

Produit scalaire

Dans tout le chapitre, les espaces vectoriels considérés sont sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

1 Produits scalaires

Définition 1. Soit E un \mathbb{R} -ev. On appelle **produit scalaire** (p.s.) sur E une forme $\Phi : E^2 \rightarrow \mathbb{R}$ qui est :

1. **symétrique:** $\forall x, y \in E, \Phi(x, y) = \Phi(y, x)$;
2. **bilinéaire:** (c-à-d linéaire vis-à-vis de chacune de ses variables).
 $\forall x_1, x_2 \in E, \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \forall y \in E,$

$$\Phi(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) = \lambda_1 \Phi(x_1, y) + \lambda_2 \Phi(x_2, y)$$

3. **positive:** $\forall x \in E, \Phi(x, x) \geq 0$
4. **définie :** $\Phi(x, x) = 0$ uniquement si $x = 0_E$.

Dans ce cas, on notera $\Phi(x, y) = (x | y)$, ou parfois (x, y) , $\langle x | y \rangle$, $\langle x, y \rangle$ ou encore $x \cdot y$.

Définition 2. • Un \mathbb{R} -ev E muni d'un p.s. $(\cdot | \cdot)$ est appelé **espace préhilbertien réel**.

- Un espace préhilbertien réel de dimension finie est appelé **espace euclidien**.

Exemples 1.

1. **Sur** $E = \mathbb{R}^n$:

Si $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, alors le p.s. usuel de x et y est:

$$(x | y) := \sum_{i=1}^n x_i y_i = x^T y$$

2. **Sur** $E = \mathcal{C}^0([a; b], \mathbb{R})$, où $a < b$

Si $f, g \in \mathbb{E}$, le p.s. usuel entre f et g est:

$$(f | g) := \int_a^b f(t)g(t) dt$$

3. **Sur** $E = \mathbb{R}[X]$:

Soit $a < b$. Si $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, le p.s. usuel entre P et Q est:

$$(P | Q) := \int_a^b P(t)Q(t) dt = \int_a^b PQ$$

Dans la suite, $(E, (\cdot | \cdot))$ désigne un espace préhilbertien réel.

2 Normes euclidiennes

Définition 3. Pour tout $x \in E$, on pose

$$\|x\| := \sqrt{(x | x)}$$

qui est bien défini, car $(x | x) \geq 0$.

L'application $\begin{matrix} E & \rightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & \|x\| \end{matrix}$ est ce que l'on appelle la **norme associée au p.s.** $(\cdot | \cdot)$.

On dit alors que c'est une norme euclidienne.

Exemples 2.

1. La norme usuelle sur \mathbb{R}^n :

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

2. La norme usuelle sur $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$:

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b f^2}$$

Proposition 1.

Pour tout $x \in E$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

1. $\|x\| = 0 \iff x = 0_E$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \times \|x\|$

Proposition 2 (Produit scalaire et norme). Pour tous $x, y \in E$,

1. $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2(x | y) + \|y\|^2 \quad (E_1)$
2. $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 - 2(x | y) + \|y\|^2 \quad (E_2)$
3. $(x | y) = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) \quad (\text{Formule de polarisation})$

Remarque. Une conséquence du 3. est qu'un p.s. est entièrement caractérisé par sa norme.

Exemples 3.

1. L'application $N : (x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + 2xy + 3y^2}$ est-elle une norme euclidienne sur \mathbb{R}^2 ?
2. L'application $M : (x, y) \mapsto \max(|x|, |y|)$ est-elle une norme euclidienne?

Théorème 3 (Inégalité de Cauchy-Schwarz). Pour tous $x, y \in E$,

$$|(x | y)| \leq \|x\| \times \|y\|$$

avec égalité ssi x et y sont colinéaires.

Exemples 4.

1. Sur \mathbb{R}^n , si $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, cela donne:

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \times \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}$$

2. Montrer que pour tout réel (x_1, \dots, x_n) , on a $\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \leq n \sum_{i=1}^n x_i^2$.

3. Sur $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$, pour tous $f, g \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$:

$$\left| \int_a^b f \cdot g \right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2} \times \sqrt{\int_a^b g^2}$$

4. Montrer que pour tout $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$,

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \sqrt{b-a} \sqrt{\int_a^b f^2(t) dt}.$$

Théorème 4 (Inégalité triangulaire). Pour tout $x, y \in E$,

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

avec égalité ssi x et y sont "positivement liés", c-à-d s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $x = \lambda y$, ou $y = \lambda x$.

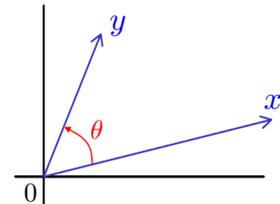
Exemple 5. : Un cas particulier: le p.s. usuel sur \mathbb{R}^2

Soit $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$. On rappelle que $(x | y) = x_1 y_1 + x_2 y_2$.

On a

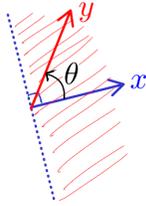
$$(x | y) = \|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos(\theta)$$

où θ désigne l'angle entre x et y .



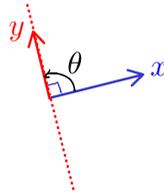
Interprétation du signe de $(x | y)$: ce signe dépend de celui de $\cos(\theta)$!

Si $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$



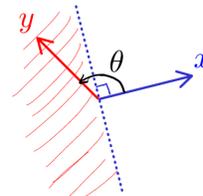
$$(x | y) > 0$$

Si $\theta = \frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$



$$(x | y) = 0$$

Si $\theta \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$



$$(x | y) < 0$$

3 Familles orthogonales, orthonormales

Définition 4. Soit $x, y, e_1, \dots, e_p \in E$. On dit que:

1. x et y sont **orthogonaux** si $(x | y) = 0$.
2. La famille (e_1, \dots, e_p) est **orthogonale** si pour tous $i \neq j$ de $[[1; p]]$, $(e_i | e_j) = 0$.
3. Le vecteur x est **unitaire** si $\|x\| = 1$.
4. La famille (e_1, \dots, e_p) est **orthonormale** (ou **orthonormée**) si elle est orthogonale et composée de vecteurs unitaires.
5. La famille (e_1, \dots, e_p) est une **base orthonormée** s'il s'agit à la fois d'une base de E , et d'une famille orthonormée. On note une telle famille BON en abrégé (abréviation officielle).

Exemple 6. La base canonique de \mathbb{R}^n est une BON pour le produit scalaire usuel.

Remarque. Toutes ces définitions dépendent du produit scalaire !!

Exemple 7. $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ ((x, y), (x', y')) & \longmapsto & xx' + (x + x')(y + y') \end{cases}$. C'est un produit scalaire sur \mathbb{R}^2 pour lequel la base canonique n'est pas orthogonale.

Théorème 5.

Une famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.

Remarque. Une famille orthonormée est une famille libre.

Théorème 6 (Théorème de Pythagore). Si une famille (e_1, \dots, e_p) est orthogonale, alors

$$\left\| \sum_{i=1}^n e_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^n \|e_i\|^2$$

Proposition 7.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une BON de E . Soit $x, y \in E$, de coordonnées $Mat_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et

$$Mat_{\mathcal{B}}(y) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \text{ dans } \mathcal{B}.$$

- $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, x_i = (x | e_i)$, et donc $x = (x | e_1)e_1 + \dots + (x | e_n)e_n$ Les coordonnées de x dans une BON sont donc $((x | e_1), \dots, (x | e_n))$.

$$2. (x | y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i = (x_1 \ \dots \ x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$3. \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$$

Remarque. Autrement dit, lorsque l'on représente les vecteurs de E par leurs vecteurs coordonnées dans une BON, alors tout se ramène à manipuler des vecteurs de \mathbb{R}^n , muni du p.s. USUEL.

4 Orthonormalisation de Gram-Schmidt

Soit (e_1, \dots, e_p) une famille libre de vecteurs de E .

Objectif: construire une famille **orthonormée** $(\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_p)$ telle que:

$$\begin{cases} \text{Vect}(\hat{e}_1) &= \text{Vect}(e_1) \\ \text{Vect}(\hat{e}_1, \hat{e}_2) &= \text{Vect}(e_1, e_2) \\ \text{Vect}(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3) &= \text{Vect}(e_1, e_2, e_3) \\ &\vdots \\ \text{Vect}(\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_p) &= \text{Vect}(e_1, \dots, e_p) \end{cases}$$

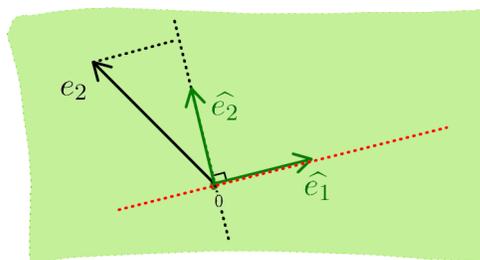
4.1 Idée de la construction : traiter les e_1, \dots, e_p un par un, de gauche à droite

- Normalisation de e_1 , de sorte que $\text{Vect}(\hat{e}_1) = \text{Vect}(e_1)$.

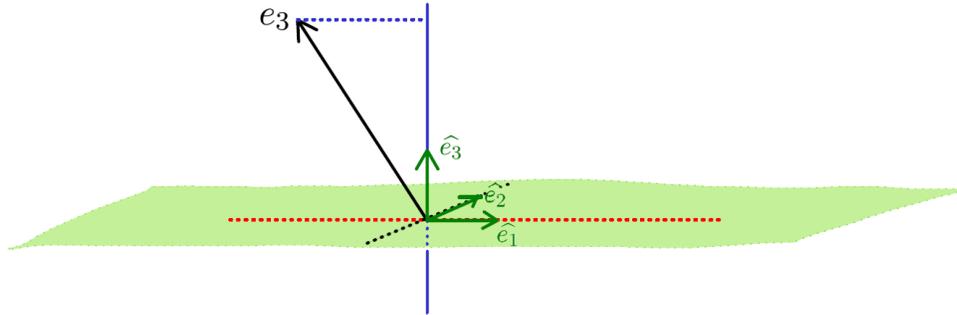


- "Redressement" et normalisation de e_2 , de sorte que :

$$\begin{cases} \hat{e}_2 \perp \hat{e}_1 \\ \|\hat{e}_2\| = 1 \\ \text{Vect}(\hat{e}_1, \hat{e}_2) = \text{Vect}(e_1, e_2) \end{cases}$$



- Idem pour e_3 :
$$\begin{cases} \hat{e}_3 \perp \hat{e}_1 \text{ et } \hat{e}_3 \perp \hat{e}_2 \\ \|\hat{e}_3\| = 1 \\ \text{Vect}(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3) = \text{Vect}(e_1, e_2, e_3) \end{cases}$$



Résultat des transformations :



4.2 Comment calculer les $\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_p$?

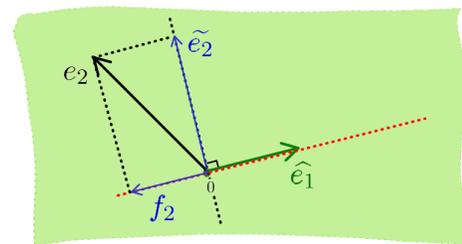
- Pour \hat{e}_1 : $\hat{e}_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}$, de sorte que $\|\hat{e}_1\| = \frac{\|e_1\|}{\|e_1\|} = 1$.



- Pour \hat{e}_2 : un bon candidat pour être orthogonal à \hat{e}_1 :

$$\tilde{e}_2 := e_2 - f_2$$

où f_2 est le vecteur représenté ci-contre.



Or, $f_2 = (e_2 | \hat{e}_1) \hat{e}_1$; donc

$$\tilde{e}_2 = e_2 - \underbrace{(e_2 | \hat{e}_1) \hat{e}_1}_{\substack{\text{composante de } e_2 \\ \text{selon } \hat{e}_1}}$$

Il est alors facile de démontrer que $\langle \tilde{e}_2, \hat{e}_1 \rangle = 0$, et il ne reste plus qu'à normaliser \tilde{e}_2 :

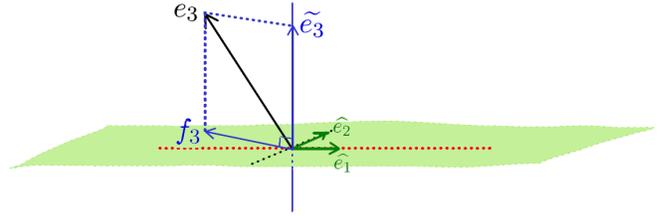
$$\hat{e}_2 := \frac{\tilde{e}_2}{\|\tilde{e}_2\|}$$

On remarque que $\tilde{e}_2 \neq 0_E$ car (e_1, e_2) est libre.

- Pour \widehat{e}_3 :

On pose $\widetilde{e}_3 := e_3 - f_3$ c'est-à-dire :

$$\widetilde{e}_3 := e_3 - \underbrace{[(e_3 | \widehat{e}_1) \widehat{e}_1 + (e_3 | \widehat{e}_2) \widehat{e}_2]}_{\substack{\text{composante de } e_3 \\ \text{selon } \widehat{e}_1 \text{ et } \widehat{e}_2}}$$



\widetilde{e}_3 est alors orthogonal à \widehat{e}_1 et \widehat{e}_2 . On pose alors $\widehat{e}_3 := \frac{\widetilde{e}_3}{\|\widetilde{e}_3\|}$, pour être de norme 1.

On remarque, à nouveau, que $\widetilde{e}_3 \neq 0_E$ car sinon, on aurait $e_3 \in \text{Vect}(\widehat{e}_1, \widehat{e}_2) = \text{Vect}(e_1, e_2)$ et cela contredit la liberté de (e_1, e_2, e_3) .

4.3 L'algorithme général et le théorème

Théorème 8 (Orthonormalisation de Gram-Schmidt). Soit (e_1, \dots, e_p) une famille libre de E . On construit par récurrence la famille $(\widehat{e}_1, \dots, \widehat{e}_p)$ de la façon suivante:

- $\widehat{e}_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}$
- $\forall k \in \llbracket 1; p-1 \rrbracket$, si $\widehat{e}_1, \dots, \widehat{e}_k$ sont construits, alors on définit \widehat{e}_{k+1} par:

$$\widetilde{e}_{k+1} := e_{k+1} - \underbrace{\sum_{i=1}^k (e_{k+1} | \widehat{e}_i) \widehat{e}_i}_{\substack{\text{on enlève à } e_{k+1} \\ \text{ses composantes} \\ \text{selon } \widehat{e}_1, \dots, \widehat{e}_k}} \quad \text{puis} \quad \widehat{e}_{k+1} := \frac{\widetilde{e}_{k+1}}{\|\widetilde{e}_{k+1}\|}$$

Cette famille, appelée "orthonormalisée de (e_1, \dots, e_p) ", vérifie les propriétés suivantes :

1. $(\widehat{e}_1, \dots, \widehat{e}_p)$ est orthonormée (d'où son nom) ;
2. $\forall k \in \llbracket 1; p \rrbracket$, $\text{Vect}(\widehat{e}_1, \dots, \widehat{e}_k) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ (préservation de tous les sev intermédiaires).

Remarque. Une conséquence simple et importante de cet algorithme est que si E est de dimension finie (espace euclidien), alors il admet des BON. En effet, il suffit d'appliquer l'algorithme à n'importe laquelle de ses bases pour obtenir une BON.

Théorème 9 (Théorème de la BON incomplète).

Si E est de dimension finie et si $\mathcal{E} := (e_1, \dots, e_p)$ une famille orthonormée de E , alors on peut la compléter en une BON de E .

Exemple 8. Calculer l'orthonormée de $(1, X, X^2)$ pour le produit scalaire $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t) dt$.

5 Orthogonal d'une partie de E / d'un sev de E de dimension finie

Définition 5. Soit A et B deux sous-ensembles de E . On dit que A est orthogonal à B sont orthogonaux, et on note $A \perp B$ si

$$\forall (x, y) \in A \times B, \langle x, y \rangle = 0.$$

Remarque. Si A est orthogonal à B , B est orthogonal à A .

Définition 6. Soit $A \subset E$. On note A^\perp l'ensemble des vecteurs de E qui sont orthogonaux à tous les vecteurs de A :

$$A^\perp = \{x \in E \mid \forall a \in A, \langle x, a \rangle = 0\}$$

L'ensemble A^\perp est appelé **orthogonal de A** .

Remarque. Si $A \perp B$, alors $A \subset B^\perp$ (et $B \subset A^\perp$).

Théorème 10 (Orthogonal d'une partie $A \subset E$).
Soit $A \subset E$, alors A^\perp est un sev de E .

Proposition 11.

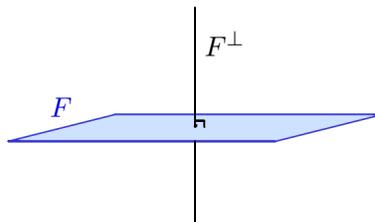
Soit F un ssev de E de dimension finie, (e_1, \dots, e_p) une base de F . Alors une partie A est orthogonale à F si et seulement si $\forall a \in A, \langle a, e_i \rangle = 0$.

Proposition 12.

Soit F un sev **de dimension finie** (ce qui n'implique pas que le sev F^\perp soit lui-même de dimension finie).

Alors, F^\perp est un supplémentaire de F dans E . Autrement dit :

$$E = F \oplus F^\perp$$



Remarque. Si F n'est pas de dimension finie, on n'a pas forcément $F \oplus F^\perp = E$ (cf td ex 19)

Proposition 13.

Si F est de dimension finie, F^\perp (qui n'est pas forcément de dimension finie) est l'**unique** sev de E qui est

1. orthogonal à F (au sens où ses vecteurs sont orthogonaux à ceux de F);
2. un supplémentaire de F dans E .

On peut donc dire "**LE**" supplémentaire orthogonal de F .

Proposition 14.

Soit F de dimension finie, on a :

$$(F^\perp)^\perp = F$$

Théorème 15.

on suppose que E est de dimension finie $n \in \mathbb{N}$.

1. Si F un sev de E et que

- (f_1, \dots, f_p) est une BON de F ;
- (h_1, \dots, h_q) est une BON de F^\perp (avec $q = n - p$, nécessairement) ;

alors la famille $\mathcal{E} = (f_1, \dots, f_p, h_1, \dots, h_q)$ est une BON de E .

2. Réciproquement, si $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ est une BON de E et $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, alors si on pose :

$$\begin{cases} F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k) \\ G = \text{Vect}(e_{k+1}, \dots, e_n) \end{cases}, \text{ on a } E = F \oplus G, \text{ et } G = F^\perp.$$

Définition 7. Supposons que E est de dimension finie. Si F est un hyperplan, alors F^\perp est une droite vectorielle, dirigée par un vecteur u . Ce vecteur est appelé vecteur normal à l'hyperplan F .

Exemple 9. Déterminer un vecteur normal à F où $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y - 2z + 3t = 0\}$.

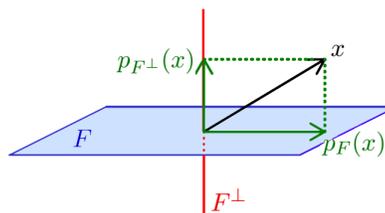
6 Projecteurs orthogonaux

Dans cette partie, on fixe F un sev de E **de dimension finie**. On rappelle que dans ce cas, on a $F \oplus F^\perp = E$, même si E et F^\perp peuvent eux ne pas être de dimension finie.

Définition 8. Le projecteur orthogonal sur F est le projecteur p_F sur F parallèlement à F^\perp .

Symétriquement, dans ce cours, p_{F^\perp} désigne le projecteur sur F^\perp parallèlement à F .

Par définition, pour tout $x \in E$, $x = p_F(x) + p_{F^\perp}(x)$.

**Théorème 16.**

Si (e_1, \dots, e_p) est une BON de F , alors pour tout $x \in E$:

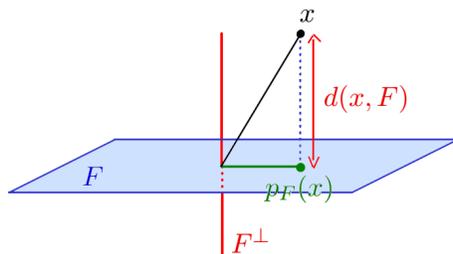
$$p_F(x) = (x | e_1)e_1 + \dots + (x | e_p)e_p$$

Théorème 17.

Soit F un sev de dimension finie. Soit $x \in E$.

L'ensemble $\{\|x - y\| \mid y \in F\}$ des distances entre x et les vecteurs de F , admet un minimum, atteint (uniquement) pour $y = p_F(x)$.

Définition 9. Ce minimum $\|x - p_F(x)\| = \min_{y \in F} (\|x - y\|)$ est appelé la **distance entre x et F** , et est noté $d(x, F)$.



Remarque. $d(x, F)$ vaut donc $\|p_{F^\perp}(x)\|$, puisque $p_{F^\perp}(x) = x - p_F(x)$. Si F^\perp est de dimension finie, inférieure à celle de F , il est parfois plus rapide de déterminer $p_{F^\perp}(x)$

Exemple 10. On travaille dans \mathbb{R}^3 muni du produit scalaire usuel. Déterminer la distance du vecteur $u = (1, 1, 1)$ au ssev $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + 2y - z = 0\}$.