$\left| f(1) - \frac{u_n + v_n}{2} \right| = \left| \frac{f(1) - u_n + f(1) - v_n}{2} \right| \leq \left| \frac{u_n - f(1)}{2} \right| + \left| \frac{v_n - f(1)}{2} \right|,$$

d'après l'inégalité triangulaire. En utilisant les deux majorations trouvées à la question précédente, on obtient :

$$\left| f(1) - \frac{u_n + v_n}{2} \right| \leq \frac{h(1) - h(0)}{n},$$

(h) Expliquer comment obtenir une valeur approchée de $f(1)$ à $\frac{10^{-2}}{2}$ près.

Il suffit de déterminer un rang n_0 pour lequel $\frac{h(1) - h(0)}{n} \leq 10^{-2}$. Le réel $\frac{u_{n_0} + v_{n_0}}{2}$ sera alors une approximation à 10^{-2} près de $f(1)$.

Exercice 2 1. Dans $E = \mathbb{R}^4$, on considère le sous-espace vectoriel $F = \text{Vect}(v_1, v_2, v_3)$ où :

$$v_1 = (1, 3, -1, 0), \quad v_2 = (5, 4, -2, 1), \quad v_3 = (-13, 5, 1, -4)$$

(a) Montrons que v_3 peut s'écrire comme combinaison linéaire de v_1 et v_2 , c'est-à-dire sous la forme : $v_3 = a.v_1 + b.v_2$. Cette équation vectorielle est équivalente à un système obtenu en identifiant les coordonnées des deux membres de l'équation. On peut aussi remarquer que : Comme v_1 a sa quatrième coordonnée nulle, il apparaît nécessaire que $b = -4$. Mais on a alors : $v_3 - b.v_2 = (-13, 5, 1, -4) + 4.(5, 4, -2, 1) = (7, 21, -7, 0) = 7.(1, 3, -1, 0)$, ie : $v_3 = 7.v_1 - 4.v_2$.

(b) On a alors : $F = \text{Vect}(v_1, v_2, v_3) = \text{Vect}(v_1, v_2)$ puisque v_3 s'écrit comme combinaison linéaire de v_1 et v_2 .

Or v_1 et v_2 forment une famille libre : en effet, soient λ_1 et λ_2 deux réels tels que :

$$\lambda_1.v_1 + \lambda_2.v_2 = 0_{\mathbb{R}^4} \iff (\lambda_1 + 5\lambda_2, 3\lambda_1 + 4\lambda_2, -\lambda_1 - 2\lambda_2, \lambda_2) = (0, 0, 0, 0)$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 + 5\lambda_2 = 0 \\ 3\lambda_1 + 4\lambda_2 = 0 \\ -\lambda_1 - 2\lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases} \iff \lambda_1 = \lambda_2 = 0.$$

Comme l'égalité : $F = \text{Vect}(v_1, v_2)$ fait de (v_1, v_2) une famille génératrice de F , et puisqu'elle est libre : (v_1, v_2) est une base de F .

2. Soit $G = \text{Vect}(u_1, u_2)$ où : $u_1 = (-1, 1, 1, 0)$, $u_2 = (0, 0, 1, 1)$.

(a) Montrons que (u_1, u_2, v_1, v_2) est une base de E :

Comme $E = \mathbb{R}^4$ est un espace vectoriel de dimension 4, et comme cette famille de vecteurs possède 4 éléments :

Il suffit de démontrer que cette famille est libre.

Soient alors $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ quatre réels tels que :

$$\lambda_1.u_1 + \lambda_2.u_2 + \lambda_3.v_1 + \lambda_4.v_2 = 0_{\mathbb{R}^4}$$

On est ramené à résoudre le système :

$$\begin{cases} \lambda_1 + 6\lambda_2 - \lambda_3 = 0 & L_1 \\ 3\lambda_1 + 7\lambda_2 - \lambda_3 = 0 & L_2 \\ -3\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 & L_3 \\ 2\lambda_2 + \lambda_4 = 0 & L_4 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 + 6\lambda_2 - \lambda_3 = 0 & L_1 \\ -11\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ 5\lambda_2 - \lambda_3 = 0 & L_3 \leftarrow -L_3 + L_4 \\ 2\lambda_2 + \lambda_4 = 0 & L_4 \end{cases}$$

Les lignes L_2 et L_3 impliquent $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, la ligne L_4 donne alors $\lambda_4 = 0$ puis la première donne $\lambda_1 = 0$. La seule solution est donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$.

La famille (u_1, u_2, v_1, v_2) est donc libre, et c'est une base de $\mathbb{R}^4$.

(b) $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E (somme de s.e.v. de E).

On a vu que ; (v_1, v_2) est une base de F . On a aussi : $G = \text{Vect}(u_1, u_2)$, donc la famille (u_1, u_2) engendre G . Mais elle est aussi libre comme sous-famille de la base (u_1, u_2, v_1, v_2) de E : (u_1, u_2) est donc une base de G .

Comme la famille (u_1, u_2, v_1, v_2) , obtenue en juxtaposant une base de F et une base de G , forme une base de l'espace E tout entier : d'après le cours, on peut alors affirmer que :

$$F \text{ et } G \text{ sont supplémentaires : } F \oplus G = E$$

(c) On cherche $p(7, 10, -3, 2)$, on cherche donc $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$(7, 10, -3, 2) = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma u_1 + \delta u_2,$$

soit encore

$$(7, 10, -3, 2) = \alpha(1, 3, -1, 0) + \beta(5, 4, -2, 1) + \gamma(-1, 1, 1, 0) + \delta(0, 0, 1, 1).$$

Par identification, on a

$$\begin{cases} \alpha + 5\beta - \gamma & = 7 \\ 3\alpha + 4\beta + \gamma & = 10 \\ -\alpha - 2\beta + \gamma + \delta & = 3 \\ \beta + \delta & = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 5\beta - \gamma & = 7 \\ 4\alpha + 9\beta & = 17L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ 3\beta + \delta & = 4L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \\ \beta + \delta & = 2 \end{cases}$$

On déduit des deux dernières lignes que $\beta = 1$ puis la première ligne donne $4\alpha = 8$ donc $\alpha = 2$ d'où $p(7, 10, -3, 2) = 2v_1 + v_2 = (7, 10, -4, 1)$

3. $H = \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid 3x_1 - x_2 + 7x_4 = 0 \text{ et } x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 0\}$.

(a) Pour trouver une famille génératrice, on résout le système caractéristique des éléments de H :

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 7x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 0 & L_1 \leftrightarrow L_2 \\ 4x_1 + 4x_3 + 5x_4 = 0 & L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -x_1 - 4x_3 + 2x_4 = -3x_3 + \frac{13}{4}x_4 \\ x_1 = -x_3 - \frac{5}{4}x_4 \end{cases}$$

$$H = \mathcal{S} = \{(-x_3 - \frac{5}{4}x_4, -3x_3 + \frac{13}{4}x_4, x_3, x_4) \mid (x_3, x_4) \in \mathbb{R}^2\}$$

$$\Leftrightarrow H = \text{Vect}((-1, -3, 1, 0), (-\frac{5}{4}, \frac{13}{4}, 0, 1))$$

$$\Leftrightarrow H = \text{Vect}((1, 3, -1, 0), (-5, 13, 0, 4)).$$

Ces deux derniers vecteurs qui engendrent H sont clairement non colinéaires (à justifier proprement!), donc ils forment une famille libre.

On obtient ainsi une base (parmi tant d'autres possibles!) de H .

(b) On vient d'écrire que $v_1 = (1, 3, -1, 0)$ appartient à une base de H : donc $v_1 \in H$!

$v_2 \in H$ si et seulement si ses coordonnées vérifient le système caractéristique des éléments de H .

Avec $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (5, 4, -2, 1) = v_2$, on a :

$$3x_1 - x_2 + 7x_4 = 3 \cdot 5 - 4 + 7 = 18 \neq 0, \text{ donc } v_2 \notin H.$$

$F \cap H$ est un s.e.v. de F (et de H), en tant qu'intersection de s.e.v.

On a en particulier : $\dim F \cap H \leq \dim F = 2$, donc $\dim F \cap H \in \{0, 1, 2\}$.

Comme $v_1 \in F \cap H$, et $v_1 \neq 0_{\mathbb{R}^4}$: $F \cap H \neq \{0_{\mathbb{R}^4}\}$ et $\dim F \cap H > 0$.

Si on avait $\dim F \cap H = 2$: alors (cf. cours!), puisque $F \cap H$ est un s.e.v. de F de même dimension que ce dernier, on a l'égalité $F \cap H = F$. Mais ceci est en contradiction avec le fait qu'on a : $v_2 \in F \setminus (F \cap H)$!!

Donc $\dim F \cap H = 1$. $v_1 \in F \cap H$ et $v_1 \neq 0_{\mathbb{R}^4}$: la famille (v_1) constitue donc une base de $F \cap H$.

Exercice 3 1. exemple :

Montrez que $(X^2, (X-1)^2, (X+1)^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Cette famille de $\mathbb{R}_2[X]$ comporte 3 vecteurs et $\dim(\mathbb{R}_2[X]) = 3$. Reste à vérifier qu'elle est libre. Soient α, β, γ 3 scalaires tels que $\alpha X^2 + \beta(X-1)^2 + \gamma(X+1)^2 = 0$. En développant et en identifiant suivant les puissances de X , on obtient :

$$\alpha + \beta + \gamma = 0; -2\beta + 2\gamma = 0; \beta + \gamma = 0$$

On en déduit aisément que $\alpha = \beta = \gamma = 0$. LA famille est donc bien libre...

2. (a) Montrez que, si $n > d$ alors $\mathcal{F}$ est liée.

$\mathcal{F}$ est une famille de $n + 1$ polynômes dans $\mathbb{K}_d[X]$ (tous les polynômes de cette famille sont de degré d), qui est de dimension $d + 1$. Or $n + 1 > d + 1$, donc $\mathcal{F}$ est liée.

(b) Montrez que, si $n < d$ alors $\mathcal{F}$ n'engendre pas $\mathbb{K}_d[X]$, ni aucun des $\mathbb{K}_N[X]$ avec N entier naturel.

Comme ci-dessus, $\mathcal{F}$ ne peut engendrer $\mathbb{K}_d[X]$ pour des raisons de dimension et il en de même pour $\mathbb{K}_N[X]$, avec $N \geq d$. Pour $N < d$, les vecteurs de $\mathcal{F}$ ne sont pas dans $\mathbb{K}_N[X]$ et ne peuvent donc engendrer $\mathbb{K}_N[X]$...

3. On suppose dans cette question que $n = d$.

Soient $c_0, c_1, \dots, c_n$ des scalaires tels que $\sum_{k=0}^n c_k A_k = 0$.

(a) Appliquez à P une formule du cours et déduisez-en : $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $A_k(X) = \sum_{j=0}^n \frac{P^{(j)}(a_k)}{j!} X^j$

Vous aurez reconnu la formule de Taylor (pour les polynômes). P étant de degré $d = n$, on a :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, P = \sum_{j=0}^n \frac{P^{(j)}(a_k)}{j!} (X - a_k)^j$$

en appliquant la formule en chaque a_k .

On compose à droite par $(X + a_k)$ et on obtient la formule demandée, car $(X - a_k)^j \circ (X + a_k) = X^j$ et composer à droite est linéaire.

(b) Déduisez-en : $\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\sum_{k=0}^n c_k P^{(j)}(a_k) = 0$.

On reprend l'hypothèse $\sum_{k=0}^n c_k A_k = 0$. On remplace les A_k par leur expression sous forme de somme ci-dessus, on intervertit les deux sommes (pas de pb : elles sont à indices indépendants) et on obtient :

$$\sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^n c_k \frac{P^{(j)}(a_k)}{j!} X^j = 0$$

On identifie suivant les puissances de X et on obtient ce qui est demandé...

(c) Justifiez simplement que $(P, P', \dots, P^{(n)})$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$

C'est une famille de polynômes, qui est étagée en degrés de 0 à n (d'après $\deg(P^{(j)}) = \deg(P) - j$ pour d entre 0 et n). C'est donc bien une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

et déduisez-en : $\forall Q \in \mathbb{K}_n[X]$, $\sum_{k=0}^n c_k Q(a_k) = 0$.

Soit Q dans $\mathbb{K}_n[X]$. D'après ce qui précède, on peut écrire $Q = \sum_{j=0}^n b_j P^{(j)}$. On remplace alors Q par cette somme dans $\sum_{k=0}^n c_k Q(a_k) = 0$, ce qui donne 2 sommes simples imbriquées, que l'on intervertit pour obtenir, avec le résultat de (ii), la formule demandée...

(d) En choisissant bien le polynôme Q de la question précédente, montrez que $c_0 = 0$ et plus généralement $c_k = 0$ pour tout entier k entre 0 et n compris.

On joue sur les racines de Q : prenons $Q = \prod_{i=1}^n (X - a_i)$, on a bien Q dans $\mathbb{K}_n[X]$ et d'après la question précédente, $c_0 Q(a_0) = 0$. Or $Q(a_0) \neq 0$, car les a_k sont distincts. Donc $c_0 = 0$.

De même, les a_k jouant tous le même rôle, on obtient $c_k = 0$ pour tout les k .

(e) Montrez que $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{K}_d[X]$.

On vient de montrer que la famille $\mathcal{F}$ est libre. De plus elle comprend $d + 1$ vecteurs, elle est dans $\mathbb{K}_d[X]$, dont la dimension est $d + 1$. On en conclut que c'est une base de $\mathbb{K}_d[X]$.

4. (a) Vérifiez que, si $n \geq d$ alors $\mathcal{F}$ engendre $\mathbb{K}_d[X]$.

On vient de montrer que $(A_0, A_1, \dots, A_d)$ est une base de $\mathbb{K}_d[X]$, donc en particulier c'est une famille génératrice de $\mathbb{K}_d[X]$. Or $\mathcal{F} = (A_0, \dots, A_d, \dots, A_n)$ est une famille de $\mathbb{K}_d[X]$, donc en tant que sur-famille de la précédente, elle engendre aussi $\mathbb{K}_d[X]$.

(b) Vérifiez que, si $n \leq d$ alors $\mathcal{F}$ est libre.

Dans ce cas $\mathcal{F}$ est une famille extraite de $(A_0, A_1, \dots, A_d)$, qui est libre, en tant que base de $\mathbb{K}_d[X]$, donc $\mathcal{F}$ est libre.