

Réponses du TD n 22

Réponse 1

$$\text{Mat}_B(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Réponse 2} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Réponse 3} \quad 1. \begin{pmatrix} -1 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$2. \text{Mat}_{B'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$3. \text{Mat}_{B''}(f) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 26 \\ 0 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Réponse 4} \quad 1. f(x, y, z) = (x + 2y - z, 2x + y + z, 2y + 2z).$$

$$2. \text{ Soit } P = aX^2 + bX + c, g(P) = (c + 2b - a) + (2c + b + a)X + (2b + 2a)X^2.$$

$$3. \text{ Soit } P = aX^2 + bX + c, h(P) = (c + 2b - a, 2c + b + a, 2b + 2a)$$

$$\text{Réponse 6} \quad 1. u(F) \subset F. \text{ Autrement dit, } F \text{ est stable par } u \text{ et } G \text{ est stable par } u.$$

$$2. u(F) \subset G \text{ et } u(G) \subset F.$$

$$3. u(F) \subset F \text{ et } u(G) \subset F \text{ donc } \text{Im}(u) \subset F.$$

$$\text{Réponse 7} \quad 1. \text{Ker}(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right). \quad \text{Ker}(f) = \text{Vect}((2, 2, 1), (-1, -2, -2)) = \text{Vect}((2, 2, 1), (1, 2, 2)).$$

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}((0, -1, 1)).$$

$$2. \text{Ker}(u) = \text{Vect}(2X^2 + 2, -X^2 + 4X - 3) = \text{Vect}(X^2 + 1, 2X - 1), \text{Im}(u) = \text{Vect}(-6X - 2) = \text{Vect}(3X + 1).$$

$$\text{Réponse 8} \quad 1. \text{Ker}(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right). \quad \text{Ker}(u) = \text{Vect}(2X^2 + 2X + 4) \text{ et } \text{Im}(u) = \text{Vect}((1, 2, 6), (5, 6, 0)).$$

$$2. u(3X^2 - 2X - 1) = (11, 14, 6).$$

$$3. \text{ la matrice n'est donc pas inversible.}$$

$$4.$$

$$\text{Mat}_{B'C}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Réponse 9} \quad 1. \text{ de rang 2 si } \alpha = 0, \text{ de rang 3 sinon.}$$

$$2. \text{ Si } \alpha = 0:$$

$$\text{Ker}(f) = \text{Vect}(e_1 - e_3, e_2 - e_4). (e_1, e_2) \text{ est une base de } \text{Im}(f).$$

$$\text{ Si } \alpha \neq 0.$$

$$\text{Ker}(f) = \text{Vect}(e_1 - e_3) (f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4)) \text{ base de } \text{Im}(f).$$

$$\text{Réponse 10} \quad 1. 1 \text{ et } 4$$

$$2. \text{Ker}(u - id) = \text{vect}((1, -1, 0), (0, 1, -1)) \text{ et } \text{Ker}(u - 4id) = \text{Vect}((1, 1, 1)).$$

$$3. \text{ concaténation des bases est une base}$$

$$4. \text{ pour } Q = P_{BB'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$5. A \text{ inversible.}$$

$$\text{Réponse 12} \quad E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 2x - z + y = 0\}$$

$$\text{Réponse 14} \quad \text{oui}$$

$$\text{Réponse 15} \quad \text{pour } m = 0, 2 \text{ et } -1, \text{ la matrice est non inversible}$$

$$\text{Réponse 16} \quad \text{La matrice } M \text{ est inversible si et seulement si } 1 + 2a + 2b \neq 0 \text{ et } 1 + 2a - 2b \neq 0.$$

$$\text{Réponse 18} \quad 1. \det(M - \lambda I_3) = (2 - \lambda)(1 - \lambda)^2.$$

$$\det(M - \lambda I_3) = 0 \text{ si et seulement si } \lambda = 2 \text{ ou } \lambda = 1.$$

$$2. \text{Ker}(M - I_3) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, x - y + z = 0 \right\} = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\text{Ker}(M - 2I_3) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, x = y = z \right\} = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$3. (v_1, v_2, v_3) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3 \text{ et dans cette base, la matrice de } u \text{ est } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$4. \text{ La matrice de passage } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ convient.}$$

$$\textbf{Réponse 19} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Réponse 20 On note $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

$$1. \text{Mat}_B(p) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$2. \text{Mat}_B(s) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Par calcul matriciel, on trouve $p(1, 2, 3) = (0, 2, 4)$, $p(1, 1, 1) = (0, 1, 2)$ et $s(1, 2, 3) = (-1, 2, 5)$, $s(1, 1, 1) = (-1, 1, 3)$.

$$\textbf{Réponse 21} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{pmatrix}$$

$$\textbf{Réponse 22} M_a^{-1} = M_{-a} = \begin{pmatrix} 1 & -a & a^2 \\ 0 & 1 & -2a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Réponse 23 1. Il suffit de montrer que cette famille est libre.

$$2. \text{Mat}_{B'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Une base de l'image est (ϵ_1, ϵ_2) . ϵ_3 forme une base du noyau.

$$\textbf{Réponse 24} \text{Ker}(f) = \text{Vect}((1, 1, -1, 0), (1, 0, -1, 1)). \quad \text{Im}(f) = \text{Vect}((1, 2, -1), (1, -1, -1)).$$

$$\textbf{Réponse 25} 1. \text{Ker } f = \text{vect}(1, 1, 1) \quad \text{Im } f = \text{vect}((2, -1, -1), (-1, 2, -1)).$$

2. il suffit de montrer que ces deux espaces sont en somme directe.

3. On note $e_1 = (1, 1, 1)$, $e_2 = (2, -1, -1)$, et $e_3 = (-1, 2, -1)$, la matrice de f dans cette base est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\textbf{Réponse 26} 1. \text{ il suffit de montrer que c'est une famille libre. } \text{Mat}_{B'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. $\forall n \in \mathbb{N}$

$$A^n = \begin{pmatrix} -n+1 & n & n \\ 0 & 1 & 0 \\ -n & n & n+1 \end{pmatrix}$$

Réponse 27 oui

Réponse 31 1.

2. On a $P(-a) = \prod_{i=1}^n (r_i - a)$ et $P(-b) = \prod_{i=1}^n (r_i - b)$ car, dans ces deux cas-là, la matrice est triangulaire.

$$3. P(X) = \frac{1}{a-b} \left(\prod_{i=1}^n (r_i - b) - \prod_{i=1}^n (r_i - a) \right) X + \frac{1}{a-b} \left(a \prod_{i=1}^n (r_i - b) - b \prod_{i=1}^n (r_i - a) \right). \quad \Delta_1 = P(0) = \frac{1}{a-b} \left(a \prod_{i=1}^n (r_i - b) - b \prod_{i=1}^n (r_i - a) \right). \\ \Delta_2 = \frac{(-b)^n - (-a)^n}{a-b} = (-1)^n \frac{b^n - a^n}{a-b}.$$

$$4. P(X) = \prod_{i=1}^n (r_i - a) + \sum_{i=1}^n \prod_{j \neq i}^r (r_j - a)(X + a)$$

Réponse 32 1. il est nul.

2. On a $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $a_i = \frac{\prod_{j=1}^n (y_j - x_i)}{\prod_{j \neq i} (x_j - x_i)} \neq 0$.

3. $D_n = \frac{\sum_{i < j} (x_j - x_i)(y_j - y_i)}{\prod_{i,j} (x_i + y_j)}$

Réponse 13 la matrice est inversible pour tout x tel que $x \neq 1 - a$.