Indications du TD n 22

Indication 1 Déterminer $f(e_3)$ puis écrire la matrice.

Indication 2 Calculer les images de $1, X, X^2$ et X^3 par g.

Indication 3
1. Calculer les images par f de la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Exprimer les images de B' dans la base B'.
3. Exprimer les images de B" dans la base B".

Indication 4
1. Utiliser le produit matriciel.
2. Revenir à la définition de la matrice d'une application linéaire.
3. Idem.

Indication 5
1. Montrer que la somme est directe et conclure avec la dimension.
2. Montrer que A inversible implique $A = I_n$.

Indication 6 Noter $B = (f_1, \cdots, f_r, g_1, \cdots, g_m)$ et "traduire" en terme d'images par u la forme de la matrice.

Indication 7
1. Trouver des relations entre les colonnes et en déduire des éléments du noyau puis utiliser le théorème du rang.
2. Comme à la question précédente mais attention à bien traduire avec les coordonnées.

Indication 8
1. Résoudre $AX = (0)$ et utiliser le théorème du rang.
2. Utiliser le produit matriciel.
3. Vous connaissez son rang !
4. Déterminer les coordonnées de B' dans B puis utiliser le produit matriciel pour calculer les coordonnées de leurs images.

Indication 9
1. Distinguer le cas $\alpha = 0$ et $\alpha \neq 0$.
2. Trouver des éléments de $\mathrm{Ker}(f)$ grâce à des combinaisons linéaires nulles des colonnes et conclure avec le théorème du rang.

Indication 10
1. Déterminer lorsque $\det(A - \lambda I_3)$ est nul.
2. Calculer les solutions de $AX = \lambda X$.
3. Montrer que la concaténation des deux bases est une base de $\mathbb{R}^3$.
4. Utiliser la formule de la matrice de passage.
5. A-t-on $\mathrm{Ker}(u) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$?

Indication 11
1. Écrire une combinaison linéaire nulle de la famille et appliquer f^{n-1}.
2. Raisonner par double implication en utilisant la question 1.

Indication 12 Traduisez l'appartenance à E à l'aide d'un déterminant nul.

Indication 13 Calculer son déterminant.

Indication 14 Calculer le déterminant.

Indication 15 Déterminer les racines du déterminant.

Indication 16 Déterminer pour quelles valeurs de (a, b) le déterminant s'annule.

Indication 18
1. Pas de piège.
2. Déterminer les racines de $\det(M - \lambda I_3)$ et résoudre $MX = \lambda X$.
3. Considérer la concaténation des bases trouvées à la question précédente.
4. Exprimer la formule du changement de base.

Indication 19 Calculer les images de $(1, 0, 0), (0, 1, 0)$ et $(0, 0, 1)$ par f.

Indication 20
1. Calculer les images par p de la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Exprimer q et s en fonction de p.
3. Utiliser le produit matriciel.

Indication 21 Calculer les images de $1, X, X^2$ et X^3 par f.

Indication 22 Déterminer φ_a^{-1}.

Indication 23
1. Montrer que B' est une famille libre.
2. Exprimer les images de B' par f dans B'.
3. Traduire les relations sur les colonnes en un élément du noyau puis utiliser le théorème du rang.

Indication 24 Trouver deux combinaisons linéaires nulles de colonnes, en déduire deux éléments de $\mathrm{Ker}(f)$ et utiliser le théorème du rang.

Indication 25
1. Traduire les relations sur les colonnes en un élément du noyau puis utiliser le théorème du rang.

2. Montrer que la concaténation de deux bases est libre.

3. Il suffit de calculer les images.

Indication 26 1. Montrer que la famille B' est libre et exprimer les images de ses éléments dans B'.

2. Exprimer A en fonction de $Mat_{B'}(f)$.

Indication 27 Considérer l'application canoniquement associée et trouver quelle propriété de f implique l'existence de B.

Indication 28 Interpréter A et B comme des matrices d'applications linéaires.

Indication 29 Trouver une base de $M_n(\mathbb{R})$ formée de matrices de projections.

Indication 30 Raisonner par analyse/synthèse en traduisant sur la base B la forme de la matrice.