Séries numériques

1 Les séries. Définitions - premières propriétés

1.1 Définitions

Définition 1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. On appelle série de terme général u_n, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

On la note $\sum u_n$.

Pour $n \in \mathbb{N}$: u_n est le terme d'indice n de la série, S_n est la somme partielle de rang n de la série.
Si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel S, on dit que la série de terme général u_n est convergente, de somme S. On note alors :

$$S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$$

Si la série de terme général u_n ne converge pas, on dit que la série est divergente.
Déterminer la nature d'une série, c'est déterminer si elle est convergente ou divergente.

Remarques :

- ⋆ Étudier une série de terme général u_n, c'est en fait étudier la suite des sommes partielles.
- ⋆ La série est divergente si la suite des sommes partielles est divergente.
- ⋆ Si la suite (u_n) n'est définie qu'à partir du rang n_0, il faut considérer $S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$ pour $n \geqslant n_0$.

Définition 2. Si la série de terme général u_n converge et a pour somme S, on appelle reste d'indice n le réel $R_n = S - S_n$. On a alors : $\lim_{n\to+\infty} R_n = 0$, et $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

Exemples 1.

1. *Nature de la série de terme général* $u_n = \dfrac{1}{3^n}$ *(*$n \in \mathbb{N}$*)*
2. *Nature de la série de terme général* $u_n = \dfrac{1}{n}$ *(*$n \in \mathbb{N}^*$*) (série* harmonique*)*
3. *Nature de la série de terme général* $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$ *(*$n \in \mathbb{N}^*$*)*

1.2 Propriétés

Proposition 1.
Si les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne diffèrent que par un nombre fini de termes, alors les séries $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ sont de même nature.

Remarque. *La nature d'une série ne dépend donc pas de ses premiers termes, ce qui explique qu'on puisse considérer des critères de convergence portant sur les termes u_n "à partir d'un certain rang" de la série.*

⚠ Si la nature de la série ne dépend pas des premiers termes, sa somme, elle (si elle existe), en dépend!

Exemple 2. Les série $\sum\limits_{k\geqslant 1} \frac{1}{3^k}$ *et* $\sum\limits_{k\geqslant 0} \frac{1}{3^k}$

Théorème 2 (Condition nécessaire de convergence d'une série)**.**
Si la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Conséquence : si (u_n) ne converge pas vers 0, on peut directement conclure que la série de terme général u_n ne converge pas.

Définition 3. Lorsque le terme général u_n d'une série ne converge pas vers 0, on dit que la série diverge grossièrement

Exemple 3. Considérons la série de terme général $\dfrac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{e^{1/n}-1}$.

⚠ La réciproque du théorème est fausse ! Il suffit de considérer l'exemple de la série harmonique.

On commence donc toujours par s'assurer que le terme général tend bien vers 0 mais on garde en tête que, s'il suffisait que le terme général tende vers 0, on n'aurait pas un chapitre complet pour étudier la nature de ces suites !!

Proposition 3 (série télescopique)**.**
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de nombres réels, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par
$$v_n = u_{n+1} - u_n.$$
La série $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ converge si et seulement si, la suite (u_n) converge.

En cas de convergence, on a : $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} v_k = \left(\lim\limits_{n\to+\infty} u_n\right) - u_0$.

Exemple 4. Quelle est la nature de la série de terme général $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ *?*

Théorème 4.
Si on dispose de deux séries de termes généraux respectifs u_n et v_n convergentes et de sommes respectives S et S', alors
•la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}(u_n+v_n)$ est convergente de somme $S+S'$.
•La série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\lambda u_n$ $(\lambda\in\mathbb{R})$ est convergente, de somme λS.
L'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que la série de terme général u_n converge est donc un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles.

Remarque : Si les séries de termes généraux u_n et v_n divergent, on ne peut *a priori* rien en déduire sur la série de terme général u_n+v_n.
Comme pour les suites, on a cv+cv=cv, cv+div=div et div+div= ?

Exemple 5. *Pour tout* $n\in\mathbb{N}^\star$, *on pose* $u_n=\dfrac{1}{n}$, $v_n=-\dfrac{1}{n}$, $w_n=\dfrac{1}{2n}$, *que dire de la nature des séries de terme général* u_n+v_n *et* u_n+w_n *?*

2 Séries de référence

2.1 Séries géométriques - séries géométriques dérivées

Proposition 5.
Soit q un réel. La série $\sum\limits_{n\geqslant 0}q^n$ converge si et seulement si $|q|<1$, et dans ce cas, on a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}q^k=\frac{1}{1-q}$$

On appelle **série géométrique de raison** q, une série de la forme $\sum\limits_{n\geqslant n-0}q^n$

Proposition 6.
Soit q un réel. La série $\sum\limits_{n\geqslant 0}nq^{n-1}$ $(n\in\mathbb{N}^*)$ converge si et seulement si $|q|<1$, et dans ce cas
:

$$\sum_{k=1}^{+\infty}kq^{k-1}=\frac{1}{(1-q)^2}$$

Cette série est appelée **série géométrique dérivée**.

Remarque Cette série est classique mais pas au programme, vous devez donc calculer sa somme si vous souhaitez l'utiliser.

2.2 Série exponentielle

Théorème 7.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{n \geqslant 0} \frac{x^n}{n!}$, appelée <u>série exponentielle</u>, est convergente, et :

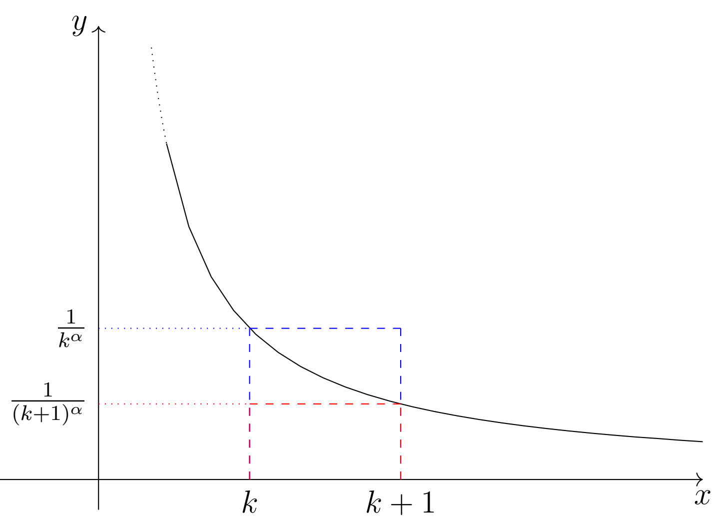
$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$$

2.3 Séries de Riemann

Définition 4. On appelle **série de Riemann** toute série de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$ $(n \in \mathbb{N}^*,\ \alpha \in \mathbb{R})$.

Théorème 8.
La série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge <u>si et seulement si</u> : $\boxed{\alpha > 1}$.

Le résultat découle de ce que l'on appelle une comparaison série/intégrale. L'idée est d'encadrer l'intégrale entre deux rectangles puis utiliser cet encadrement pour encadrer le terme général de la série entre deux intégrales. Considérons la figure suivante:



3 Séries à termes positifs

3.1 Généralités

Théorème 9.
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite à termes <u>positifs</u>, alors la série $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ converge si et seulement si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de ses sommes partielles est majorée.

Remarque : Si la série converge, alors : $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n \leqslant S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$

Exemple 6. *On considère la série de terme général* $\dfrac{1}{n^2}$

3.2 Règles de comparaison des séries à termes positifs

Théorème 10.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. On suppose qu'à partir d'un certain rang n_0: $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$
Alors :

- Si la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ converge, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge, et $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} u_n \leqslant \sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} v_n$
- Si la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ diverge, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ diverge.

Exemples 7.

1. *On cherche à étudier la série de terme général* $\dfrac{1+(-1)^n}{n^2}$.
2. *On cherche à étudier la série de terme général* $\dfrac{2+\cos(n)}{n}$.

Proposition 11.
Soient (u_n) est (v_n) deux suites réelles positives à partir d'un certain rang.

- Si $u_n = o(v_n)$ et si la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ converge, alors la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge.
- Si $v_n = o(u_n)$ et si la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ diverge, alors la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ diverge. Autrement dit, si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = +\infty$ et la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ diverge, alors la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ diverge.
- Si $u_n \sim v_n$, alors les séries $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ sont de même nature.
- Si $u_n = O(v_n)$ et si la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ converge, alors la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge.

Remarques:

- Les deux premiers points restent vrais si on a seulement un $O(\ )$ (et pas un $o(\ )$).
- La reformulation du deuxième point vient du fait que, comme les termes généraux sont positifs, si on a $v_n = o(u_n)$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{v_n}{u_n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = +\infty$.
- Les séries de Riemann servent souvent de référence pour étudier la nature d'une série à termes positifs. De même, les premiers points de la proposition seront généralement appliqués avec les séries de Riemann ainsi :
  - S'il existe $\alpha > 1$ tel que $n^\alpha u_n \to 0$ alors u_n est le terme général d'une série convergente. En effet, on a alors $u_n = o\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)$ avec $\dfrac{1}{n^\alpha}$ terme général d'une série convergente.

– S'il existe $\alpha \leqslant 1$ tel que $n^\alpha u_n \to +\infty$, alors u_n est le terme général d'une série divergente. En effet, $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\frac{1}{n^\alpha}} = +\infty$ et la série de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$ diverge vers $+\infty$ donc il est en de même pour la série de terme général u_n.

Exemples 8.

1. *Étude de la série de terme général* $u_n = \dfrac{\ln(n)}{n^2}$.
2. *Étude de la série de terme général* $\dfrac{1}{\sqrt{n}\ln(n)}$.
3. *Déterminer la nature de la série de terme général* $e^{1/n^2} - 1$.

Proposition 12.
Si u_n est équivalent à v_n ET (v_n) est de signe constant à partir d'un certain rang, alors les séries sont de même nature.

Exemples 9.

1. *Déterminer la nature de la série de terme général* $u_n = -\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) - \cos\dfrac{1}{n} + e^{1/n}$.
2. *Déterminer la nature de la série de terme général* $u_n = e^{1/\sqrt{n}} - 1 + \ln\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$.
3. *Déterminer la nature de la série de terme général* $v_n = n\left(1 - \cos\dfrac{1}{n}\right)$.
4. *On peut même conclure si on n'a pas d'équivalent : Considérons la série de terme général* $u_n = \tan\dfrac{1}{n} - \sin\dfrac{1}{n}$.

⚠ Si on trouve un équivalent de signe non constant, on ne peut rien conclure !!!!

Exemple 10. *Nous ferons un exemple dans le td avec la série de terme général* $\sqrt{1 + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1$.

4 Séries absolument convergentes

Définition 5. La série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est dite absolument convergente si et seulement si la série $\sum_{n\geqslant 0} |u_n|$ est convergente.
Une série qui est convergente, mais pas absolument convergente, est dite semi-convergente.

Exemples 11.

1. *la série harmonique alternée de terme général* $u_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ *est semi-convergente.*
2. *Il est aussi possible de dégainer le dernier point de la proposition 12 quand on ne veut pas s'embarrasser de calculs inutiles. Si on vous demande la nature de la série de terme général* $u_n = e^{1/n} - \sqrt{1 + \dfrac{2}{n}}$

Remarque: Le raisonnement précédent est le même pour montrer la convergence d'une suite de terme général $(-1)^k a_k$ avec (a_k) une suite $\underline{\text{décroissante et qui tend vers 0}}$ (ici $a_k = \dfrac{1}{k}$). On appelle ce critère, le critère des séries alternées et il est hors programme. Il vous faudra donc démontrer qu'une telle série converge en utilisant le raisonnement ci-dessus (grand classique donc !).

> **Proposition 13.**
> Toute série absolument convergente, est convergente.

Exemple 12. *Étude de la série de terme général* $u_n = \dfrac{\sin(n)}{n^2}$.

Remarque: la règle de $n^\alpha u_n \to 0$ pour $\alpha > 1$ entraine la convergence de $\sum u_n$ même si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas de signe constant.

Exemple 13. *série de terme général* $u_n = \dfrac{\cos n}{n^2}$

5 Séries à termes complexes

Comme pour les suites, on peut se ramener à l'étude de suites réelles en considérant les parties réelles et imaginaires.

Définition 6. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexes, on dit que la série $\sum u_n$ converge si la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Si c'est le cas, on appelle somme de la série et on note $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ la limite de la suite des sommes partielles.

> **Proposition 14.**
> Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexes, alors la série $\sum u_n$ converge si et seulement si les séries réelles $\sum \mathcal{R}e(u_k)$ et $\sum \mathcal{I}m(u_k)$ convergent. Si c'est le cas, on a
>
> $$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathcal{R}e(u_k) + i\sum_{k=0}^{+\infty} \mathcal{I}m(u_k)$$

Définition 7. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexes, on dit que la série $\sum u_n$ converge absolument si $\sum |u_n|$ converge.

On montre, comme dans le cas réel, que la convergence absolue implique la convergence (la réciproque étant, bien sûr, toujours fausse).