Lycée du Parc
PCSI 842 Année 2024-2025
DS 9

Devoir d'entrainement 9.

Exercice 1 (sujet 1). corrigé

On donne l'équivalent de Stirling :

$$n! \sim \frac{n^n\sqrt{2\pi n}}{e^n}$$

Dans tout ce problème, x désigne un nombre réel. On pose $a_n = \frac{(nx)^n}{n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Rappeler sans démonstration une condition nécessaire et suffisante de convergence de la série de terme général $\dfrac{1}{n^\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. On suppose $|x| > 1/e$. Vérifiez que la série $\sum a_n$ diverge grossièrement.
3. On suppose $|x| < 1/e$.
   (a) Montrez que la série $\sum a_n$ converge absolument
   (b) Qu'en déduisez-vous ?
4. On suppose que $x = 1/e$. Quelle est la nature de la série $\sum a_n$?
5. On suppose que $x = -1/e$. On pose $b_n = (-1)^n a_n$ pour tout entier $n > 0$.
   (a) Vérifiez que la suite $(b_n)_n$ est positive et converge vers 0.
   (b) Montrer que pour tout $x \in]-1, \infty[$, $\ln(1+x) \leqslant x$.
   (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1}/b_n = \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.
   (d) En déduire que $(b_n)_n$ est décroissante
   (e) On pose $S_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k b_k$.
   Montrez que les suites $(S_{2p})_p$ et $(S_{2p+1})_p$ sont adjacentes.
   (f) Déduisez-en que la série $\sum a_n$ converge.
   (g) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \ln(1+a_n)$. Quelle est la nature de la série $\sum v_n$?
6. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $a_n(x) = \dfrac{(nx)^n}{n!}$ et lorsque cela a un sens, on pose $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$.
   (a) Sur quel intervalle maximal J la fonction S est-elle définie ?
   On pose $I = J \cap \mathbb{R}^+$.
   (b) Vérifiez que S est croissante sur I.
   (c) Montrez que S tend vers $+\infty$ en $1/e$.
   (*Indication* : on montrera que S n'est majorée par aucun réel $M > 0$.)

Exercice 2 (sujet 1). corrigé

Les quatre sous-parties peuvent être traitées de façon indépendantes. Néanmoins, la partie C est utile pour la fin de la partie D.

Partie A

On travaille dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel usuel $\mathbb{R}^2$ et on considère l'application

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (6x-4y, 9x-6y) \end{array}$$

1. Démontrer que l'application f est linéaire.
2. (a) Déterminer une base du noyau et une base de l'image de f.

   (b) Démontrer que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f)$.

3. Démontrer que $f \circ f = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^2)}$.

On pose maintenant

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & \frac{1}{22}\cdot(2y,-x) \end{array} \right.$$

C'est une application linéaire, on ne demande pas de le vérifier.

4. (a) Démontrer que g est un automorphisme.

   On pose $e_1 = (1,0)$ et $e_2 = (0,1)$.

   (b) Calculer $(f\circ g + g\circ f)(e_1)$ et $(f\circ g + g\circ f)(e_2)$.

   (c) En déduire que $f\circ g + g\circ f = id_{\mathbb{R}^2}$.

Partie B

On pose $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non nul de dimension finie notée n. Soit $(f,g) \in (\mathscr{L}(E))^2$ tels que

$$\begin{array}{ll} (1) & f\circ f = 0_{\mathscr{L}(E)} \\ (2) & f\circ g + g\circ f = id_E \end{array}$$

5. (a) Démontrer que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$.

   (b) Démontrer que $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Im}(f)$.

   (c) Conclure. Puis démontrer que n est pair.

6. Démontrer que $f\circ g\circ f = f$ puis que $f\circ g$ est un projecteur.

   On pose $F = \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f)$ puis $G = g(F)$.

7. Démontrer que $F = \mathrm{Im}(f\circ g)$ et que $G = \mathrm{Ker}(f\circ g)$.
8. En déduire que F et G sont supplémentaires dans E.

Partie C

On pose $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit E un K-espace vectoriel non nul de dimension finie paire notée n. On pose $m = \dfrac{n}{2}$. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ de rang m tel que $f\circ f = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

9. (a) Quelles sont les dimensions du noyau et de l'image de f ?

   (b) Démontrer que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f)$.

On pose $F = \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f)$ et soit G un supplémentaire de F dans E. On introduit l'application linéaire

$$h : \left\{ \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right.$$

Cette application h est bien définie car $\forall x \in G \subset E, f(x) \in \mathrm{Im}(f) = F$ et elle est linéaire car f est linéaire.

10. (a) Quelle est la dimension de G?
    (b) Démontrer que $\mathrm{Ker}(h) = \{0_E\}$.
    (c) Démontrer que h est un isomorphisme.

Soit $\mathscr{B}_1 = (e_1, \dots, e_m)$ une base de F et $\mathscr{B}_2 = (e'_1, \dots, e'_m)$ une base de G. Soit g l'endomorphisme de E défini par

$$\forall i \in [\![1, m]\!],\ g(e_i) = h^{-1}(e_i) \quad \text{et} \quad \forall j \in [\![1, m]\!],\ g(e'_j) = 0_E$$

11. Démontrer que $f \circ g + g \circ f = id_E$.

Partie D

On travaille dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel usuel $\mathbb{R}_5[X]$. On considère l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_5[X] & \to & \mathbb{R}_5[X] \\ P(X) & \mapsto & P'''(X) \end{array}$$

12. (a) Sans justifier, donner une base de $\mathbb{R}_5[X]$ et sa dimension.
    (b) Justifier que f est linéaire et simplifier $f \circ f$.
    (c) Soit $P(X) = \sum_{k=0}^{5} a_k X^k \in \mathbb{R}_5[X]$. Calculer $f(P(X))$.
    (d) On pose $F = \mathrm{Ker}(f)$. Démontrer que $F = \mathbb{R}_2[X]$ puis calculer le rang de f.
    On pose $G = \mathrm{Vect}(X^3, X^4, X^5)$.
13. Justifier que G est un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}_5[X]$.

Comme dans la sous-partie précédente, on pose

$$h : \left\{ \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & F \\ P(X) & \longmapsto & f(P(X) \end{array} \right.$$

14. Justifier que h est un isomorphisme puis déterminer $h^{-1}(1)$, $h^{-1}(X)$ et $h^{-1}(X^2)$.
15. Justifier qu'il existe un endomorphisme g de $\mathbb{R}_5[X]$ tel que $f \circ g + g \circ f = id_{\mathbb{R}_5[X]}$.

Exercice 3 (sujet 2). corrigé

On admet que :

Si une suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers l, alors, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} u_k = l$ (théorème de Césaro). Dans toute la suite, on considère une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de réels positifs telle que la série de terme général x_n converge. Pour tout entier naturel n non nul, on note :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k,\ T_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} S_k \text{ et } y_n = \frac{1}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n} i x_i.$$

Partie 1 : Résultats préliminaires

1. On souhaite montrer que pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strictement positive, on a

$$\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{1/n} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \text{ (inégalité arithmético-géométrique)}$$

   (a) Montrer que $\forall x\in\mathbb{R},\ e^x \geqslant 1+x$.

   (b) On pose $A = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$. Montrer que pour tout $k\in [\![1,n]\!]$,

$$\frac{a_k}{A} \leqslant exp\left(\frac{a_k}{A}-1\right).$$

   (c) En déduire l'inégalité arithmético-géométrique.

2. On souhaite montrer le résultat suivant :
étant donné deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ équivalentes et à termes positifs, telles que $\sum u_n$ diverge, on a

$$\sum_{k=1}^{n} u_k \sim \sum_{k=1}^{n} v_k$$

   (a) Montrer que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que

$$\forall k \geqslant N, (1-\epsilon)v_k \leqslant u_k \leqslant (1+\epsilon)v_k.$$

   (b) En déduire qu'il existe deux constantes C et C' telles que $\forall n \geqslant N$,

$$C' + (1-\epsilon)\sum_{k=1}^{n} v_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} u_k \leqslant C + (1+\epsilon)\sum_{k=1}^{n} v_k.$$

   (c) Montrer qu'il existe N_0 tel que $\forall n \geqslant N_0$,

$$C \leqslant \epsilon\sum_{k=1}^{n} v_k \text{ et } C' \geqslant -\epsilon\sum_{k=1}^{n} v_k.$$

   (d) En déduire que $\sum\limits_{k=1}^{n} u_k \sim \sum\limits_{k=1}^{n} v_k$.

3. (a) Montrer que :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} y_k = \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}(n+1-i)x_i.$$

   (b) En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $\sum\limits_{k=1}^{n} y_k = T_n$.

(c) Établir que la série de terme général y_n converge et que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} y_n = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n.$$

4. Dans cette question, on pose, pour tout entier naturel n non nul :

$$z_n = \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{1/n}.$$

On se propose de montrer que la série de terme général z_n converge et que sa somme vérifie :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n \leqslant e \sum_{n=1}^{+\infty} x_n.$$

(a) Justifier que, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$z_n = \frac{1}{(n!)^{1/n}} \left(\prod_{k=1}^{n} k x_k\right)^{1/n}.$$

(b) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ z_n \leqslant \frac{n+1}{(n!)^{1/n}} y_n.$$

(c) Montrer que, pour tout réel x positif, on a $\ln(1+x) \leqslant x$.

(d) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leqslant e.$$

(e) Établir que pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\frac{(n+1)^n}{n!} = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k.$$

(f) Montrer enfin que la série de terme général z_n converge et que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n \leqslant e \sum_{n=1}^{+\infty} x_n.$$

5. (a) En utilisant une comparaison séries/intégrales, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\, n \geqslant 2,\, -1+\frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant -1+\frac{1}{n}+\frac{\ln n}{n}.$$

   (b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{n}\right)$ puis un équivalent de $\left(\frac{1}{n!}\right)^{1/n}$

6. Soit N un entier naturel non nul quelconque. On considère une suite particulière que l'on note $(x_n(N))_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$x_n(N) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } n \in [\![1, N]\!] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

   On pose, comme à la deuxième question :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\, z_n(N) = \left(\prod_{k=1}^{n} x_k(N)\right)^{1/n}.$$

   (a) Justifier que les séries $\sum x_n(N)$ et $\sum z_n(N)$ convergent et écrire $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n(N)$ et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} z_n(N)$ sous forme de sommes finies.

   (b) En déduire que :

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{\sum\limits_{n=1}^{+\infty} z_n(N)}{\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n(N)} = e.$$

7. Conclure que e est la plus petite des constantes λ telles que, pour toute suite (x_n) de réels positifs :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n \leqslant \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} x_n.$$

8. **Bonus :** Démontrer le lemme de Cesaro admis en début de problème.

Exercice 4 (sujet 2). *corrigé*

1. Soit u et v deux endomorphismes de E qui commutent (c'est-à-dire tels que $u \circ v = v \circ u$). Démontrer que $\ker(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont stables par v.

   Dans la suite de l'exercice, u désigne un endomorphisme de E tel que $u^2 = 0$.

2. Démontrer que $\mathrm{Im}(u)$ est inclus dans $\ker(u)$.
3. Montrer que $\mathrm{rg}(u) \leqslant \dfrac{n}{2}$.
4. On suppose ici que $n = 2$ et que u est non nul.
   (a) Démontrer qu'il existe une droite D de E telle que $\ker(u) = \mathrm{Im}(u) = D$.
   (b) Soit v un endomorphisme de E tel que $v^2 = 0$ et $u \circ v = v \circ u$.
      i. Démontrer que $v(D) \subset D$.
      ii. Démontrer que $u \circ v = 0$.
   (c) Soit v et w deux endomorphismes de E tels que $v^2 = 0$, $w^2 = 0$, $u \circ v = v \circ u$ et $u \circ w = w \circ u$. Démontrer que $v \circ w = 0$.
5. On revient au cas général. Soit $m \geqslant 2$ un entier naturel. Soit $u_1, \ldots, u_m$ des endomorphismes de E tels que :
$$\forall i, j \in [\![1, m]\!],\ u_i^2 = 0 \qquad \text{et} \qquad u_i \circ u_j = u_j \circ u_i.$$
   On pose $F_1 = \mathrm{Im}(u_1)$ et, pour chaque entier $i \in [\![2, m]\!]$,
$$F_i = \mathrm{Im}(u_1 \circ u_2 \circ \cdots \circ u_{i-1} \circ u_i).$$
   (a) Démontrer que, pour tout entier $i \in [\![1, m-1]\!]$, F_i est un sous-espace vectoriel de E, stable par u_{i+1}.
   (b) A l'aide de la question précédente et de la question 3, montrer que, pour tout entier $i \in [\![1, m]\!]$, $\dim(F_i) \leqslant \dfrac{n}{2^i}$.
   (c) Dans le cas où $n < 2^m$, démontrer que $u_1 \circ u_2 \circ \cdots \circ u_m = 0$.

Correction du devoir d'entrainement n 9

Exercice 1 énoncé
Dans tout ce problème, x désigne un nombre réel.

On donne l'équivalent de Stirling :

$$n! \sim \frac{n^n\sqrt{2\pi n}}{e^n}$$

On pose $a_n = \frac{(nx)^n}{n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Vérifiez que la série $\sum a_n$ diverge grossièrement pour $|x| > 1/e$.

D'après l'équivalent de Stirling, $a_n \sim \frac{n^n x^n e^n}{n^n\sqrt{2\pi n}} = \frac{(xe)^n}{\sqrt{2\pi n}}$.

Si $|x| > 1/e$, $|xe| > 1$, et donc par croissances comparées, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|xe|^n}{\sqrt{2\pi n}} = \text{inf}$.

En particulier, (a_n) n'est pas de limite nulle : la série diverge donc grossièrement. Si vous minorer $|a_n|$ (et pas seulement a_n d'ailleurs) par le terme général d'une série divergente, vous montrez que $\sum |a_n|$ diverge donc ni que que $\sum a_n$ diverge, ni qu'elle diverge grossièrement.

2. (a) Montrez que la série $\sum a_n$ converge absolument pour $|x| < 1/e$ On reprend les calculs de la question précédente. $|a_n| \sim \frac{|xe|^n}{\sqrt{2\pi n}} = ø\frac{1}{n^2}$: en effet, $\frac{\frac{|xe|^n}{\sqrt{2\pi n}}}{\frac{1}{n^2}} = |xe|^n\sqrt{2\pi} n^{3/2} \to 0$, par croissances comparées (en utilisant l'hypothèse $|xe| < 1$).
   Comme $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente, par comparaison de séries à termes positifs, $\sum |a_n|$ converge, i.e. $\sum a_n$ converge absolument.
   Donc $\sum a_n$ converge.

   (b) On en déduit que la série $\sum a_n$ converge car c'est une série absolument convergente.

3. On suppose que $x = 1/e$. Quelle est la nature de la série $\sum a_n$?

Si $x = \frac{1}{e}$, $a_n \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$. $\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$ est à une constante multiplicative près le terme général d'une série de Riemann divergente.

Donc par comparaison de séries à termes positifs, $\sum a_n$ diverge.

N'oubliez pas de préciser que a_n (ou son équivalent) est positif!

4. On suppose que $x = -1/e$. On pose $b_n = (-1)^n a_n$ pour tout entier $n > 0$.

   (a) Vérifiez que la suite $(b_n)_n$ est positive et converge vers 0.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = (-1)^n a_n = (-1)^n \frac{n^n(-1/e)^n}{n!} = \frac{n^n}{e^n n!}$ – donc $b_n \geqslant 0$.
La disjonction de cas pour montrer que b_n est positif c'est poussif De plus, $b_n \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$, qui est de limite nulle, donc (b_n) également.

   (b) Montrer que pour tout $x \in]-1, \infty[$, $\ln(1+x) \leqslant x$.

L'égalité est vraie si $x = 0$. On suppose $x \neq 0$ et $x > -1$. Alors $\dfrac{\ln(1+x)}{x}$ est un taux d'accroissement.

Si $x>0$, il existe $c\in]0,x[$ tel que $\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\dfrac{1}{1+c}\leqslant 1$. En multipliant par x qui est positif, on obtient l'inégalité souhaitée. Si $x<0$, il existe $d\in]x,0[$ tel que $\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\dfrac{1}{1+d}\geqslant 1$. En multipliant par x qui est négatif, l'inégalité chance de sens et on obtient l'inégalité souhaitée. On peut aussi faire une étude de fonction, ou bien dire que la fonction exponentielle est convexe donc au-dessus de ses tangentes et, par croissance de l'exponentielle, on obtient l'inégalité souhaitée.

Je suis surprise du nb de personnes qui n'ont pas pris les points de cette question, en écrivant n'importe quoi, en bâclant le TAF ou en ne la traitant pas (pourquoi???)

(c) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $b_{n+1}/b_n=\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. En déduire que $(b_n)_n$ est décroissante

---

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\frac{b_{n+1}}{b_n}=-\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n!((n+1)/e)^{n+1}}{(n+1)!(n/e)^n}=\frac{(n+1)^n}{n^n e}=\frac{1}{e}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Or $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\exp(n\ln(1+\frac{1}{n}))\leqslant\exp(n.1/n)=e$ d'après la question précédente, en utilisant la croissance de exp.

On a donc $\frac{b_{n+1}}{b_n}\leqslant 1$, et (b_n) étant à termes positifs, elle est décroissante.

Le quotient inférieur à 1 implique la décroissance CAR elle est à termes positifs!!!!

(d) On pose $S_n=\sum_{k=1}^n(-1)^k b_k$.
Montrez que les suites $(S_{2p})_p$ et $(S_{2p+1})_p$ sont adjacentes.

— Pour tout $p\in\mathbb{N}^*$, $S_{2(p+1)}-S_{2p}=(-1)^{2p+2}b_{2p+2}+(-1)^{2p+1}b_{2p+1}=b_{2p+2}-b_{2p+1}\leqslant 0$ par décroissance de (b_n).
Donc (S_{2p}) est décroissante.
— De même, on montre que (S_{2p+1}) est croissante.
— Pour tout $p\in\mathbb{N}^*$, $S_{2p+1}-S_{2p}=(-1)^{2p+1}b_{2p+1}$ qui est de limite nulle car (b_p) l'est.

Les suites sont donc bien adjacentes.

pourtant j'avais bien dit que c'était classique!

(e) Déduisez-en que la série $\sum a_n$ converge.

D'après la question précédente, $(S_{2p})_{p\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2p+1})_{p\in\mathbb{N}}$ convergent vers une même limite, donc $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge également vers cette limite. Par ailleurs, on remarque que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $S_n=\sum\limits_{k=1}^n a_k$ donc la série $\sum a_n$ converge.

Trois choses à dire :
— les suites étant adjacentes, elles ont même limite
— Comme on a les indices pairs et impairs, la suite S_n converge
— Remarquer que S_n est la somme partielle de la série $\sum a_n$.

Attention, l'existence de la limite de (S_n) provient du fait que l'on a convergence <u>vers la même limite</u> des suites extraites d'indices pairs et impairs

(f) On a vu que $a_n\to 0$, on écrit donc

$$\ln(1+a_n)=a_n-\frac{a_n^2}{2}+O(a_n^3).$$

On a vu que $\sum a_n$ converge. On a $|a_n|\sim\dfrac{1}{\sqrt{2\pi n}}$ donc $\sum|a_n|^3$ converge par comparaison à une série de Riemann et $\sum a_n^3$ est donc une série convergente. Enfin, $a_n^2\sim\dfrac{1}{2\pi n}$ et $\sum\dfrac{1}{2\pi n}$ est le terme général POSITIF d'une série divergente. On en déduit que $\sum v_n$ diverge (bien que son terme général soit équivalent à a_n, terme général d'une série convergente).

La plupart de ceux qui ont remarqué $v_n \sim a_n$ m'ont ensuite dit que a_n était positif, ce qui est très faux, c'est b_n qui l'est, a_n change de signe.

5. On pose $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ où $a_n(x) = \frac{(nx)^n}{n!}$, pour tout $x \in [0, 1/e[$.

   (a) Sur quel intervalle maximal $I \subset \mathbb{R}^+$ la fonction S est-elle définie ?

D'après les questions 1, 2 et 3, l'intervalle voulu est $\left[-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right[$.

   (b) Vérifiez que S est croissante sur I.

Pour tout $x, y \in [0, 1/e[$, si $x \leqslant y$, on a $a_n(x) \leqslant a_n(y)$.
En sommant, on en déduit que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{n=1}^{N} a_n(x) \leqslant \sum_{n=1}^{N} a_n(y)$.
En passant à la limite lorsque $N \to$ inf, on obtient $S(x) \leqslant S(y)$.
S est donc croissante sur $[0, 1/e[$.

   (c) ($\star$) Montrez que S tend vers $+\infty$ en $1/e$. (*Indication* : on montrera que S n'est majorée par aucun réel $M > 0$.)

D'après la question précédente et le théorème de la limite monotone, il suffit de montrer que S n'est pas majorée au voisinage de $\frac{1}{e}$.
Soit $M > 0$. D'après la question 3, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sum_{n=1}^{N} a_n(1/e) \geqslant 2M$.
Par continuité de $x \mapsto \sum_{n=1}^{N} a_n(x)$ en $x = 1/e$ (il s'agit d'une somme finie de fonctions puissances – donc continues), pour x assez proche de $1/e$, $\left|\sum_{n=1}^{N} a_n(x) - \sum_{n=1}^{N} a_n(1/e)\right| \leqslant M$.
On en déduit par inégalité triangulaire que, pour x assez proche de $1/e$,
$\sum_{n=1}^{N} a_n(x) \geqslant M$. On a donc $S(x) = \sum_{n=1}^{\text{inf}} a_n(x) \geqslant \sum_{n=1}^{N} a_n(x) \geqslant M$.
S est donc non-majorée au voisinage de $1/e$, d'où le résultat.

Exercice 2 énoncé
Partie A

On travaille dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel usuel $\mathbb{R}^2$ et on considère l'application

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (6x-4y, 9x-6y) \end{array}$$

1. *Démontrer que l'application f est linéaire.*
Soit $(U,V) \in (\mathbb{R}^2)^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$. On pose $U = (x,y)$, $V = (x',y')$, on a alors

$$\begin{aligned} f(\lambda U + V) &= f\left(\lambda x + x', \lambda y + y'\right) \\ &= \left(6(\lambda x + x') - 4(\lambda y + y'), 9(\lambda x + x') - 6(\lambda y + y')\right) \\ &= \left(\lambda 6x + 6x' - 4\lambda y - 4y', \lambda 9x + 9x' - \lambda 6y - 6y'\right) \\ &= \lambda(6x-4y, 9x-6y) + (6x'-4y', 9x'-6y') \\ &= \lambda f(U) + f(V) \end{aligned}$$

f est donc bien linéaire.
sautez l'avant dernière ligne va juste mettre le doute : on vous demande de montrer qu'elle est linéaire, montrez-le sans sauter d'étapes.

2. (a) *Déterminer une base du noyau et une base de l'image de f.*
Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, alors

$$(x,y) \in \mathrm{Ker}(f) \Leftrightarrow f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow 6x-4y = 0 = 9x-6y \Leftrightarrow 3x = 2y$$

On a donc
$$\mathrm{Ker}(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 3x = 2y\} = \mathrm{Vect}\left((2,3)\right).$$

Une base de $\mathrm{Ker}(f)$ est la famille ne contenant que le vecteur $(2,3)$.
?
Si vous commencez la démonstration avec " Soit $X \in \mathrm{Ker}(f)$", vous n'obtiendrez qu'une inclusion. Vous devez raisonner par équivalence ET raisonner par équivalence jusqu'au bout. Attention toutefois à ne pas écrire une dernière ligne "$\Leftrightarrow \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(2,3)$ " qui n'est pas du tout équivalente aux précédentes. C'est juste la conclusion de votre successions d'équivalences (et je pense que vous le savez, vous aviez juste la flemme d'écrire " donc on a montré $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(2,3)$".)
J'ai été très étonnée du nb d'erreurs sur la conclusion de cette question. Une base de $\ker(f)$ ne contient qu'un vecteur (de $\mathbb{R}^2$ puisque $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathbb{R}^2$!) Par le théorème du rang, on sait que $\mathrm{Im}(f)$ est de dimension 1, il suffit donc d'en donner un élément non nul. On a $f(1,0) = (6,9)$, on a donc $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left((6,9)\right) = \mathrm{Vect}\left((2,3)\right)$. Une base de $\mathrm{Im}(f)$ est la famille ne contenant que le vecteur $(2,3)$.

   (b) *Démontrer que* $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f)$.
D'après la question précédente, on a $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left((2,3)\right)$.

3. *Démontrer que $f \circ f = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^2)}$.*

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, alors $f(x,y) \in \mathrm{Im}(f)$. Or, $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f)$, on a donc $f(x,y) \in \mathrm{Ker}(f)$ c'est-à-dire $f \circ f(x,y) = (0,0)$. Ceci étant valable pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a donc $f \circ f = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^2)}$.

Là j'ai commencé à voir des applications linéaires $(f, f \circ f, id_E, 0_{\mathscr{L}(\mathscr{E})})$ égales à des vecteurs de E $(x, 0_E, f(x))$ ce qui n'a, bien entendu, aucun sens!)

On pose maintenant

$$g: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & \frac{1}{22} \cdot (2y, -x) \end{array}$$

C'est une application linéaire, on ne demande pas de le vérifier.

4. (a) *Démontrer que g est un automorphisme.*

Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, alors $f\left(-b,\frac{a}{2}\right)=\frac{1}{22}(a,b)$ donc $(-22b,11a)$ est un antécédent de (a,b) par g qui est donc surjective. Comme c'est un endomorphisme d'un espace-vectoriel de dimension finie, g est bijective.

endomorphisme ne suffit pas à justifier que "injective $\Rightarrow$ bijective", il faut préciser que l'on travaille en dimension finie

On pose $e_1=(1,0)$ et $e_2=(0,1)$.

(b) *Calculer $(f\circ g+g\circ f)(e_1)$ et $(f\circ g+g\circ f)(e_2)$.*

On a

— $f\circ g(e_1)=f\left(\frac{1}{22}(0,-1)\right)=\left(\frac{2}{11},\frac{3}{11}\right)$ et

— $g\circ f(e_1)=g(6,9)=\frac{1}{22}(18,-6)=\left(\frac{9}{11},-\frac{3}{11}\right)$.

— $f\circ g(e_2)=f\left(\frac{1}{22}(2,0)\right)=\left(\frac{6}{11},\frac{9}{11}\right)$ et

— $g\circ f(e_2)=g(-4,-6)=\frac{1}{22}(-12,4)=\left(-\frac{6}{11},\frac{2}{11}\right)$.

On a donc

$$\left(f\circ g+g\circ f\right)(e_1)=e_1 \text{ et } \left(f\circ g+g\circ f\right)(e_2)=e_2.$$

(c) *En déduire que $f\circ g+g\circ f=id_{\mathbb{R}^2}$.*

Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on a

$$\left(f\circ g+g\circ f\right)(x,y)=x\left(f\circ g+g\circ f\right)(e_1)+y\left(f\circ g+g\circ f\right)(e_2)=(x,y)$$

on a donc bien $f\circ g+g\circ f=id_{\mathbb{R}^2}$.

On pouvait aussi dire simplement, "par linéarité de f". **Partie B**

On pose $K=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non nul de dimension finie notée n. Soit $(f,g)\in(\mathscr{L}(E))^2$ tels que

$$\begin{array}{ll}(1) & f\circ f=0_{\mathscr{L}(E)}\\ (2) & f\circ g+g\circ f=id_E\end{array}$$

Attention!!! On a changé de partie, f n'est plus l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ explicité en partie A, c'est un endomorphisme d'un ev E que l'on ne connait pas!

5. (a) *Démontrer que* $\mathrm{Im}(f)\subset\mathrm{Ker}(f)$.

Soit $y\in\mathrm{Im}(f)$, montrons que $f(y)=0_E$. On sait qu'il existe $x\in E$, $f(x)=y$, on a alors $f(y)=f\circ f(x)=0_E$ puisque $f\circ f=0_{\mathscr{L}(E)}$. On a bien l'inclusion souhaitée.

(b) *Démontrer que* $\mathrm{Ker}(f)\subset\mathrm{Im}(f)$.

Soit $x\in\mathrm{Ker}(f)$, montrons que $x\in\mathrm{Im}(f)$. On sait que

$$x=f\circ g(x)+g\circ f(x)=f\circ g(x),$$

puisque $f(x)=0_E$. Or $g(x)\in E$, on a donc trouvé un antécédent $(g(x))$ de x par f, x est donc bien un élément de $\mathrm{Im}(f)$ ce qui montre l'autre inclusion.

Attention, quand vous écrivez " on veut montrer que $x\in\mathrm{Ker}(f)\Leftrightarrow f(x)=0_E$", vous écrivez que vous allez montrer une équivalence qui est évidente. On comprend que vous avez juste eu la flemme d'écrire " on veut montrer que $x\in\mathrm{Ker}(f)$, c'est-à-dire que $f(x)=0_E$ (mais ça énerve).

(c) *Conclure. Puis démontrer que n est pair.*

D'après les deux questions précédentes, on a montré l'égalité $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f)$ par double inclusion. De plus, d'après le théorème du rang, $\mathrm{rg}(f) + \dim(\mathrm{Ker}(f)) = n$, on a donc $2\dim(\ker(f)) = n$ donc n est pair.

6. *Démontrer que $f \circ g \circ f = f$ puis que $f \circ g$ est un projecteur.*

On applique f à l'égalité $f \circ g + g \circ f = id_E$, on obtient $f \circ f \circ g + f \circ g \circ f = f$ et, comme $f \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)}$, on a bien $f \circ g \circ f = f$.

Là encore, attention à ne pas écrire des $f(g)$, des $f = 0_E$ ou des $x = 0_{\mathscr{L}(\mathscr{E})}$ qui montrent que vous confondez les vecteurs et les applications.

On veut montrer que $f \circ g$ est un projecteur, on calcule donc $(f \circ g)^2$. On a

$$(f \circ g)^2 = \underbrace{f \circ g \circ f}_{=f} \circ g = f \circ g.$$

L'application $f \circ g$ est bien un projecteur.

On pose $F = \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f)$ puis $G = g(F)$.

7. *Démontrer que $F = \mathrm{Im}(f \circ g)$ et que $G = \mathrm{Ker}(f \circ g)$.*

On sait déjà que $\mathrm{Im}(f \circ g) \subset \mathrm{Im}(f)$ donc $\mathrm{Im}(f \circ g) \subset F$. Pour montrer l'inclusion réciproque, on va simplement montrer que pour tout $y \in F$, $f \circ g(y) = y$. Par propriété des projecteurs, on aura alors $y \in \mathrm{Im}(f \circ g)$.

Soit donc $y \in F$, alors il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. On a alors

$$f \circ g(y) = f \circ g \circ f(x) = f(x),$$

d'après la question précédente. On a donc bien $f \circ g(y) = y$ et $y \in \mathrm{Im}(f \circ g)$. Par double inclusion, on a l'égalité.

On raisonne, à nouveau, par double inclusion pour montrer l'égalité $G = \mathrm{Ker}(f \circ g)$. Soit $x \in \mathrm{Ker}(f \circ g)$, alors $f \circ g(x) = 0_E$ donc $x = g \circ f(x)$ puisque $f \circ g + g \circ f = id_E$. Or $f(x) \in F$, on a donc bien $x \in g(F)$ ce qui montre l'inclusion $\mathrm{Ker}(f \circ g) \subset g(F)$.

Soit maintenant $y \in g(F)$, alors il existe $x \in F$ tel que $y = g(x)$. On sait qu'il existe $a \in E$ tel que $x = f(a)$ donc $y = g \circ f(a) = a - f \circ g(a)$. On a alors

$$f \circ g(y) = f \circ g(a) - (f \circ g)^2(a) = 0_E,$$

puisque $f \circ g$ est un projecteur. Ainsi, $y \in \mathrm{Ker}(f \circ g)$ et on a bien l'égalité par double inclusion.

8. *En déduire que F et G sont supplémentaires dans E.*

On sait que le noyau et l'image d'un projecteur de E sont supplémentaires dans E, on a donc bien F et G supplémentaires dans E.

Certains ont redémontré que les espaces étaient supplémentaires. La somme des dimensions égales à E ne suffit absolument pas à affirmer que $F + G = E$. Il faut d'abord montrer que la somme est directe pour avoir $\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G)$ puis dire que $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$ montre que $F \oplus G$ et E ont même dimension et sont donc égaux.

On ne dit pas que " F et G recouvrent E", on dit $F + G = E$.

Partie C

On pose $K=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit E un K-espace vectoriel non nul de dimension finie paire notée n. On pose $m=\frac{n}{2}$. Soit $f\in\mathscr{L}(E)$ de rang m tel que $f\circ f=0_{\mathscr{L}(E)}$.

9. (a) *Quelles sont les dimensions du noyau et de l'image de f ?*
   Par hypothèse, $\dim(\mathrm{Im}(f))=m$ et, par le théorème du rang : $m+\dim(\mathrm{Ker}(f))=n=2m$. On en déduit que le noyau et l'image de f sont de dimensions m.

   (b) *Démontrer que* $\mathrm{Ker}(f)=\mathrm{Im}(f)$.

On a $f\circ f=0_{\mathscr{L}(E)}$ donc $\mathrm{Im}(f)\subset\ker(f)$. Comme les deux espaces ont même dimension, on en déduit qu'ils sont égaux.

On pose $F=\mathrm{Ker}(f)=\mathrm{Im}(f)$ et soit G un supplémentaire de F dans E. On introduit l'application linéaire

$$h:\left\{\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & F\\ x & \longmapsto & f(x)\end{array}\right.$$

Cette application h est bien définie car $\forall x\in G\subset E, f(x)\in\mathrm{Im}(f)=F$ et elle est linéaire car f est linéaire.

10. (a) *Quelle est la dimension de G ?*
    Par définition, G est un supplémentaire de F dans E donc $\dim(G)=\dim(E)-\dim(F)=n-m=m$.

    (b) *Démontrer que* $\mathrm{Ker}(h)=\{0_E\}$.
    Soit $x\in\mathrm{Ker}(h)$, alors $x\in G$ et $h(x)=f(x)=0$. On a donc $x\in\mathrm{Ker}(f)$ d'où $x\in F\cap G$. Or, F et G sont en somme directe, on en déduit que $x=0_E$ et comme on a clairement $\{0_E\}\subset\mathrm{Ker}(h)$, on a l'égalité.

    (c) *Démontrer que h est un isomorphisme.*

On sait que h est injective d'après la question précédente et c'est une application linéaire entre deux espaces vectoriels de même dimension finie. C'est donc un isomorphisme.

Attention, tout élément de F admet un antécédent <u>dans E</u> par f mais l'enjeu est de montrer qu'il admet un antécédent <u>dans G</u>. On a $\mathrm{rg}(h)=\dim f(G)$ et $\mathrm{rg}(f)=\dim f(E)$ donc, en général, $\mathrm{rg}(h)\neq rg(f)$ si h est une restriction de f.

Soit $\mathscr{B}_1=(e_1,\dots,e_m)$ une base de F et $\mathscr{B}_2=(e'_1,\dots,e'_m)$ une base de G. Soit g l'endomorphisme de E défini par

$$\forall i\in[\![1,m]\!],\ g(e_i)=h^{-1}(e_i)\quad\text{et}\quad\forall j\in[\![1,m]\!],\ g(e'_j)=0_E$$

11. *Démontrer que $f\circ g+g\circ f=id_E$.*

    On sait que pour montrer que $f\circ g+g\circ f(x)=x$ pour tout $x\in E$, il suffit de montrer que l'égalité est vraie pour tous les vecteurs d'une base de E. Or F et G sont supplémentaires dans E, la concaténation d'une base de F et d'une base de G est donc une base de E.
    Soit $i\in[\![1,m]\!]$, alors
    — $e_i\in F$ donc $f(e_i)=0_E$, on a donc
    $$f\circ g(e_i)+g\circ f(e_i)=f\circ h^{-1}(e_i)=h\circ h^{-1}(e_i)=e_i,$$
    car $h^{-1}(e_i)\in G$.
    — On a $f\circ g(e'_i)+g\circ f(e'_i)=g\circ f(e'_i)$. Or $f(e'_i)\in F$, donc $f(e'_i)=\sum_{j=1}^{m}\alpha_{ij}e_j$. On a alors
    $$g\circ f(e'_i)=\sum_{j=1}^{m}\alpha_{ij}g(e_j)=\sum_{j=1}^{m}\alpha_{ij}h^{-1}(e_j)=h^{-1}\left(\sum_{j=1}^{m}\alpha_{ij}e_j\right)=h^{-1}(f(e'_i)).$$

Or, $e'_i \in G$ donc $f(e'_i) = h(e'_i)$ et, par suite, $h^1(f(e'_i)) = e'_i$, on a donc bien $f \circ g(e'_i) + g \circ f(e'_i) = e_i$. L'égalité étant vraie pour les éléments d'une base de E, elle est vraie pour tout x de E. On a donc $f \circ g + g \circ f(x) = x$ pour tout $x \in E$, c'est-à-dire $f \circ g + g \circ f = id_E$.

Partie D

On travaille dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel usuel $\mathbb{R}_5[X]$. On considère l'application

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_5[X] & \to & \mathbb{R}_5[X] \\ P(X) & \mapsto & P'''(X) \end{array}$$

12. (a) *Sans justifier, donner une base de $\mathbb{R}_5[X]$ et sa dimension.*
Une base de $\mathbb{R}_5[X]$ est $(1, X, X^2, X^2, X^4, X^5)$, il est de dimension 6.
Quand vous écrivez " elle est de dimension", soit vous parlez de la base et ça n'a pas de sens, soit vous pensez qu'un espace vectoriel est un nom féminin.

(b) *Justifier que f est linéaire et simplifier $f \circ f$.*
L'application f est linéaire par linéarité de la dérivation et $\forall P \in \mathbb{R}_5[X], f \circ f(P) = P^{(6)} = 0$ donc $f \circ f = 0_{\mathbb{R}_5[X]}$.
Beaucoup n'ont pas remarqué que la dérivée était nulle.

(c) *Soit $P(X) = \sum_{k=0}^{5} a_k X^k \in \mathbb{R}_5[X]$. Calculer $f(P(X))$.*
On a
$$f(P(X)) = \sum_{k=0}^{5} a_k k(k-1)(k-2)X^{k-3} = \sum_{k=3}^{5} a_k k(k-1)(k-2)X^{k-3}.$$

(d) *On pose $F = \text{Ker}(f)$. Démontrer que $F = \mathbb{R}_2[X]$ puis calculer le rang de f.*

On a $f(P) = 0 \Leftrightarrow P^{(3)} = 0 \Leftrightarrow \forall k \in [\![3,5]\!], a_k = 0 \Leftrightarrow P \in \mathbb{R}_2[X]$. Par équivalence, on a montré $F = \mathbb{R}_2[X]$.
Le résultat est DONNÉ dans l'énoncé, toute démonstration un peu rapide ou ne donnant pas les arguments sera donc sanctionnée !

Par le thm du rang, on a $\text{rg}(f) + \dim(\text{Ker}(f)) = \dim(\mathbb{R}_5[X])$ donc $\text{rg}(f) = 6 - 3 = 3$. *On pose $G = \text{Vect}(X^3, X^4, X^5)$.*

13. *Justifier que G est un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}_5[X]$.*

La famille (X^3, X^4, X^5) est libre car composée de polynômes non nuls de degrés distincts donc c'est une base de G (ou bien On sait que F est de dimension 3 donc G est de dimension 6-3=3 et (X^3, X^4, X^5) est une base de G car elle est génératrice de G de cardinal sa dimension). La concaténation d'une base $(1, X, X^2)$ de F et de cette base de G forme la base canonique de $R_5[X]$ donc F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_5[X]$.

Comme dans la sous-partie précédente, on pose

$$h: \left\{ \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & F \\ P(X) & \longmapsto & f(P(X) \end{array} \right.$$

14. *Justifier que h est un isomorphisme puis déterminer $h^{-1}(1)$, $h^{-1}(X)$ et $h^{-1}(X^2)$.*

Un élément du noyau de h appartient à $G \cap \text{Ker}(f) = \{0_E\}$ donc h est une application linéaire injective entre deux espaces de dimension 3, on en déduit qu'elle est bijective.
On a
— $h^{-1}(1) = \dfrac{X^3}{6}$.

— $h^{-1}(X) = \dfrac{X^4}{4!}$
— $h^{-1}(X^2) = \dfrac{X^5}{60}$.

15. *Justifier qu'il existe un endomorphisme g de* $\mathbb{R}_5[X]$ *tel que* $f \circ g + g \circ f = id_{\mathbb{R}_5[X]}$.

On définit une application linéaire sur $\mathbb{R}_5[X]$ en posant

$$g(1) = \frac{X^3}{6}, g(X) = \frac{X^4}{4!}, g(X^2) = \frac{X^5}{60} \text{ et } g(X^3) = g(X^4) = g(X^5) = 0.$$

On a alors

— $f \circ g(1) + g \circ f(1) = f\left(\dfrac{X^3}{3!}\right) + 0 = 1$.
— $f \circ g(X) + g \circ f(X) = f\left(\dfrac{X^4}{4!}\right) + 0 = X$.
— $f \circ g(X^2) + g \circ f(X^2) = f\left(\dfrac{X^5}{60}\right) + 0 = X^2$.
— $f \circ g(X^3) + g \circ f(X^3) = 0 + g(3!) = 3!g(1) = X^3$.
— $f \circ g(X^4) + g \circ f(X^4) = 0 + g(4!X) = 4!g(X) = X^4$.
— et $f \circ g(X^5) + g \circ f(X^5) = 0 + g(5 \times 4 \times 3X^2) = 60g(X^2) = X^5$.

On en déduit que pour tout $i \in [\![0,5]\!]$, $f \circ g(X^i) + g \circ f(X^i) = X^i$ donc, par linéarité de f et g, et comme $(1, X, X^2, X^3, X^4, X^5)$ est une base de $\mathbb{R}_5[X]$,

$$\forall P \in \mathbb{R}_5[X], f \circ g(P) + g \circ f(P) = P.$$

On a bien

$$f \circ g + g \circ f = id_{\mathbb{R}_5[X]}.$$

Exercice 3 énoncé
Dans toute la suite, on considère une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de réels positifs telle que la série de terme général x_n converge. Pour tout entier naturel n non nul, on note :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k,\ T_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} S_k \text{ et } y_n = \frac{1}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n} i x_i.$$

Partie 1 : Résultats préliminaires

1. *On souhaite montrer que pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strictement positive, on a*

$$\left(\prod_{i=1}^{n} a_n\right)^{1/n} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \text{ inégalité arithmético-géométrique)}$$

(a) *Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $e^x \geqslant 1+x$.*

— L'inégalité est vraie pour $x=0$.
— Si $x>0$, par le thm des accroissements finis, on sait qu'il existe $c_x \in]0,x[$ tel que

$$\frac{e^x-1}{x} = e^{c_x} \geqslant 1.$$

On a donc bien l'inégalité souhaitée en multipliant par x.
— Si $x<0$, toujours par le thm des accroissements finis, il existe $d_x \in]x,0[$ tel que

$$\frac{e^x-1}{x} = e^{d_x} \leqslant 1.$$

On obtient l'inégalité souhaitée en multipliant par x négatif, ce qui inverse le sens des inégalités.

Par disjonction de cas, on a montré que $\forall x\in\mathbb{R}$, $e^x \geqslant 1+x$.

On peut aussi dire que la fonction est convexe donc au-dessus de toutes ses tangentes. On peut aussi faire une étude de fonction avec un tableau de variations.

Quelle que soit la méthode choisie, la réponse à cette question doit être succincte.

(b) *On pose $A = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$. Montrer que pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $\frac{a_k}{A} \leqslant exp\left(\frac{a_k}{A}-1\right)$.*

On applique la question précédente à $\frac{a_k}{A}-1$, on obtient l'inégalité souhaitée.

(c) *En déduire l'inégalité arithmético-géométrique.*

On sait que

$$\forall k \in [\![1,n]\!], \frac{a_k}{A} \leqslant exp\left(\frac{a_k}{A}-1\right),$$

on fait le produit de ces inégalités (positives) pour k variant de 1 à n :

$$\prod_{k=1}^{n}\frac{a_k}{A} \leqslant \prod_{k=1}^{n} exp\left(\frac{a_k}{A}-1\right),$$

ou encore

$$\frac{\prod_{k=1}^{n} a_k}{A^n} \leqslant exp\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k}{A}-1\right)\right).$$

Or $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k}{A}-1\right) = \left(\frac{1}{A}\sum_{k=1}^{n} a_k\right) - n = n-n = 0$. On obtient donc $\prod_{k=1}^{n} a_k \leqslant A^n$, d'où le résultat souhaité en prenant la racine n-ième de l'inégalité.

2. *On souhaite montrer le résultat suivant :*
étant donné deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ équivalentes et à termes positifs, telles que $\sum u_n$ diverge, on a

$$\sum_{k=1}^{n} u_k \sim \sum_{k=1}^{n} v_k$$

(a) *Montrer que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que*

$$\forall k \geqslant N, (1-\epsilon)v_k \leqslant u_k \leqslant (1+\epsilon)v_k.$$

Par hypothèse, $\dfrac{u_k}{v_k} \to 1$ donc pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$, $\left|\dfrac{u_k}{v_k} - 1\right| \leqslant \epsilon$. On a bien l'encadrement souhaité en multipliant par v_k qui est positif.

Là j'ai commencé à voir n'importe quoi.
Pour rappel, l'ordre des quantificateurs a une importance. Dans la définition de limite, on écrit $\forall\epsilon > 0, \exists N$ et N dépend donc de ϵ puisqu'il arrive APRÈS avoir fixé ϵ.
Et dire que la limite vaut 1 " à partir d'un certain rang" m'interroge sur le sens que vous donnez à limite !

(b) *En déduire qu'il existe deux constantes C et C′ telles que $\forall n \geqslant N$,*

$$C' + (1-\epsilon)\sum_{k=1}^{n} v_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} u_k \leqslant C + (1+\epsilon)\sum_{k=1}^{n} v_k.$$

On sait que $\forall k \geqslant N$, $(1-\epsilon)v_k \leqslant_k \leqslant (1+\epsilon)v_k$. Soit $n \geqslant N$, on somme pour k variant de N à n :

$$\sum_{k=N}^{n} (1-\epsilon)v_k \leqslant \sum_{k=N}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=N}^{n} (1+\epsilon)v_k.$$

On ajoute $\displaystyle\sum_{k=1}^{N-1} u_k$:

$$\sum_{k=1}^{N-1} u_k + \sum_{k=N}^{n} (1-\epsilon)v_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=1}^{N-1} u_k + \sum_{k=N}^{n} (1+\epsilon)v_k$$

puis on écrit $\displaystyle\sum_{k=N}^{n} v_k = \sum_{k=1}^{n} v_k - \sum_{k=1}^{N-1} v_k$, on a alors :

$$\sum_{k=1}^{N-1} u_k - \sum_{k=1}^{N-1} (1-\epsilon)v_k + \sum_{k=1}^{n} (1-\epsilon)v_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=1}^{N-1} u_k - \sum_{k=1}^{N-1} (1-\epsilon)v_k + \sum_{k=1}^{n} (1+\epsilon)v_k$$

ou encore

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{N-1} (u_k + (1-\epsilon)v_k)}_{=C'} + (1-\epsilon)\sum_{k=1}^{n} v_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} u_k \leqslant \underbrace{\sum_{k=1}^{N-1} (u_k + (1+\epsilon)v_k)}_{=C} + (1+\epsilon)\sum_{k=1}^{n} v_k$$

Bien entendu, il ne fallait pas juste sommer les inégalités de la question précédente puisque celles-ci ne sont valables qu'à partir du rang N.

(c) *Montrer qu'il existe N_0 tel que $\forall n \geqslant N_0$,*

$$C \leqslant \epsilon\sum_{k=1}^{n} v_k \text{ et } C' \geqslant -\epsilon\sum_{k=1}^{n} v_k.$$

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant positive, terme général d'une série divergente, on sait que $\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^n v_k\right) = +\infty$. On en déduit que $\lim_{n\to+\infty}\frac{C}{\sum_{k=1}^n v_k} = 0 = \lim_{n\to+\infty}\frac{C'}{\sum_{k=1}^n v_k}$. En appliquant la définition de la limite, il existe N_1 tel que $\forall n \in \mathbb{N}_1$,

$$-\epsilon \leqslant \frac{C}{\sum_{k=1}^n v_k} \leqslant \epsilon,$$

et il existe N_2 tel que $\forall n \geqslant N_2$,

$$-\epsilon \leqslant \frac{C'}{\sum_{k=1}^n v_k} \leqslant \epsilon.$$

En multipliant par $\sum_{k=1}^n v_k$ (positif) et en posant $N_0 = \max(N_1, N_2)$, on a bien le résultat souhaité.

(d) *En déduire que* $\sum_{k=1}^n u_k \sim \sum_{k=1}^n u_k$.

Soit ϵ, alors en posant $N" = \max(N, N_0)$, avec N et N_0 comme dans les questions précédentes, on obtient

$$\forall n \geqslant N", (1-2\epsilon)\sum_{k=1}^n v_k \leqslant \sum_{k=1}^n u_k \leqslant (1+2\epsilon)\sum_{k=1}^n v_k,$$

donc

$$\left|\frac{\sum_{k=1}^n u_k}{\sum_{k=1}^n v_k} - 1\right| \leqslant 2\epsilon.$$

On a bien montré

$$\sum_{k=1}^n u_k \sim \sum_{k=1}^n v_k$$

Là encore, beaucoup trop m'écrivent " d'après les deux questions précédentes, on a : " sans me préciser pour quelles valeurs de n on a l'encadrement.

3. (a) *Montrer que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n y_k = \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^n (n+1-i)x_i.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n y_k &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}\sum_{i=1}^k i x_i \\
&= \sum_{i=1}^n i x_i \sum_{k=i}^n \frac{1}{k(k+1)} \\
&= \sum_{i=1}^n i x_i \sum_{k=i}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \\
&= \sum_{i=1}^n i x_i \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{n+1}\right) \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{n+1-i}{n+1} x_i \\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^n (n+1-i)x_i
\end{aligned}$$

On a bien l'égalité demandée.
Faites apparaître clairement la somme télescopique

(b) *En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a :* $\sum_{k=1}^{n} y_k = T_n$.

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k} x_k \\ &= \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=k}^{n} 1 \\ &= \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n} x_i(n+1-i) \\ &= \sum_{k=1}^{n} y_k \text{ d'après la question précédente} \end{aligned}$$

L'égalité vous est donnée donc faites apparaître qu'après permutation des deux sommes, vous obtenez une somme constante (et ne me dites pas, c'est évident parce que vu ce que vous j'avais déjà lu à ce stade là de vos copies, j'étais en droit de me demander si vous ne tentiez pas un coup de bluff!!!!)

(c) *Établir que la série de terme général y_n converge et que :* $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$.

On suppose que la série de terme général x_n converge, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc convergente. Par le thm de Césaro, on sait donc que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, de même limite. En utilisant l'égalité de la question précédente, on a donc que la série de terme général y_n converge et

$$\sum_{k=1}^{+\infty} y_k = \lim_{n\to+\infty} T_n = \lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{k=1}^{+\infty} x_k$$

4. *Dans cette question, on pose, pour tout entier naturel n non nul :*

$$z_n = \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{1/n}.$$

On se propose de montrer que la série de terme général z_n converge et que sa somme vérifie :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n \leqslant e \sum_{n=1}^{+\infty} x_n.$$

(a) *Justifier que, pour tout entier naturel n non nul, on a :*

$$z_n = \frac{1}{(n!)^{1/n}}\left(\prod_{k=1}^{n} k x_k\right)^{1/n}.$$

On part du membre de droite :

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{(n!)^{1/n}}\left(\prod_{k=1}^{n} k x_k\right)^{1/n} &= \frac{1}{(n!)^{1/n}}\left(\prod_{k=1}^{n} k \prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{1/n} \\ &= \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{1/n} \quad \text{car } \prod_{k=1}^{n} k = n! \\ &= z_k \end{aligned}$$

(b) *En déduire que* $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $z_n \leqslant \frac{n+1}{(n!)^{1/n}} y_n$.

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, alors

$$\begin{aligned} z_n &= \tfrac{1}{(n!)^{1/n}} \left(\prod_{k=1}^{n} k x_k \right)^{1/n} \\ &\leqslant \frac{1}{(n!)^{1/n}} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k x_k \right) \\ &\quad \text{en utilisant l'inégalité arithmético-géométrique avec } a_k = k x_k \\ &\leqslant \frac{1}{(n!)^{1/n}} (n+1) y_n \end{aligned}$$

On a donc bien l'inégalité demandée.

(c) *Montrer que, pour tout réel x positif, on a* $\ln(1+x) \leqslant x$.

L'inégalité est vraie pour $x = 0$. Soit $x > 0$, alors il existe $c_x \in]0, x[$ d'après le théorème des accroissements finis tel que

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{1}{1+c_x} \leqslant 1$$

On obtient l'inégalité souhaitée en multipliant par x qui est positif. On peut, bien sûr, aussi utiliser la première question et dire que le résultat tombe par croissance de l'exponentielle.

(d) *En déduire que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leqslant e.$$

On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $\dfrac{1}{n} \geqslant 0$ donc, d'après la question précédente,

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n},$$

puis, $n \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) \leqslant 1$, et enfin, $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \leqslant e$, par croissance de l'exponentielle.

(e) *Établir que pour tout entier naturel n non nul, on a :*

$$\frac{(n+1)^n}{n!} = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On part du membre de droite :

$$\begin{aligned} \textstyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k &= \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{k+1}{k}\right)^k \\ &= \prod_{k=1}^{n} \frac{(k+1)^k}{k^k} \\ &= \prod_{k=1}^{n} \frac{(k+1)^{k+1}}{k^k} \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \\ &= \frac{(n+1)^{n+1}}{1} \times \frac{1}{(n+1)!} \\ &\quad \text{car on reconnaît un produit télescopique} \\ &= \frac{(n+1)^n}{n!} \quad \text{car } (n+1)! = (n+1).n! \end{aligned}$$

On a bien l'égalité donnée.

On attend de vous que vous fassiez apparaître un produit télescopique, pas que vous écriviez une grosse fraction avec des points.

(f) *Montrer enfin que la série de terme général z_n converge et que $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n \leqslant e \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$.* Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, alors

$$\begin{aligned} 0 \leqslant z_n & \leqslant \frac{n+1}{n^{1/n}} y_n \\ & \leqslant \left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\right)^{1/n} y_n \\ & \leqslant \left(\prod_{k=1}^{n} e\right)^{1/n} y_n \\ & \leqslant e y_n \end{aligned}$$

Par le thm de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum z_n$ converge et sa somme est inférieure la somme de $e y_n$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n \leqslant e \sum_{n=1}^{+\infty} y_n.$$

On obtient l'inégalité souhaitée en utilisant l'égalité démontrée ci-dessus : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} y_n = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$.

La notation avec $+\infty$ dans la somme est réservée à la limite des sommes partielles LORSQUE la série converge. Vous ne pouvez donc pas l'utiliser avant d'avoir montré que la série convergeait (et a fortiori pour montrer qu'elle converge)

5. (a) *En utilisant une comparaison séries/intégrales, montrer que*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2,\ -1+\frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant -1+\frac{1}{n}+\frac{\ln n}{n}.$$

Soit $n \geqslant 2$. Pour tout $k \geqslant 1$, et tout $x \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$, on a, par croissance de ln :

$$\ln\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \ln(x) \leqslant \ln\left(\frac{k+1}{n}\right).$$

Par croissance de l'intégrale, on en déduit que

$$\frac{1}{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \int_{k/n}^{(k+1)/n} \ln x\, dx \leqslant \frac{1}{n}\ln\left(\frac{k+1}{n}\right).$$

donc

On somme l'encadrement pour k variant de 1 à $n-1$, on obtient, avec la relation de Chasles :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \int_{1/n}^{1} \ln(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(\frac{k+1}{n}\right)$$

puis en remarquant que le terme en $k = n$ est nul de la première somme est nul, et après changement d'indice dans la deuxième :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \int_{1/n}^{1} \ln(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k}{n}\right),$$

ce qui implique :

$$\frac{1}{n}\ln\frac{1}{n}+\int_{1/n}^{1} \ln(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \int_{1/n}^{1} \ln(x)\,\mathrm{d}x.$$

Enfin, $\displaystyle\int_{1/n}^{1} \ln(x)\,\mathrm{d}x = [x\ln(x)-x]_{1/n}^{1} = -1-\frac{\ln(1/n)}{n}+\frac{1}{n}$, ce qui donne bien

$$-1+\frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant -1+\frac{1}{n}+\frac{\ln n}{n}$$

Pour tous ceux de mauvais foi qui m'ont dit que la question était infaisable car "on intègre d'habitude entre k et $k+1$", ça marche aussi ici :

Pour tout $k \geqslant 2$, on a

$$\int_{k-1}^{k} \ln\left(\frac{x}{n}\right) \mathrm{d}x \leqslant \ln\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \int_{k}^{k+1} \ln \frac{x}{n} \,\mathrm{d}x$$

donc, en sommant de 2 à n :

$$\int_{1}^{n} \ln\left(\frac{x}{n}\right) \mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=2}^{n} \ln \frac{k}{n},$$

puis

$$\ln \frac{1}{n} + \int_{1}^{n} \ln\left(\frac{x}{n}\right) \mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=1}^{n} \ln \frac{k}{n}.$$

On somme maintenant l'autre inégalité pour k variant de 1 à $n-1$:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \ln \frac{k}{n} \leqslant \int_{1}^{n} \ln \frac{x}{n} \,\mathrm{d}x,$$

puis, en remarquant que le terme en $k = n$ est nul :

$$\sum_{k=1}^{n} \ln \frac{k}{n} \leqslant \int_{1}^{n} \ln \frac{x}{n} \,\mathrm{d}x.$$

On retrouve bien l'encadrement

$$\frac{1}{n} \ln \frac{1}{n} + \int_{1/n}^{1} \ln(x) \,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \int_{1/n}^{1} \ln(x) \,\mathrm{d}x$$

et il suffit de calculer l'intégrale comme ci-dessus.

(b) *En déduire* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{n}\right)$ *puis un équivalent de* $\left(\frac{1}{n!}\right)^{1/n}$

D'après le théorème des gendarmes, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{n}\right) = -1$ donc, par continuité de l'exponentielle, $\lim\limits_{n\to+\infty} \prod\limits_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^{1/n} = \frac{1}{e}$. Or $\prod\limits_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^{1/n} = \frac{(n!)^{1/n}}{n}$. On a donc

$$\frac{n}{(n!)^{1/n}} \sim e \text{ puis } \frac{1}{(n!)^{1/n}} \sim \frac{e}{n}.$$

6. *Soit N un entier naturel non nul quelconque. On considère $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ particulière que l'on note $(x_n(N))_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :*

$$x_n(N) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } n \in [\![1, N]\!] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On pose, comme à la deuxième question : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $z_n(N) = \left(\prod\limits_{k=1}^{n} x_k(N)\right)^{1/n}$.

(a) *Justifier que les séries $\sum x_n(N)$ et $\sum z_n(N)$ convergent et écrire $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n(N)$ et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} z_n(N)$ sous forme de sommes finies.*

Les séries convergent car leurs termes généraux sont nuls à partir du rang $N+1$. On a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n(N) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n},$$

et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n(N) = \sum_{n=1}^{N} \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)^{1/n} = \sum_{n=1}^{n} \frac{1}{(n!)^{1/n}}.$$

(b) *En déduire que :*

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{\sum_{n=1}^{+\infty} z_n(N)}{\sum_{n=1}^{+\infty} x_n(N)} = e.$$

On sait que $\frac{1}{(n!)^{1/n}} \sim \frac{e}{n}$ et $\sum \frac{e}{n}$ diverge. D'après les résultats préliminaires, on en déduit que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k!)^{1/k}} \sim \sum_{k=1}^{n} \frac{e}{k},$$

donc

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(n!)^{1/n}} \sim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{e}{n},$$

ou encore

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{\sum_{n=1}^{n} z_n(N)}{\sum_{n=1}^{N} x_n(N)} = e.$$

En utilisant la question précédente, on obtient bien le résultat souhaité.

7. *Conclure que e est la plus petite des constantes λ telles que, pour toute suite (x_n) de réels positifs :*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n \leqslant \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} x_n.$$

On a vu que pour toute suite de réels positifs,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n \leqslant e \sum_{n=1}^{+\infty} x_n.$$

l'ensemble

$$\{\lambda \in \mathbb{R}^+, \forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}, \sum_{n=1}^{+\infty} z_n \leqslant \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} x_n\}$$

est donc non vide et minoré par 0. Si λ est un élément de cet ensemble, on a, pour tout $N \in \mathbb{N}^\star$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n \leqslant \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} x_n(N),$$

donc, en divisant par $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n(N)$ et en faisant tendre N vers $+\infty$, $e \leqslant \lambda$. On en déduit que e minore cet ensemble. Comme c'est un élément de cet ensemble, c'est le minimum. On a montré que e est la plus petite des constantes λ telles que pour toute suite de réels positifs, $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n \leqslant \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$

Exercice 4 énoncé

1. Montrons que $\ker(u)$ est stable par v. Soit $x \in \ker(u)$. Alors, comme $u \circ v = v \circ u$, on a
$$u(v(x)) = v(u(x)) = v(0_E) = 0_E.$$
Ainsi, $v(x) \in \ker u$.
Ce travail montre que $\boxed{v(\ker u) \subset \ker(u)}$, ou autrement dit que $\ker(u)$ est stable par v.

   Montrons que $\mathrm{Im}(u)$ est stable par v. Soit $y \in \mathrm{Im}(u)$ et $x \in E$ tel que $y = u(x)$. On a alors, comme $u \circ v = v \circ u$,
$$v(y) = v(u(x)) = u(v(x)) \in \mathrm{Im}(u).$$
Ainsi, $\boxed{v(\mathrm{Im}\, u) \subset \mathrm{Im}\, u}$, ou autrement dit, $\mathrm{Im}(u)$ est stable par v.
2. Soit $y \in \mathrm{Im}(u)$. Il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$. Donc $u(y) = u^2(x) = 0_E$, donc $y \in \ker u$.
On a bien montré que $\boxed{\mathrm{Im}\, u \subset \ker u.}$
3. Comme E est de dimension finie égale à n, d'après le théorème du rang, on a $n = \mathrm{rg}(u)+\dim(\ker u)$.
Or, comme $\mathrm{Im}(u) \subset \ker(u)$, on a $\mathrm{rg}(u) = \dim(\mathrm{Im}\, u) \leqslant \dim(\ker u)$, donc $\boxed{\mathrm{rg}(u) \leqslant \frac{n}{2}.}$
4. (a) Comme u n'est pas nul, on a $\mathrm{rg}(u) \geqslant 1$. L'inégalité précédente donne directement que $\mathrm{rg}(u) = 1$, donc $\mathrm{Im}(u)$ est une droite vectorielle, que nous noterons D.
Le théorème du rang (*cf.* question précédente) donne directement que $\dim(\ker u) = \dim(E) - \mathrm{rg}(u) = 1$.
D'après 2, on a $\mathrm{Im}(u) \subset \ker(u)$ et ces deux sous-espaces vectoriels sont de même dimension, donc sont égaux.
Il existe donc bien une droite vectorielle D telle que $\mathrm{Im}(u) = \ker(u) = D$.
   (b) i. Comme $D = \ker(u)$ et comme u et v commutent, d'après la question 1, $\boxed{v(D) \subset D.}$
   ii. On a $u \circ v = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Im}(v) \subset \mathrm{Ker}(u)$. Si $\mathrm{Im}(v) = \{0_E\}$ (cad $v = 0_{\mathscr{L}(E)}$), alors $u \circ v = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
Sinon, Les arguments précédents s'appliquent à v : il existe une droite D' telle que $\mathrm{Im}\, v = \ker v = D'$. Montrer l'inclusion $\mathrm{Im}(v) \subset \mathrm{Ker}(u)$ (ou $D' \subset D$) revient à montrer l'égalité puisque ce sont des droites vectorielles.
Supposons par l'absurde $D \neq D'$, alors $D \cap D' = \{0_E\}$ et comme $2 = \dim(E) = \dim(D) + \dim(D')$, on a $E = D \oplus D'$. Soit $x \in E$. Il existe $d \in D$ et $d' \in D'$ tels que $x = d + d'$.
Comme $d' \in \ker(v)$, on a $v(x) = v(d) + v(d') = v(d)$.
Donc $v(x) = v(d) \in v(D) \subset D$. D'autre part, $v(d) \in \mathrm{Im}(v) = D'$. On a donc $v(x) \in D \cap D'$, donc $v(x) = 0_E$.
Ceci étant vrai pour tout $x \in E$, on a donc $v = 0$, ce qui est exclu. **Contradiction.**

      On a donc $\mathrm{Im}(v) = \ker(v) = D$.
De là, pour tout $x \in E$, $v(x) \in \mathrm{Im}(v) = \ker(u)$, donc $u \circ v(x) = 0$.
Ainsi, $\boxed{u \circ v = 0.}$
Elle n'était pas évidente cette question et vous allez me dire que la réponse sort du chapeau. En fait, pas vraiment. En effet, comme on travaille en dimension 2, deux droites vectorielles sont soit confondues, soit supplémentaires dans E.
   (c) On peut appliquer le raisonnement précédent : $D = \mathrm{Im}(v) = \ker(v) = \mathrm{Im}(w) = \ker(w)$.
Donc pour tout $x \in E$, $w(x) \in \mathrm{Im}(w) = \ker(v)$, donc $v \circ w(x) = 0$.
Ainsi, $\boxed{v \circ w = 0.}$
5. (a) Posons $v = u_1 \circ \cdots \circ u_i$: c'est un endomorphisme de E, comme composée d'endomorphismes, notamment $F_i = \mathrm{Im}(v)$ est bien un sev de E. Ensuite, u_{i+1} commute avec chaque u_k pour $1 \leqslant k \leqslant i$, donc avec v. D'après la question 1, $\boxed{F_i \text{ est un sev de } E \text{ stable par } u_{i+1}.}$

(b) Montrons par récurrence finie sur $i \in [\![1, m]\!]$ la proposition :

$$\mathscr{H}(i)\ :\ \text{" } \dim(F_i) \leqslant \frac{n}{2^i} \text{ "}$$

— Initialisation : la question 3 montre $\mathscr{H}(1)$.
— Hérédité : soit $i \in [\![1, m-1]\!]$. Supposons $\mathscr{H}(i)$.
Posons v la restriction de u_{i+1} à F_i. D'après la question précédente, on peut voir v comme un endomorphisme de F_i et, comme $u_{i+1}^2 = 0$, alors $v^2 = 0$. D'après la question 3, on a

$$\mathrm{rg}(v) \leqslant \frac{\dim F_i}{2} \leqslant \frac{n}{2^{i+1}}$$

Or

$$\mathrm{Im}(v) = v(F_i) = u_{i+1}(F_i) = u_{i+1}((u_i \circ \cdots \circ u_1)(E)) = F_{i+1}$$

Donc $\dim(F_{i+1}) \leqslant \dfrac{n}{2^{i+1}}$.
— Conclusion : pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, $\dim(F_i) \leqslant \dfrac{n}{2^i}$.

(c) Si $n < 2^m$ alors, d'après la question précédente, $\dim F_m < 1$, donc $\mathrm{Im}(u_1 \circ \cdots \circ u_m) = F_m = \{0_E\}$. Directement, $\boxed{u_1 \circ \cdots \circ u_m = 0.}$