

Correction du DM11

I: Intégrales de Wallis

Pour tout entier $n \geq 0$, on pose

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x) dx$$

1. Montrer que $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x) dx$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On fait un changement de variable en posant $y = \frac{\pi}{2} - x$. On a $dx = -dy$ donc

$$W_n = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos^n\left(\frac{\pi}{2} - y\right) (-dy) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(y) dy.$$

2. Montrer que la suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in]0, 1[$, $\cos x \in]0, 1[$ donc $\cos^n x \geq \cos^{n+1} x, \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. On intègre ensuite l'inégalité entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ et on obtient, par croissance de l'intégrale, $W_n \geq W_{n+1}$. Par ailleurs, la fonction $x \mapsto \cos^n(x)(1 - \cos(x))$ est continue et ce n'est pas la fonction nulle sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$ donc, par stricte positivité de l'intégrale, on a

$$W_n > W_{n+1},$$

La suite est donc strictement décroissante.

N'oubliez pas de mentionner la continuité de la fonction !

3. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $W_{n+2} = \left(\frac{n+1}{n+2}\right) W_n$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme suggéré, on fait une intégration par parties en écrivant $\cos^{n+2} x = \cos^{n+1} x \cos x$. On a alors

$$W_{n+2} = \underbrace{[\cos^{n+1} x \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x (-(n+1) \sin x \cos^n x) dx = (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 x) \cos^n x dx$$

d'où

$$W_{n+2} = (n+1) (W_n - W_{n+2}) \text{ ou encore } W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$$

4. En déduire que pour tout entier $p \geq 0$, on a

$$\begin{cases} W_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \cdot \frac{\pi}{2} \\ W_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!} \end{cases}$$

On différencie le cas où n est pair et impair.

- Si $n = 2p$, on a

$$W_{2p} = \frac{2p-1}{2p} W_{2p-2} = \frac{2p-1}{2p} \cdot \frac{2p-3}{2p-2} W_{2p-4} = \frac{2p-1}{2p} \cdot \frac{2p-3}{2p-2} \cdots \frac{1}{2} W_0$$

c'est-à-dire

$$W_{2p} = \frac{\prod_{k=0}^{p-1} 2k+1}{\prod_{k=1}^p 2k} W_0 = \frac{\left(\prod_{k=0}^{p-1} 2k+1\right) \cdot \left(\prod_{k=1}^p 2k\right)}{\left(\prod_{k=1}^p 2k\right)^2} W_0 = \frac{(2p)!}{2^{2p} p!^2} W_0$$

puisque $\prod_{k=1}^p 2k = 2^p \prod_{k=1}^p k$. On conclut en remarquant que $W_0 = \frac{\pi}{2}$.

- Supposons maintenant $n = 2p + 1$, on a

$$W_{2p+1} = \frac{2p}{2p+1} W_{2p-1} = \frac{2p}{2p+1} \cdots \frac{2}{3} W_1$$

On conclut en procédant comme pour le cas pair, en remarquant que $W_1 = 1$.

Écrivez les produits avec $\prod_{l=1}^p$ et qu'avec des... On peut aussi procéder par récurrence sur p .

$$\text{On pose } W_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p} p!^2} \frac{\pi}{2} \text{ et } W_{2p+1} = \frac{2^{2p} (p!)^2}{(2p+1)!}$$

On sait que $W_0 = \frac{\pi}{2}$ et $W_1 = 1$ donc la propriété est vraie au rang 0.

On suppose la propriété vraie au rang p .

On a alors

- $W_{2p+2} = \frac{2p+1}{2p+2} W_{2p} = \frac{2p+1}{2p+2} \frac{(2p)!}{2^{2p} p!^2} \frac{\pi}{2} = \frac{(2p+1)(2p+2)}{4(p+1)^2} \frac{(2p)!}{2^{2p} p!^2} \frac{\pi}{2} = \frac{(2p+2)!}{2^{2p+2} ((p+1)!)^2}$ et
- $W_{2p+3} = \frac{2p+2}{2p+3} \frac{2^{2p} (p!)^2}{(2p+1)!} = \frac{4(p+1)^2}{(2p+3)(2p+2)} \frac{2^{2p} (p!)^2}{(2p+1)!} = \frac{2^{2p+2} ((p+1)!)^2}{(2p+3)!}$

La propriété est vraie au rang $p+1$. Par le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier.

5. Montrer que, pour $n \geq 0$, on a $W_n W_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = (n+1)W_n W_{n+1}$, alors $u_{n+1} = (n+2)W_{n+1} W_{n+2} = (n+1)W_{n+1} \frac{n+1}{n+2} W_n = (n+1)W_n W_{n+1} = u_n$. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc constante et $u_0 = W_0 W_1 = \frac{\pi}{2}$. On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)W_n W_{n+1} = \frac{\pi}{2}$ d'où le résultat souhaité. On peut aussi procéder par disjonction de cas.

- Si $n = 2p$, $W_{2p} W_{2p+1} = \frac{(2p)!}{2^{2p} (p!)^2} \cdot \frac{\pi}{2} \frac{2^{2p} (p!)^2}{(2p+1)!} = \frac{(2p)! 2^{2p} (p!)^2 \pi}{2 \cdot 2^{2p} (p!)^2 (2p+1)!} = \frac{\pi}{2(2p+1)}$.
- Si $n = 2p+1$, $W_{2p+1} W_{2p+2} = \frac{2^{2p} (p!)^2}{(2p+1)!} \frac{(2p+2)!}{2^{2p+2} (p+1)!^2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{(2p+2)\pi}{8(p+1)^2} = \frac{\pi}{4(p+1)}$ et comme $4(p+1) = 2(2p+1+1)$, on retrouve la formule demandée.

6. Prouver que, pour tout $n \geq 0$, on a $1 - \frac{1}{n+2} < \frac{W_{n+1}}{W_n} < 1$ et en déduire que $W_n \sim W_{n+1}$ quand n tend vers $+\infty$.

La première inégalité vient du fait que la suite (W_n) est strictement décroissante et strictement positive. Pour l'autre inégalité, on écrit

$$\frac{W_{n+1}}{W_n} = \frac{W_{n+1}}{W_{n+2}} \cdot \frac{W_{n+2}}{W_n} > \frac{W_{n+2}}{W_n} = \frac{n+1}{n+2} = 1 - \frac{1}{n+2}$$

On montre que $\left(\frac{W_{n+1}}{W_n}\right)$ tend vers 1 par le théorème des gendarmes, ce qui montre que $W_n \sim W_{n+1}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Attention, $W_n < W_{n+1} \Leftrightarrow 1 < \frac{W_{n+1}}{W_n}$ si $W_n > 0$!

7. Montrer finalement que $W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$

On utilise les deux questions précédentes: $W_n \sim W_{n+1}$ donc $W_n W_{n+1} \sim W_{n+1}^2$ et comme

$W_n W_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)}$, on a $W_{n+1} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2(n+1)}}$ d'où $W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

II: Formule de Stirling

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \frac{n!e^n}{n^n \sqrt{n}}$ et la suite $(v_n)_{n \geq 2}$ définie pour $n \geq 2$ par $v_n = \ln u_n - \ln u_{n-1}$.

8. Exprimer simplement v_n en fonction de n .

On a

$$v_n = \ln \left(\frac{u_n}{u_{n-1}} \right) = \ln \left(\left(1 - \frac{1}{n} \right)^{n-1} e \sqrt{1 - \frac{1}{n}} \right) = (n-1) \ln \left(1 - \frac{1}{n} \right) + 1 + \frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{1}{n} \right)$$

ou encore $v_n = (n - \frac{1}{2}) \ln \left(1 - \frac{1}{n} \right) + 1$.

9. Donner un développement limité à l'ordre 2 de v_n .

Pour avoir un développement limité à l'ordre 2 de $(n - \frac{1}{2}) \ln(1 - \frac{1}{n})$, il faut faire un développement limité de $\ln \left(1 - \frac{1}{n} \right)$ à l'ordre 3. On a

$$\ln \left(1 - \frac{1}{n} \right) = -\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

donc

$$\begin{aligned} \left(n - \frac{1}{2} \right) \ln \left(1 - \frac{1}{n} \right) + 1 &= \left(n - \frac{1}{2} \right) \left(-\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \right) + 1 \\ &= -1 - \frac{1}{2n} - \frac{1}{3n^2} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) + 1 = -\frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

10. Montrer que $V_n = \sum_{k=2}^n v_k$ est décroissante.

On sait que v_k est équivalent à $-\frac{1}{12k^2}$ donc à partir d'un certain rang, la suite (v_k) est négative. Cela implique que la suite (V_n) est décroissante à partir d'un certain rang.

11. Montrer qu'elle converge.

Il suffit donc de montrer qu'elle est minorée pour avoir la convergence. On va montrer qu'elle est bornée ce qui donnera le résultat.

Comme $v_k \sim -\frac{1}{12k^2}$, il existe N tel que $\forall k \geq N$, $|12k^2 \cdot v_k - 1| \leq 1$ (on prend $\epsilon = 1$) donc on a $|v_k| \leq 2 \frac{1}{12k^2} = \frac{1}{6k^2}$. Ainsi, pour $n > N$, on a

$$|V_n| \leq \sum_{k=2}^n |v_k| = \sum_{k=2}^{N-1} |v_k| + \sum_{k=N}^n |v_k| \leq \sum_{k=2}^{N-1} |v_k| + \sum_{k=N}^n \frac{1}{6k^2}$$

On sait que la suite $\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, donc elle est bornée et par suite, il existe $M > 0$

tel que $\sum_{k=N}^n \frac{1}{6k^2} \leq M$. Il suffit maintenant de prendre $K = \max \left\{ \sum_{k=2}^{N-1} |v_k|, M \right\}$ (on peut car N est fixé!) et on obtient que pour tout $n \geq N$, $|V_n| \leq K$ ce qui achève de montrer que la suite est convergente.

12. Montrer alors que les suites $(\ln(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent et donc qu'il existe un réel $K > 0$ tel que

$$n! \sim K \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}$$

Comme V_n est une somme télescopique, on a $V_n = \ln(u_n) - \ln(u_1)$. La suite $(V_n)_{n \geq 2}$ est convergente, cela implique que $(\ln(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite convergente, donc il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\ln(u_n) \rightarrow k$ ce qui implique $u_n \rightarrow e^k$. On pose $K := e^k > 0$, on a le résultat souhaité.

On obtient l'équivalent demandé en écrivant que $\frac{u_n}{K} \rightarrow 1$ lorsque $n \rightarrow +\infty$ et en revenant à l'expression de u_n .

Attention, pour justifier que $K > 0$, il est faux de dire que c'est la limite d'une suite strictement positive. Pensez à $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

13. En utilisant cet équivalent, donner un équivalent simple de la suite $(W_{2p})_{p \in \mathbb{N}}$. En déduire que $K = \sqrt{2\pi}$ et, par suite, que

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \text{ (formule de Stirling)}$$

On sait que $W_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \cdot \frac{\pi}{2}$ donc

$$W_{2p} \sim \frac{K(2p/e)^{2p} \sqrt{2p}}{2^{2p} (K(p/e)^p \sqrt{p})^2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi \sqrt{2p}}{K 2p} = \frac{\pi}{K \sqrt{2p}}$$

or on a montré à la question 7 de la partie précédente que $W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ donc $W_{2p} \sim \sqrt{\frac{\pi}{4p}}$.

Cela implique $\sqrt{\frac{\pi}{4p}} \sim \frac{\pi}{K \sqrt{2p}}$ donc le quotient tend vers 1, or $\frac{\sqrt{\pi/4p}}{\pi/K \sqrt{2p}} = \frac{K}{\sqrt{2\pi}}$ donc cela impose $K = \sqrt{2\pi}$. En injectant la valeur de K dans l'équivalent de $n!$ trouvé à la question précédente, on obtient la formule de Stirling.

Beaucoup m'ont identifié les deux équivalents: c'est faux, il n'y a pas unicité de l'équivalent.

Correction du DS n 11
