

Devoir surveillé 8, sujet 2.

Chaque résultat doit être justifié, les réponses doivent être soulignées ou encadrées, vos pages (et pas vos copies) doivent être numérotées, votre nom et classe doivent être mentionnés et tout ceci doit être fait durant le temps de composition. Les étapes des éventuels calculs doivent apparaître sur la copie. On peut admettre un résultat ou une question en le précisant explicitement. La clarté et la précision de la rédaction ainsi que la présentation de la copie seront prises en compte dans l'évaluation.

Calculatrice interdite.

Exercice 1.

Soit $[u, v]$ et $[r, s]$ deux segments de longueur non nulle de $\mathbb{R}$.

1. soit f une fonction de $\mathcal{C}^2([r, s], \mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $K > 0$ tel que $|f'(t)| \geq K$ pour tout $t \in [r, s]$ et que, de plus, $f''(t) \geq 0$ pour tout $t \in [r, s]$.

(a) Montrer l'inégalité $\left| \int_r^s \frac{f''(t)}{(f'(t))^2} dt \right| \leq \frac{2}{K}$.

(b) En intégrant par parties l'intégrale $\int_r^s \frac{1}{f'(t)} (f'(t) \cos f(t)) dt$, établir que $\left| \int_r^s \cos f(t) dt \right| \leq \frac{4}{K}$.

On suppose désormais que $f \in \mathcal{C}^2([u, v], \mathbb{R})$ vérifie $f''(t) \geq M > 0$ pour tout t appartenant à $[u, v]$.

2. On suppose ici que $f'(u) \geq 0$.

(a) Établir, sur $\left[u + \frac{2}{\sqrt{M}}, v \right]$, l'inégalité suivante

$$f'(t) \geq 2\sqrt{M}.$$

- (b) En déduire que

$$\left| \int_u^v \cos f(t) dt \right| \leq \frac{4}{\sqrt{M}}.$$

On admettra que le résultat est identique lorsque $f'(v) \leq 0$.

3. On suppose ici que $f'(u)f'(v) < 0$.

(a) Montrer qu'il existe un unique réel w de $]u, v[$ tel que $f'(w) = 0$.

- (b) En déduire que

$$\left| \int_u^v \cos f(t) dt \right| \leq \frac{8}{\sqrt{M}}.$$

4. En déduire que $\left| \int_u^v \cos f(t) dt \right| \leq \frac{8}{\sqrt{M}}$.

Soit $\beta > 0$ fixé. Dans les questions suivantes α désigne un nombre réel, k un entier naturel et $J_{k,\alpha}$ la fonction définie sur $[0, \pi]$ par

$$J_{k,\alpha}(x) = \int_0^x \cos(\alpha t + k\beta t^3) dt,$$

5. Montrer, pour tout x appartenant à $[k^{-1/3}, \pi]$, l'inégalité :

$$\left| \int_{k^{-1/3}}^x \cos(\alpha t + k\beta t^3) dt \right| \leq \frac{8k^{-1/3}}{\sqrt{6\beta}}.$$

6. En déduire qu'il existe une constante $C_1 > 0$, indépendante de α et k , telle que pour tout x de $[0, \pi]$ on ait la relation

$$|J_{k,\alpha}(x)| \leq C_1 k^{-1/3}$$

Exercice 2.

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. On note Id l'application identité de E . Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On dit qu'un endomorphisme f de E est cyclique d'ordre p s'il existe un élément a de E vérifiant les trois conditions suivantes :

- $f^p(a) = a$.
- La famille $(a, f(a), \dots, f^{p-1}(a))$ est génératrice de E .
- La famille $(a, f(a), \dots, f^{p-1}(a))$ est constituée d'éléments deux à deux distincts.

La famille $(a, f(a), \dots, f^{p-1}(a))$ est alors appelée cycle de E .

Partie I : Exemples

1. Dans cette question $E = \mathbb{R}^2$.

On considère $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'endomorphisme définie par $f : (x, y) \rightarrow (-y, x)$.

En considérant $a = (1, 0)$, observer que f est cyclique d'ordre p , l'entier p étant à préciser.

2. Dans cette question $E = \text{vect}(\sin, \cos)$ désigne le sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ engendré par les fonctions $\sin$ et $\cos$.
- (a) Déterminer la dimension de E .
- (b) Soit $p \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$. Pour $f \in E$, on note τ_p l'application définie par

$$\tau_p(f) : x \mapsto f\left(x + \frac{2\pi}{p}\right)$$

Montrer que $\tau_p(f) \in E$.

- (c) Montrer que $\tau_p : f \mapsto \tau_p(f)$ est un endomorphisme de E .
- (d) On pose $f = \sin$. Exprimer, pour $k \in \mathbb{N}$, $\tau_p^k(f)$.
- (e) Montrer que, pour $k, l \in \mathbb{N}$, on a $\tau_p^k(\sin) = \tau_p^l(\sin) \Rightarrow l \equiv k[p]$.
- (f) Montrer que τ_p est cyclique d'ordre p .

Partie II : Étude

Dans cette partie, E désigne un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. On considère f un endomorphisme de E cyclique d'ordre p . Soit $(a, f(a), \dots, f^{p-1}(a))$ un cycle de E .

3. Montrer que $p \geq n$.
4. (a) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^p(f^k(a)) = f^k(a)$.
- (b) En déduire que $f^p = Id$. L'endomorphisme f est-il bijectif?
- (c) Justifier que $\ker(f - Id)$ et $\ker(Id + f + \dots + f^{p-1})$ sont des sous-espaces vectoriels de E et montrer qu'ils sont supplémentaires dans E .
5. On note m le plus grand des entiers naturels k tels que la famille $(a, f(a), \dots, f^{k-1}(a))$ soit libre.
- (a) Montrer que $f^m(a)$ est combinaison linéaire des m vecteurs $a, f(a), \dots, f^{m-1}(a)$.
- (b) Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel k , supérieur ou égal à m , le vecteur $f^k(a)$ est combinaison linéaire des m vecteurs $a, f(a), \dots, f^{m-1}(a)$.
- (c) En déduire que $m = n$ et que la famille $(a, f(a), \dots, f^{n-1}(a))$ est une base de E .
6. Soit g un endomorphisme commutant avec f c'est-à-dire tel que $f \circ g = g \circ f$. On note $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}$ les n nombres réels tels que :

$$g(a) = \alpha_0 a + \alpha_1 f(a) + \dots + \alpha_{n-1} f^{n-1}(a)$$

On considère h l'endomorphisme de E défini par

$$h = \alpha_0 Id + \alpha_1 f + \dots + \alpha_{n-1} f^{n-1}$$

- (a) Montrer que f et h commutent.
- (b) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}, g(f^k(a)) = h(f^k(a))$.
- (c) En déduire que $g = h$.
- (d) Quels sont les endomorphismes de E commutant avec f ?

Exercice 3.

Nous considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, f(x) = \frac{\ln(x)}{1+x^2}$. Soit F la primitive de f sur $\mathbb{R}^{+*}$ qui s'annule en 1, c'est-à-dire :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, F(x) = \int_1^x f(t) dt = \int_1^x \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt.$$

- 1. Justifier l'existence de F .
- 2. (a) On considère la fonction u définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, u(x) = \frac{\arctan(x)}{x}.$$

Montrer que u est prolongeable par continuité en 0. Dans la suite, u désigne la fonction ainsi prolongée en 0.

- (b) Soit $U : x \mapsto \int_x^1 u(t) dt$. Montrer que U admet une limite en 0 égale à $\int_0^1 u(t) dt$.
- (c) Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, F(x) = \arctan(x) \ln(x) - \int_1^x u(t) dt.$$

- (d) En déduire que F est prolongeable par continuité en 0. On notera encore F son prolongement continu.
- 3. Étudier la dérivabilité de F en 0.
- 4. (a) Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, F\left(\frac{1}{x}\right) = F(x).$$

- (b) En déduire la limite de F en $+\infty$.
- 5. (a) Soient $x \in \mathbb{R}^{+*}, k \in \mathbb{N}$. Calculer :

$$I_k(x) = \int_1^x t^k \ln(t) dt.$$

- (b) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}^{+*}, \frac{1}{1+t^2} = \sum_{k=0}^n (-1)^k t^{2k} + (-1)^{n+1} \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}.$$

- (c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que :

$$\forall x \in]0, 1[, \left| F(x) - \sum_{k=0}^n (-1)^k I_{2k}(x) \right| \leq I_{2n+2}(x).$$

- (d) En déduire que :

$$\left| F(0) - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \right| \leq \frac{1}{(2n+3)^2}.$$

Correction du DS n 8, sujet 2

Exercice 1 1. (a) $\int_r^s \frac{f''(t)}{(f'(t))^2} dt = \left[\frac{-1}{f'(t)} \right]_r^s = \frac{1}{f'(r)} - \frac{1}{f'(s)}$

Par suite :

$$\left| \int_r^s \frac{f''(t)}{(f'(t))^2} dt \right| \leq \frac{1}{|f'(r)|} + \frac{1}{|f'(s)|} \leq \frac{2}{K}.$$

(b)

$$\int_r^s \frac{1}{f'(t)} (f'(t) \cos f(t)) dt = \left[\frac{1}{f'(t)} \sin f(t) \right]_r^s - \int_r^s \left(\frac{-f''(t)}{(f'(t))^2} \right) \sin f(t) dt$$

$$\int_r^s \cos f(t) dt = \frac{\sin f(s)}{f'(s)} - \frac{\sin f(r)}{f'(r)} + \int_r^s \left(\frac{f''(t)}{(f'(t))^2} \right) \sin f(t) dt$$

$$\left| \int_r^s \cos f(t) dt \right| \leq \frac{1}{|f'(s)|} + \frac{1}{|f'(r)|} + \left| \int_r^s \left(\frac{f''(t)}{(f'(t))^2} \right) \sin f(t) dt \right|.$$

$$\left| \int_r^s \cos f(t) dt \right| \leq \frac{2}{K} + \int_r^s \left| \frac{f''(t)}{(f'(t))^2} \sin f(t) \right| dt$$

$$\left| \int_r^s \cos f(t) dt \right| \leq \frac{2}{K} + \int_r^s \frac{|f''(t)|}{(f'(t))^2} \times 1 dt \leq \frac{2}{K} + \frac{2}{K} = \frac{4}{K}$$

en utilisant la question 1. et le fait que $f'' \geq 0$.

Dans les questions 3 à 5, $[u, v]$ désigne un segment de longueur non nulle de $\mathbb{R}$, et f une fonction de classe C^2 sur $[u, v]$ à valeurs réelles. On suppose cette fois que $f''(t) \geq M > 0$ pour tout t appartenant à $[u, v]$.

2. (a) On suppose que $f'(u) \geq 0$. Soit $t \in [u + 2/\sqrt{M}, v]$: $f'(t) - f'(u) = \int_u^t f''(x) dx$.

Comme $f'(u) \geq 0$, $f'(t) \geq \int_u^t f''(x) dx = \int_u^{u+2/\sqrt{M}} f''(x) dx + \int_{u+2/\sqrt{M}}^t f''(x) dx$.

Comme $f''(x) \geq M \geq 0$, $f'(t) \geq \int_u^{u+2/\sqrt{M}} M dx = M \frac{2}{\sqrt{M}} = 2\sqrt{M}$.

(b) Sur l'intervalle $[u + 2/\sqrt{M}, v]$ on peut appliquer le résultat de la question 9. avec $K = \sqrt{2M}$.

D'où $\left| \int_{u+2/\sqrt{M}}^v \cos f(t) dt \right| \leq \frac{4}{2\sqrt{M}} = \frac{2}{\sqrt{M}}$

De plus $\left| \int_u^{u+2/\sqrt{M}} \cos f(t) dt \right| \leq \int_u^{u+2/\sqrt{M}} |\cos f(t)| dt \leq \int_u^{u+2/\sqrt{M}} 1 dt = \frac{2}{\sqrt{M}}$

Par suite : $\left| \int_u^v \cos f(t) dt \right| \leq \frac{4}{\sqrt{M}}.$

Remarque : si $u + 2/\sqrt{M} \geq v$, il n'est pas nécessaire de couper l'intervalle en deux et le majorant est $\frac{2}{\sqrt{M}} \leq \frac{4}{\sqrt{M}}$.

On admettra que le résultat est identique lorsque $f'(v) \leq 0$.

3. On suppose que $f'(u)f'(v) < 0$.

- (a) Comme $f'' > 0$ sur $[u, v]$, f' est strictement croissante, continue (f est C^2), sur $[u, v]$. Elle réalise une bijection de $[u, v]$ dans $J = f'([u, v])$. Comme $f'(u) < 0$ et $f'(v) > 0$, l'intervalle image contient 0. Du fait de la bijection, il existe un unique réel w de $]u, v[$ tel que $f'(w) = 0$.
- (b) On peut alors appliquer le résultat de la question 11 (ce qui est possible car $f'(w) = 0$) sur chacun des segments $[u, w]$ et $[w, v]$ et :

$$\left| \int_u^v \cos f(t) dt \right| = \left| \int_u^w \cos f(t) dt + \int_w^v \cos f(t) dt \right| \leq \left| \int_u^w \cos f(t) dt \right| + \left| \int_w^v \cos f(t) dt \right|.$$

$$\left| \int_u^v \cos f(t) dt \right| \leq \frac{4}{\sqrt{M}} + \frac{4}{\sqrt{M}} = \frac{8}{\sqrt{M}}.$$

4. Ce dernier majorant est donc valable dans tous les cas de figure. En effet, si $f'(u) \geq 0$ ou $f'(v) \leq 0$, alors

$$\left| \int_u^v \cos f(t) dt \right| \leq \frac{4}{\sqrt{M}} \leq \frac{8}{\sqrt{M}}$$

Si ce n'est pas le cas, on a $f'(u) < 0$ et $f'(v) > 0$ donc $f'(u)f'(v) < 0$ et d'après la question précédente, on a

$$\left| \int_u^v \cos f(t) dt \right| \leq \frac{8}{\sqrt{M}}$$

Par disjonction de cas, cette majoration est tout le temps vraie.

Soit $\beta > 0$ fixé. Dans les questions 7 et 8, α désigne un nombre réel, k un entier naturel et $J_{k,\alpha}$ la fonction définie par

$$J_{k,\alpha}(x) = \int_0^x \cos(\alpha t + k\beta t^3) dt,$$

5. Soit $x \in [k^{-1/3}, \pi]$. Prenons $f(x) = \alpha x + k\beta x^3$, f est C^2 et $f''(x) = 6k\beta x$. Sur $[k^{-1/3}, \pi]$, $f''(x) \geq 6k\beta k^{-1/3} > 0$. On peut appliquer le résultat de la question 12.

$$\left| \int_{k^{-1/3}}^x \cos(\alpha t + k\beta t^3) dt \right| \leq \frac{8}{\sqrt{6\beta k^{2/3}}} = \frac{8k^{-1/3}}{\sqrt{6\beta}}.$$

6. Si $x \in [0, k^{-1/3}]$:

$$\left| \int_0^x \cos(\alpha t + k\beta t^3) dt \right| \leq \int_0^x |\cos(\alpha t + k\beta t^3)| dt \leq \int_0^x 1 dt \leq x \leq k^{-1/3}$$

Si $x \in [k^{-1/3}, \pi]$:

$$\left| \int_0^x \cos(\alpha t + k\beta t^3) dt \right| \leq \left| \int_0^{k^{-1/3}} \cos(\alpha t + k\beta t^3) dt \right| + \left| \int_{k^{-1/3}}^x \cos(\alpha t + k\beta t^3) dt \right|$$

$$\left| \int_0^x \cos(\alpha t + k\beta t^3) dt \right| \leq k^{-1/3} + \frac{8k^{-1/3}}{\sqrt{6\beta}}$$

En prenant $C_1 = 1 + \frac{8}{\sqrt{6\beta}} > 0$, on a pour tout $x \in [0, \pi]$:

$$|J_{k,\alpha}(x)| \leq C_1 k^{-1/3}$$

Exercice 2 Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. On note Id l'application identité de E . Pour tout endomorphisme f de E , on note $f^0 = Id$, et pour tout entier naturel k , $f^{k+1} = f^k \circ f$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On dit qu'un endomorphisme f de E est cyclique d'ordre p s'il existe un élément a de E vérifiant les trois conditions suivantes :

- $f^p(a) = a$.

- La famille $(a, f(a), \dots, f^{p-1}(a))$ est génératrice de E .
 - La famille $(a, f(a), \dots, f^{p-1}(a))$ est constituée d'éléments deux à deux distincts.
- La famille $(a, f(a), \dots, f^{p-1}(a))$ est alors appelée cycle de E .

Partie I : Exemples

1. Dans cette question $E = \mathbb{R}^2$.

On considère $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'endomorphisme défini par $f : (x, y) \rightarrow (-y, x)$. En considérant $a = (1, 0)$, observer que f est cyclique d'ordre p , l'entier p étant à préciser.

On a

$$f(a) = (0, 1), f^2(a) = (-1, 0), f^3(a) = (0, -1) \text{ et } f^4(a) = (1, 0) = a$$

Par ailleurs, $(a, f(a))$ engendrent $\mathbb{R}^2$ donc $(a, f(a), f^2(a), f^3(a))$ aussi et il est clair que les éléments de cette famille sont deux à deux distincts.

L'application f est donc cyclique d'ordre 4.

2. Dans cette question $E = \text{vect}(\sin, \cos)$ désigne le sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ engendré par les fonctions $\sin$ et $\cos$.

- (a) Déterminer la dimension de E .

Montrons que la famille $(\cos, \sin)$ est libre. On suppose qu'il existe α, β deux réels tels que $\alpha \cos + \beta \sin = 0$, soit $\alpha \cos(x) + \beta \sin(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Pour $x = 0$, on obtient $\alpha = 0$ et pour $x = \frac{\pi}{2}$, $\beta = 0$. La famille est donc libre et elle engendre par conséquent un espace vectoriel de dimension 2. On a

$$\dim E = 2$$

- (b) Soit $p \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$. Pour $f \in E$, on note τ_p l'application définie par

$$\tau_p(f) : x \mapsto f\left(x + \frac{2\pi}{p}\right)$$

Montrer que $\tau_p(f) \in E$.

Soit $f \in E$ alors il existe deux réels α, β tels que $f = \alpha \cos + \beta \sin$. On a donc, pour tout x réel,

$$\begin{aligned} \tau_p(f)(x) &= \alpha \cos\left(x + \frac{2\pi}{p}\right) + \beta \sin\left(x + \frac{2\pi}{p}\right) \\ &= \alpha \cos x \cos \frac{2\pi}{p} - \alpha \sin x \sin \frac{2\pi}{p} + \beta \sin x \cos \frac{2\pi}{p} + \beta \cos x \sin \frac{2\pi}{p} \\ &= \underbrace{\left(\alpha \cos \frac{2\pi}{p} + \beta \sin \frac{2\pi}{p}\right)}_{\in \mathbb{R}} \cos x + \underbrace{\left(\beta \cos \frac{2\pi}{p} - \alpha \sin \frac{2\pi}{p}\right)}_{\in \mathbb{R}} \sin x \end{aligned}$$

On a donc bien $\tau_p(f) \in E$ pour tout $f \in E$.

- (c) Montrer que $\tau_p : f \mapsto \tau_p(f)$ est un endomorphisme de E .

On a vu à la question précédente que si $f \in E$, alors $\tau_p(f) \in E$, l'application τ_p est donc définie de E dans lui-même.

Montrons maintenant que l'application est linéaire. Soient $f, g \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\tau_p(\lambda f + g)(x) = (\lambda f + g)\left(x + \frac{2\pi}{p}\right) = \lambda f\left(x + \frac{2\pi}{p}\right) + g\left(x + \frac{2\pi}{p}\right) = \lambda \tau_p(f)(x) + \tau_p(g)(x)$$

Ceci étant valable pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\tau_p(\lambda f + g) = \lambda \tau_p(f) + \tau_p(g)$, ce qui montre que τ_p est linéaire.

(d) On pose $f = \sin$. Exprimer, pour $k \in \mathbb{N}$, $\tau_p^k(f)$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $\tau_p(f)(x) = f\left(x + \frac{2\pi}{p}\right)$ donc $\tau_p^2(f)(x) = \tau_p\left(x + \frac{2\pi}{p}\right) = f\left(x + \frac{4\pi}{p}\right)$ puis, par récurrence sur k , on montre que

$$\tau_p^k(f)(x) = \sin\left(x + \frac{2k\pi}{p}\right), \forall x \in \mathbb{R}$$

Montrer que, pour $k, l \in \mathbb{N}$, on a

$$\tau_p^k(f) = \tau_p^l(f) \Rightarrow l \equiv k[p].$$

Supposons maintenant que $\tau_p^k(f) = \tau_p^l(f)$, alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\sin\left(x + \frac{2k\pi}{p}\right) = \sin\left(x + \frac{2l\pi}{p}\right)$$

d'où $x + \frac{2k\pi}{p} \equiv x + \frac{2l\pi}{p} [2\pi]$. Il existe donc $m \in \mathbb{Z}$ tel que $x + \frac{2k\pi}{p} = x + \frac{2l\pi}{p} + 2\pi m$, soit $k = l + mp$. On a donc bien

$$k \equiv l[p]$$

(e) Montrer que τ_p est cyclique d'ordre p .

Montrons que τ_p vérifie les trois conditions :

- On a bien $\tau_p(f) = f$.
- On a $\tau_p(f) = \sin \frac{2\pi}{p} \cos + \cos \frac{2\pi}{p} \sin$ donc $\cos = \frac{1}{\sin \frac{2\pi}{p}} \left(\tau_p(f) - \cos \frac{2\pi}{p} f \right) \in \text{vect}(f, \tau_p(f))$. La famille $(f, \tau_p(f))$ est ainsi génératrice de E et la famille $(f, \tau_p(f), \dots, \tau_p^{p-1}(f))$ l'est donc également.
- Les éléments sont bien distincts d'après la question précédente.

Partie II : Étude

Dans cette partie, E désigne un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. On considère f un endomorphisme de E cyclique d'ordre p . Soit $(a, f(a), \dots, f^{p-1}(a))$ un cycle de f .

3. Montrer que $p \geq n$.

Par hypothèse, la famille $(a, f(a), \dots, f^{p-1}(a))$ est génératrice de E et elle possède p éléments, on a donc $p \geq n = \dim E$

4. (a) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^p(f^k(a)) = f^k(a)$.

Il suffit de remarquer que $f^p(f^k(a)) = f^k(f^p(a))$ et $f^p(a) = a$.

(b) En déduire que $f^p = Id$. L'endomorphisme f est-il bijectif?

On peut dire, en utilisant la fin du chapitre, que l'endomorphisme f^p envoie les éléments d'une famille génératrice de E sur eux-mêmes, il vaut donc l'identité sur E .

On peut aussi le montrer à la main : Soit $x \in E$, alors il existe $(\alpha_0, \dots, \alpha_{p-1}) \in \mathbb{R}^p$ tel que $x = \sum_{k=0}^{p-1} \alpha_k f^k(a)$, on a donc

$$f^p(x) = \sum_{k=0}^{p-1} \alpha_k f^{p+k}(a) = \sum_{k=0}^{p-1} \alpha_k f^k(a) = x,$$

On a donc bien $f^p = Id$.

L'endomorphisme f est bijectif puisque $f^{p-1} \circ f = f \circ f^{p-1} = Id$

- (c) Montrer que $\ker(f - Id)$ et $\ker(Id + f + \dots + f^{p-1})$ sont des sous-espaces vectoriels de E et établir qu'ils sont supplémentaires.

Ce sont des ev car ce sont les noyaux des deux applications linéaires $f - Id$ et $Id + f + \dots + f^{p-1}$. Montrons qu'ils sont supplémentaires. Montrons tout d'abord que la somme est directe. Soit donc $x \in \ker(f - Id) \cap \ker(Id + f + \dots + f^{p-1})$, alors $f(x) = x$ et $x + f(x) + \dots + f^{p-1}(x) = 0$; or $f(x) = x$ implique $f^k(x) = x, \forall k$, on a donc $x + f(x) + \dots + f^{p-1}(x) = px = 0$ donc $x = 0$ et l'intersection est réduite à zéro.

Montrons maintenant qu'ils sont supplémentaires. Soit $x \in E$, on cherche à écrire $x = y + z$ avec $y \in \ker(f - Id)$ et $z \in \ker(Id + f + \dots + f^{p-1})$. Supposons que ce soit le cas, alors $f(x) = y + f(z)$ et par une récurrence immédiate, pour tout entier k , $f^k(x) = y + f^k(z)$. On a donc

$$x + f(x) + \dots + f^{p-1}(x) = py + z + f(z) + \dots + f^{p-1}(z) = py \text{ puisque } z \in \ker(Id + f + \dots + f^{p-1})$$

$$\text{donc } y = \frac{1}{p}(x + f(x) + \dots + f^{p-1}(x)).$$

Il est clair qu'un élément de cet forme appartient à $\ker(f - Id)$ puisque $f^p(x) = x$, par conséquent, tout élément x de E peut s'écrire sous la forme $y = z$ avec $y \in \ker(f - Id)$ et $z \in \ker(Id + f + \dots + f^{p-1})$ en posant $y = \frac{1}{p}(x + f(x) + \dots + f^{p-1}(x))$ et $z = x - y$.

$$\boxed{\text{On a bien } E = \ker(f - Id) \oplus \ker(Id + f + \dots + f^{p-1})}$$

5. On note m le plus grand des entiers naturels k tels que la famille $(a, f(a), \dots, f^{k-1}(a))$ soit libre.

- (a) Montrer que $f^m(a)$ est combinaison linéaire des m vecteurs $a, f(a), \dots, f^{m-1}(a)$.

Si ce n'était pas le cas, la famille $(a, f(a), \dots, f^{m-1}(a), f^m(a))$ serait libre ce qui contredirait la minimalité de m .

- (b) Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel k , supérieur ou égal à m , le vecteur $f^k(a)$ est combinaison linéaire des m vecteurs $a, f(a), \dots, f^{m-1}(a)$.

Comme suggéré dans l'énoncé, on le montre par récurrence. Le cas initial où $k = m$ a été traité dans la question précédente. On suppose donc que cela est vrai au rang k et nous allons le montrer au rang $k + 1$. Par hypothèse de récurrence, on sait qu'il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ des réels tels que $f^k(a) = \alpha_1 a + \dots + \alpha_m f^{m-1}(a)$. Appliquons f , on obtient $f^{k+1}(a) = \alpha_1 f(a) + \dots + \alpha_m f^m(a)$ et comme $f^m(a)$ est combinaison linéaire de $a, f(a), \dots, f^{m-1}(a)$, cela montre que c'est également le cas de $f^{k+1}(a)$.

$$\boxed{f^k(a) \in \text{vect}(a, f(a), \dots, f^{m-1}(a)), \forall k \geq m}$$

- (c) En déduire que $m = n$ et que la famille $(a, f(a), \dots, f^{n-1}(a))$ est une base de E .

On sait que la famille $(a, f(a), \dots, f^{p-1}(a))$ est génératrice de E et d'après la question précédente, elle est engendrée par la sous-famille $(a, f(a), \dots, f^{m-1}(a))$ qui est donc une famille génératrice de E . Comme de plus, elle est libre par hypothèse, c'est une base de E ; On a donc $n = m$ et la famille $(a, f(a), \dots, f^{n-1}(a))$ est une base de E .

6. Soit g un endomorphisme commutant avec f c'est-à-dire tel que $f \circ g = g \circ f$. On note $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}$ les n nombres réels tels que :

$$g(a) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i f^i(a)$$

On considère h l'endomorphisme de E défini par

$$h = \alpha_0 Id + \alpha_1 f + \dots + \alpha_{n-1} f^{n-1}$$

- (a) Montrer que f et h commutent.

On a $f^k \circ f = f \circ f^k$ pour tout k et par linéarité, on a donc $f \circ h = h \circ f$.

(b) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}, g(f^k(a)) = h(f^k(a))$.

Soit $k \in \mathbb{N}$, alors

$$\begin{aligned} g(f^k(a)) &= f^k \circ g(a) \text{ car } f \circ g = g \circ f \\ &= f^k \left(\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i f^i(a) \right) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i f^{k+i}(a) \text{ par linéarité de } f \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} f^i \circ f^k(a) \\ &= h \circ f^k(a) \end{aligned}$$

On a bien l'égalité souhaitée.

(c) En déduire que $g = h$.

Les deux endomorphismes sont égaux sur une base de E , ils sont donc égaux.

(d) Quels sont les endomorphismes de E commutant avec f ?

On a montré que si g commute avec f , alors il est combinaison linéaire de $Id, f, \dots, f^{n-1}$. La réciproque est claire.

Exercice 3 1. La fonction $t \mapsto \frac{\ln(t)}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x > 0$, 0 n'appartient pas à l'intervalle d'extrémités 1 et x , $F(x)$ est donc l'intégrale d'une fonction sur un intervalle sur lequel elle est continue, $F(x)$ est donc bien définie.

2. (a) On sait que, au voisinage de 0 : $\arctan(x) \sim x$. Ainsi $\lim_{x \rightarrow 0} u(x) = 1$ puis

u est prolongeable par continuité en 0 en posant $u(0) = 1$.

(b) La fonction u étant continue sur $\mathbb{R}^+$. La fonction U est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$ par le théorème fondamentale de l'analyse, elle est donc continue, on a donc $\lim_{x \rightarrow 0} U(x) = U(0) = \int_0^1 u(t) dt$.

(c) Soit $x > 0$. On calcule $F(x) = \int_1^x \ln(t) \times \frac{1}{1+t^2} dt$ en intégrant par parties, en dérivant $\ln$ et primitivant $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$, ces fonctions étant de classe C^1 sur $[1, x]$ ou $[x, 1]$:

$$F(x) = [\arctan(t) \ln(t)]_1^x - \int_1^x \frac{\arctan(t)}{t} dt = \arctan(x) \ln(x) - \int_1^x u(t) dt$$

(d) On a vu précédemment que $\arctan(x) \sim x$ lorsque $x \rightarrow 0$.

Ainsi $\lim_{x \rightarrow 0} \arctan(x) \ln(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0$ par croissance comparée.

Par ailleurs $\lim_{x \rightarrow 0} - \int_1^x u(t) dt = \int_0^1 u(t) dt$ d'après la question ?? Ainsi

$$\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = \int_0^1 u(t) dt$$

3. $F'(x) = f(x)$ tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers 0.

4. On en déduit que F n'est pas dérivable en 0.

Graphiquement, la courbe de F admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse 0.

5. (a) Posons $u = 1/t$ dans $F(x)$:

$$F(x) = \int_1^{1/x} \frac{\ln(u)}{1+u^2} du = F(1/x)$$

(b) D'après ??,

$$\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0} F(y) = F(0) = \int_0^1 u(t) dt$$

Géométriquement, Γ_f a une asymptote horizontale (d'équation $y = F(0)$) en $+\infty$.

6. (a) Par intégration par parties en dérivant $\ln$:

$$I_k(x) = \frac{x^{k+1} \ln x}{k+1} - \frac{x^{k+1}}{(k+1)^2} + \frac{1}{(k+1)^2}.$$

(b) Soit $t > 0$. La somme apparaissant à droite est une somme géométrique de raison $-t^2 \neq 1$ donc :

$$\sum_{k=0}^n (-t^2)^k = \frac{1 - (-t^2)^{n+1}}{1 - (-t^2)}.$$

donc

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k t^{2k} + \frac{(-1)^{n+1} t^{2n+2}}{1 + t^2} = \frac{1}{1 + t^2}$$

(c) Soit x dans $]0, 1[$. Par linéarité de l'intégrale, en utilisant la relation précédente :

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_1^x \ln(t) \left(\sum_{k=0}^n (-1)^k t^{2k} + \frac{(-1)^{n+1} t^{2n+2}}{1 + t^2} \right) dt \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \int_1^x t^{2k} \ln(t) dt + (-1)^{n+1} \int_1^x \frac{t^{2n+2} \ln(t)}{1 + t^2} dt. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$F(x) - \sum_{k=0}^n (-1)^k I_{2k}(x) = (-1)^{n+1} \int_1^x \frac{t^{2n+2} \ln(t)}{1 + t^2} dt$$

On passe aux valeurs absolues :

$$\left| F(x) - \sum_{k=0}^n (-1)^k I_{2k}(x) \right| = \left| \int_1^x \frac{t^{2n+2} \ln(t)}{1 + t^2} dt \right|.$$

On veut utiliser l'inégalité triangulaire pour les intégrales, mais attention : ici $x < 1$ donc les bornes ne sont pas 'dans le bon sens'. On remarque aussi que $\ln(t) \leq 0$ pour t entre x et 1 et que $\frac{1}{1 + t^2} \leq 1$. Ainsi :

$$\begin{aligned} \left| \int_1^x \frac{t^{2n+2} \ln(t)}{1 + t^2} dt \right| &= \int_x^1 \frac{t^{2n+2} |\ln(t)|}{1 + t^2} dt \\ &= \int_x^1 t^{2n+2} |\ln(t)| dt \\ &\leq \int_x^1 t^{2n+2} (-\ln(t)) dt \\ &\leq I_{2n+2}(x). \end{aligned}$$

On a bien :

$$\forall x \in]0, 1[, \left| F(x) - \sum_{k=0}^n (-1)^k I_{2k}(x) \right| \leq I_{2n+2}(x)$$

(d) D'après ??

$$I_{2n+2}(x) = \frac{x^{2n+3}((2n+3) \ln x - 1)}{(2n+3)^2} + \frac{1}{(2n+3)^2} \leq \frac{1}{(2n+3)^2}.$$

En effet, $x \in]0, 1[$ donc $(2n+3)\ln x - 1 < 0$. Donc :

$$\forall x \in]0, 1[, \left| F(x) - \sum_{k=0}^n (-1)^k I_{2k}(x) \right| \leq \frac{1}{(2n+3)^2}.$$

Attention, on ne peut pas appliquer ceci directement en 0. Cependant on peut faire tendre x vers 0, puisque :

— F est continue en 0 d'après ??;

— Par croissance comparée, $\lim_{x \rightarrow 0} I_{2k}(x) = \frac{1}{(2k+1)^2}$ d'après l'expression obtenue en ??.

On obtient alors :

$$\left| F(0) - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \right| \leq \frac{1}{(2n+3)^2}$$