Correction du TD n 22

Correction 1 On connaît déjà les coordonnées de $f(e_1)$ et $f(e_2)$ dans B. Reste à calculer $f(e_3)$. On sait que $f(3e_1 + e_2 - e_3) = 0_E$ donc, par linéarité de f, $f(e_3) = 3f(e_1) + f(e_2)$. Avec les valeurs données dans l'énoncé, on en déduit que :

$$\begin{aligned} f(e_3) &= 3(2e_1 + e_3) + (e_1 + e_2 + e_3) \\ &= 7e_1 + e_2 + 4e_3 \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$Mat_B(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Correction 2 On a $g(1) = 0$, $g(X) = 1$, $g(X^2) = 2X + 2$ et $g(X^3) = 3X^2 + 6X + 3$ d'où la matrice suivante:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Correction 3 1. Il faut déterminer les images de la base canonique:

- $f(1) = -1$.
- $f(X) = (X + 1) - (X + 2) = -1$.
- $f(X^2) = 2(X + 1)(X - 1) - (X + 2)^2 = X^2 - 4X - 6$.

La matrice de f dans la base canonique est donc:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. On va déterminer les images des trois vecteurs de B' par f puis exprimer ces images dans la base B'. Pour cela on utilise la matrice de f dans la base canonique. On a :

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donc $f(X - 1) = 0$. On en déduit que les coordonnées de $f(X - 1)$ dans B' sont $(0, 0, 0)$.

De même, on a :

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

donc $f(-X^2 + 4X + 1) = -X^2 + 4X + 1$. Les coordonnées de $f(-X^2 + 4X + 1)$ dans B' sont $(0, 1, 0)$.

Enfin, $f(1) = -1$ donc les coordonnées de $f(1)$ dans B' sont $(0, 0, -1)$.

On a donc :

$$Mat_{B'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. On sait déjà que les images de $X - 1$ et $-X^2 + 4X + 1$ ont pour coordonnées dans B" respectivement $(0, 0, 0)$ et $(0, 1, 0)$. Déterminons les coordonnées de l'image de $X^2 - 2X$. On a :

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donc $f(X^2 - 2X) = X^2 - 4X - 4$. Il nous faut maintenant déterminer les coordonnées de ce polynôme dans la base B". Il nous faut, pour cela, trouver $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\alpha(X - 1) + \beta(-X^2 + 4X + 1) + \gamma(X^2 - 2X) = X^2 - 4X - 4.$$

En identifiant les coordonnées, on doit résoudre le système suivant:

$$\left\{ \begin{array}{rrrcr} & -\beta & +\gamma & = & 1 \\ \alpha & +4\beta & -2\gamma & = & -4 \\ -\alpha & +\beta & & = & -4. \end{array} \right.$$

On trouve $\alpha = 2, \beta = -2$ et $\gamma = -1$ donc les coordonnées de $f(X^2 - 2X)$ dans la base B" sont $(2, -2, -1)$. On a :

$$Mat_{B"}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Correction 4 1. Soit $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et C la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Alors :

$$\begin{aligned} Mat_C(f(X)) &= Mat_C(f)Mat_C(c) \\ &= A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On en déduit que f est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui à (x, y, z) associe :

$$(x + 2y - z, 2x + y + z, 2y + 2z).$$

2. Soit $P = aX^2 + bX + c$, alors :

$$\begin{aligned} Mat_B(g(P)) &= AMat_B(P) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$g(P) = (c + 2b - a) + (2c + b + a)X + (2b + 2a)X^2.$$

3. Par définition, $(c + 2b - a, 2c + b + a, 2b + 2a)$ sont les coordonnées de :

$$h(aX^2 + bX + c)$$

dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ donc h est l'application de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}^3$ qui à $aX^2 + bX + c$ associe :

$$(c + 2b - a, 2c + b + a, 2b + 2a).$$

Correction 5 1. D'après le théorème du rang appliqué à f^4, on sait que :

$$\dim(\mathrm{Ker}(f^4)) + \mathrm{rg}(f^4) = n,$$

il suffit donc de montrer que la somme est directe. Soit donc $x \in \mathrm{Ker}(f^4) \cap \mathrm{Im}(f^4)$. Alors $f^4(x) = 0_{\mathbb{R}^n}$ et il existe $a \in \mathbb{R}^n$ tel que $f^4(a) = x$. On a alors, en appliquant f à l'égalité $f^4(a) = x$:

$$\begin{aligned} f(x) &= f^5(a) \\ &= f^4(a) \text{ car } f^4 = f^5 \end{aligned}$$

Ainsi, $f(x) = x$ ce qui implique, en appliquant f^3, que $f^4(x) = f(x)$ puis $f^4(x) = x$ puisque $f(x) = x$. Or, $f^4(x) = 0_{\mathbb{R}^n}$ puisque $x \in \mathrm{Ker}(f^4)$ donc $x = 0_{\mathbb{R}^n}$ est la somme est bien directe. Par égalité des dimensions, on a bien $\mathrm{Ker}(f^4) \oplus \mathrm{Im}(f^4) = \mathbb{R}^n$.

2. Montrons que A inversible implique $A = I_n$.
Si A est inversible, A^4 l'est aussi. On compose l'égalité $A^4 = A^5$ par l'inverse de A^4 et on obtient $A = I_n$. Ainsi, on a bien A non inversible ou $A = I_n$.

Correction 6 Notons $B = (f_1, \cdots, f_r, g_1, \cdots, g_m)$ avec $(f_1, \cdots, f_r)$ une base de F et $(g_1, \cdots, g_m)$ une base de G.

1. La forme de la matrice indique que les images de $(f_1, \cdots, f_r)$ sont des combinaisons linéaires de $(f_1, \cdots, f_r)$ (puisque leurs coordonnées selon $(g_1, \cdots, g_m)$ sont nulles). On a donc $u(F) \subset F$. Autrement dit, F est stable par u. De même, les images de $(g_1, \cdots, g_m)$ sont des combinaisons linéaires de $(g_1, \cdots, g_m)$ donc G est stable par u.

2. Les images de $(f_1, \cdots, f_r)$ sont des combinaisons linéaires de $(g_1, \cdots, g_m)$ donc $u(F) \subset G$ et les images de $(g_1, \cdots, g_m)$ sont des combinaisons linéaires de $(f_1, \cdots, f_r)$ donc $u(G) \subset F$.

3. Cette fois-ci, les images de tous les éléments de B sont des combinaisons linéaires de $(f_1, \cdots, f_r)$. On a donc $u(F) \subset F$ et $u(G) \subset F$. Les deux espaces étant supplémentaires dans E, on a $\mathrm{Im}(u) \subset F$.

Correction 7 1. On commence par déterminer le noyau de A. Pour cela, on résout le système:

$$AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrcl} x & -y & +2z & = & 0 \\ -2x & +2y & -4z & = & 0 \\ x & -y & +2z & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow x - y + 2z = 0.$$

On a donc :

$$\mathrm{Ker}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, x - y + 2z = 0 \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Or :

$$\mathrm{Ker}(A) = \{Mat_B(a), a \in \mathrm{Ker}(f)\},$$

il nous faut donc déterminer les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ dont les coordonnées dans B sont $(1, 1, 0)$ et $(-2, 0, 1)$.
Le vecteur de $\mathbb{R}^3$ dont les coordonnées dans B sont $(1, 1, 0)$ est le vecteur :

$$1(1, 1, 1) + 1(1, 1, 0) = (2, 2, 1),$$

le vecteur dont les coordonnées dans B sont $(-2, 0, 1)$ est le vecteur :

$$-2(1, 1, 1) + 1(1, 0, 0) = (-1, -2, -2).$$

On a donc :

$$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}\left((2,2,1),(-1,-2,-2)\right) = \mathrm{Vect}\left((2,2,1),(1,2,2)\right).$$

Par le théorème du rang, on sait que l'image de f (et donc l'image de A) est de dimension 1. On a :

$$\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}.$$

On cherche ensuite le vecteur dont les coordonnées dans la base B sont $(1,-2,1)$:

$$1(1,1,1) - 2(1,1,0) + 1(1,0,0) = (0,-1,1).$$

On a donc $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left((0,-1,1)\right)$.

2. On sait déjà que le noyau de la matrice est :

$$\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}\right).$$

Il nous faut donc simplement déterminer les polynômes dont les coordonnées dans C sont, respectivement, $(1,1,0)$ et $(-2,0,1)$. On a :

$$1(X-1)^2 + 1(X+1)^2 = 2X^2+2$$

et

$$-2(X-1)^2 + 1(X^2-1) = -X^2+4X-3,$$

donc :

$$\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Vect}\left(2X^2+2, -X^2+4X-3\right) = \mathrm{Vect}\left(X^2+1, 2X-1\right),$$

car $-X^2+4X-3 = -(X^2+1)+2(2X-1)$.

On sait déjà que :

$$\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\right),$$

il suffit donc de trouver le polynôme dont les coordonnées dans la base C sont $(1,-2,1)$:

$$1(X-1)^2 - 2(X+1)^2 + 1(X^2-1) = -6X-2,$$

donc $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}\left(-6X-2\right) = \mathrm{Vect}\left(3X+1\right)$.

Correction 8 1. On pose $X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et on détermine le noyau de A c'est-à-dire les solutions du système $AX = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$. Le système se réécrit :

$$\begin{cases} 2x-y &= 0\\ -x+2y+3z &= 0\\ y+2z &= 0\end{cases}$$

ce qui est équivalent à $y = 2x = -2z$ donc $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}\right)$. On en déduit que $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Vect}\left(2X^2+2X+4\right)$ car :

$$(X-1)^2 + 2(X+1)^2 - (X^2-1) = 2X^2+2X+4.$$

Par le théorème du rang, on sait que l'image de u est de dimension 2, il suffit donc d'en donner deux vecteurs non colinéaires. On a par exemple :

$$u\left((X-1)^2\right) = 2(1,2,3) - (1,2,0) = (1,2,6),$$

et

$$u\left(X^2-1\right) = 3(1,2,0) + 2(1,0,0) = (5,6,0),$$

donc $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}\left((1,2,6),(5,6,0)\right)$.

On peut aussi remarquer que $C_1 + 2C_2 - C_3$ est nulle donc il existe un élément non-nul dans $\mathrm{Ker}(u)$ (dont les coordonnées sont $(1,2,-1)$), donc

$$\dim(\mathrm{Ker}(u)) \geqslant 1.$$

La matrice n'est clairement pas de rang 1 car toutes ses colonnes ne sont pas colinéaires donc elle est de rang au moins 2. D'après le théorème du rang, on sait que $\dim(\mathrm{Ker}(u)) + \mathrm{rg}(u) = 3$ ce qui impose $\dim\mathrm{Ker}(u) = 1$ et $\mathrm{rg}(u) = 2$. On peut donc affirmer que $\mathrm{Ker}(u)$ est engendré par l'élément dont les coordonnées dans C sont $(1,2,-1)$ c'est-à-dire $2X^2+2X+4$. Pour l'image, on conclut comme ci-dessus en prenant deux vecteurs non colinéaires.

2. Les coordonnées de $3X^2-2X-1$ dans la base B sont $(1,0,2)$ donc, par produit matriciel, les coordonnées de son image par u sont $(2,5,4)$. On en déduit que $u(3X^2-2X-1) = 2(1,2,3)+5(1,2,0)+4(1,0,0) = (11,14,6)$.

3. On va vu que son noyau n'était pas réduit au vecteur nul, la matrice n'est donc pas inversible.

4. On commence par calculer les coordonnées des vecteurs de B' dans B. On a :
$$Mat_B(X^2-1) = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, Mat_B(4) = \begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix} \text{ et } Mat_B(2X^2+2X+4) = \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}.$$
(les coordonnées du dernier vecteur ayant été calculé précédemment !).
Par produit matriciel, on en déduit les coordonnées dans C des images de B', on peut donc écrire directement la matrice :
$$Mat_{B'C}(u) = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\3 & -5 & 0\\2 & -3 & 0\end{pmatrix}$$

Correction 9 1. On fait les opérations élémentaires suivantes :
$$L_4 \leftarrow L_4 - \alpha L_1 \text{ et } L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1.$$
On obtient la matrice suivante, équivalente en lignes à A:
$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\0 & 1 & 0 & 1\\0 & 0 & 0 & \alpha\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$
Cette matrice est de rang 2 si $\alpha = 0$, de rang 3 sinon.

2. Si $\alpha = 0$:
Alors les colonnes 1 et 3 sont égales donc $f(e_1) = f(e_3)$. On en déduit que $e_1 - e_3 \in \mathrm{Ker}(f)$.
Les colonnes 2 et 4 sont aussi égales donc $f(e_2) = f(e_4)$ et, par suite, on a$e_2 - e_4 \in \mathrm{Ker}(f)$. On sait que $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(A) = 2$ donc, d'après le théorème du rang, $\dim\mathrm{Ker}(f) = 2$. Les deux éléments non colinéaires que nous venons de trouver engendrent donc le noyau. Pour trouver une base de l'image, il suffit de donner deux éléments non colinéaires de l'image. Par exemple $f(e_1)$ et $f(e_2)$. D'après la matrice, on sait que :
$$f(e_1) = e_1 + 2e_2 \text{ et } f(e_2) = e_2,$$
donc $(e_1 + 2e_2, e_2)$, ou plus simplement (e_1, e_2) est une base de $\mathrm{Im}(f)$.
Si $\alpha \neq 0$.
On remarque que les colonnes 1 et 3 sont identiques donc $f(e_1) = f(e_3)$. Par le théorème du rang, on sait que le noyau est de dimension 1 et $e_1 - e_3$ est un élément non-nul du noyau donc c'en est une base.
On sait que l'image $\mathrm{Im}(f)$ est engendrée par $(f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4))$. Or $f(e_1) = f(e_3)$, $\mathrm{Im}(f)$ est donc engendrée par la famille $(f(e_1), f(e_2), f(e_4))$, c'est-à-dire $(e_1 + 2e_2 + \alpha e_4, e_2, e_2 + \alpha e_3)$ qui est de cardinal 3. Comme on sait que $\mathrm{rg}(f) = 3$, c'est une base de $\mathrm{Im}(f)$.

Correction 10 1. On calcule le déterminant de $A - \lambda I_3$ en faisant des opérations élémentaires. On peut, par exemple, faire $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3$ puis $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$. On trouve alors :
$$\det(A - \lambda I_3) = (4 - \lambda)(1 - \lambda)^2.$$
Les réels tels que $\mathrm{Ker}(u - \lambda id) \neq \{(0,0,0)\}$ sont donc 1 et 4.

2. La matrice $A - I_3$ n'a que des 1. Elle est donc de rang 1. On a $C_1 = C_2$ donc $u(1,0,0) = u(0,1,0)$ d'où $(1,-1,0) \in \mathrm{Ker}(u - id)$. On a également $C_2 = C_3$ d'où $u(0,1,0) = u(0,0,1)$ donc $(0,1,-1) \in \mathrm{Ker}(u - id)$. D'après le théorème du rang, $\mathrm{rg}(u - id) = 1$ donc $\dim(\mathrm{Ker}(u - id)) = 2$ et on a trouvé deux vecteurs non colinéaires du noyau. On en déduit que :
$$\mathrm{Ker}(u - id) = \mathrm{vect}\left((1,-1,0),(0,1,-1)\right).$$
On remarque que la somme des colonnes de la matrice $A - 4I_3$ est nulle, on a donc $(1,1,1) \in \mathrm{Ker}(u - 4id)$. La matrice étant de rang 2, par le théorème du rang, on sait que $\dim\mathrm{Ker}(u - 4id) = 1$ donc $\mathrm{Ker}(u - 4id) = \mathrm{Vect}\left((1,1,1)\right)$.

3. Il suffit de montrer que la concaténation des bases des deux noyaux est une base de $\mathbb{R}^3$. Comme elle est de cardinal 3, il suffit de montrer qu'elle est libre. On suppose qu'il existe $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que :
$$\lambda_1(1,-1,0) + \lambda_2(0,1,-1) + \lambda_3(1,1,1) = (0,0,0).$$
On a alors :
$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 &= 0\\ -\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= 0\\ -\lambda_2 + \lambda_3 &= 0\end{cases}$$
ce qui impose $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ donc la famille est libre et les deux noyaux sont bien supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

4. On note B la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $B' = ((1,-1,0),(0,1,-1),(1,1,1))$. On sait que :
$$Mat_{B'}(u) = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 4\end{pmatrix}.$$
Par la formule du changement de base, on a :
$$P_{B'B}AP_{BB'} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 4\end{pmatrix}$$

donc pour Q telle que :

$$Q = P_{BB'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

on a la relation souhaitée.

5. On a $\det(A) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 4 \neq 0$ donc la matrice est inversible. On peut aussi dire que, d'après le travail précédent, $\mathrm{Ker}(u) = \{(0,0,0\}$ (puisque $0 \notin \{1,4\}$) donc u (et par conséquent A) est inversible.

Correction 11 1. Supposons qu'il existe $\alpha_0, \cdots, \alpha_{n-1}$ des réels tels que :

$$\alpha_0 x + \cdots + \alpha_{p-1} f^{p-1}(x) = 0.$$

On applique f^{n-1} à cette égalité, on obtient $\alpha_0 f^{n-1}(x) = 0$ ce qui implique, puisque $f^{n-1}(x) \neq 0$, $\alpha_0 = 0$. On revient à l'égalité de départ et on applique cette fois f^{n-2}, on obtient alors $\alpha_1 f^{n-1}(x) = 0_E$ d'où $\alpha_1 = 0$ et ainsi de suite. Tous les coefficients sont égaux à zéro ce qui montre que la famille est libre.

2. On raisonne par double implication.
$\boxed{\Rightarrow}$On choisit $x \in E$ tel que $f^{n-1}(x) \neq 0$. Un tel élément existe puisque $f^{n-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$. À la question précédente, nous avons montré que la famille $(x, f(x), \cdots, f^{n-1}(x))$ est libre. Comme elle est de cardinal n, c'est une base de E, notons-la B. On a alors :

$$Mat_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & 1 \\ \vdots & & & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

d'où la première implication.
$\boxed{\Leftarrow}$On suppose maintenant qu'il existe une base B de E telle que :

$$Mat_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & 1 \\ \vdots & & & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

On a alors :

$$Mat_B(f)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & & 1 \\ 0 & 0 & & & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ \vdots & & & & \ddots & 0 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix},$$

puis :

$$Mat_B(f)^{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

et $Mat_B(f)^n = (0)$. Comme $Mat_B(f)^k = Mat_B(f^k)$, on en déduit que $f^{n-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $f^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Correction 12 Notons $V = (1,1,3)$ et $U = (1,-1,1)$. Soit $X = (x,y,z) \in \mathbb{R}^4$. On raisonne par équivalence, $X \in E \Leftrightarrow (V,U,X)$ sont coplanaires $\Leftrightarrow \det(U,V,X) = 0$. On calcule donc le déterminant :

$D =$

1	1	x
1	-1	y
3	1	z

On fait $C_1 \Leftarrow C_1 + C_2$

$D =$

2	1	x
0	-1	y
4	1	z

puis $L_3 \Leftarrow L_3 - 2L_1$:

$D =$

2	1	x
0	-1	y
0	-1	z-2x

On développe par rapport à la première colonne, on obtient : $D = 2\begin{vmatrix} -1 & y \\ -1 & z-2x \end{vmatrix} = 2(2x-z+y)$. Ainsi, $D = 0 \Leftrightarrow 2x-z+y = 0$ donc $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, 2x-z+y = 0\}$.

Correction 13 On calcule son déterminant. On fait $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ puis on développe par rapport à la première colonne. On trouve $\det(A) = -2(a + x - 1)$. On en déduit que la matrice est inversible pour tout x tel que $x \neq 1 - a$.la matrice est inversible pour tout x tel que $x \neq 1 - a$.

Correction 14 Il suffit de calculer le déterminant de $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. On trouve 6 donc la famille est libre.

Correction 15 Notons D le déterminant cherché. On fait $C_1 \leftarrow C_1 - C_4$, on obtient :

$$D = \begin{vmatrix} -m & 0 & 1 & 2m \\ 1 & m & 0 & 0 \\ -1 & 2m+2 & m & 1 \\ 0 & 0 & 0 & m \end{vmatrix}.$$

On développe par rapport à la dernière ligne, ce qui nous donne :

$$D = m \begin{vmatrix} -m & 0 & 1 \\ 1 & m & 0 \\ -1 & 2m+2 & m \end{vmatrix}.$$

On fait $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 - C_3$, ce qui nous donne :

$$D = m \begin{vmatrix} -(m+1) & 0 & 1 \\ m+1 & m & 0 \\ (m+1) & 2m+2 & m \end{vmatrix}.$$

On factorise D par $m+1$ puis on ajoute la première ligne aux deux autres :

$$D = m(m+1) \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & m & 1 \\ 0 & 2m+2 & m+1 \end{vmatrix}.$$

Enfin, on développe par rapport à la première colonne, on trouve :

$$D = m(m+1)^2(2-m).$$

On en déduit que pour $m = 0, 2$ et -1, la matrice est non inversible, son rang est donc strictement inférieur à 4.

Correction 16 On fait $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3 + C_4$ car la somme des colonnes donne toujours le même nombre. On factorise alors par $1+2a+2b$ puis on enlève la première ligne à toutes les autres lignes. On développe par rapport à la première colonne et on obtient :

$$\det(M) = (1+2a+2b) \begin{vmatrix} 1+a-b & b-a & a-b \\ 0 & 1 & 0 \\ a-b & b-a & 1+a-b \end{vmatrix}.$$

On développe par rapport à la deuxième ligne. On trouve $(1+2a+2b)((1+a-b)^2 - (a-b)^2) = (1+2a+2b)(1+2a-2b)$. La matrice M est donc inversible si et seulement si $1+2a+2b \neq 0$ et $1+2a-2b \neq 0$.

Correction 17 Pour $M = A$, on obtient $\det(2A) = 2\det(A)$. Or $\det(2A) = 2^n \det(A)$ donc $\det(A) = 0$ et A est non inversible. On a donc $\det(A+M) = \det(M)$ pour toute matrice M. Si on suppose par l'absurde que M est non nulle, elle admet une colonne non nulle. On complète cette colonne V en une base $(V, C_1, \dots, C_{n-1})$ de $M_{n1}(\mathbb{R})$. On considère maintenant la matrice M dont la j-ième colonne vaut $-V$ et dont les colonnes sont une permutation de la base trouvée. Ses colonnes forment une famille libre donc elle est inversible. Or $M + A$ a sa j-ième colonne nulle, on a donc $\det(A+M) = 0$ ce qui est une contradiction.

Correction 18

1. On écrit :

$$\det(M - \lambda I_3) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ 2-\lambda & -\lambda & 1 \\ 2-\lambda & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix},$$

en faisant $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3$. On peut alors factoriser le déterminant par $2-\lambda$ et faire $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ puis $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$. On obtient :

$$\det(M - \lambda I_3) = \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda)^2.$$

On a donc $\det(M - \lambda I_3) = 0$ si et seulement si $\lambda = 2$ ou $\lambda = 1$.

2. Si $\lambda = 1$, le système correspondant à $\mathrm{Ker}(M - I_3)$ est $x - y + z = 0$. On a :

$$\mathrm{Ker}(M - I_3) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, x - y + z = 0 \right\} = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

Si $\lambda = 2$, on a alors $y = z$ et le système est équivalent à $x = y = z$. On a donc :

$$\mathrm{Ker}(M - 2I_3) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, x = y = z \right\} = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

3. On pose $v_1 = (1,1,0)$, $v_2 = (1,0,-1)$ et $v_3 = (1,1,1)$. Montrons que (v_1, v_2, v_3) est une famille libre de $\mathbb{R}^3$, ce qui montrera qu'elle en est une base. On suppose donc qu'il existe $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ des réels tels que :

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0_{\mathbb{R}^3}.$$

On a alors : $\left\{ \begin{array}{lcl} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 & = & 0 \\ \alpha_1 + \alpha_3 & = & 0 \\ -\alpha_2 + \alpha_3 & = & 0 \end{array} \right.$ ce qui impose $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. On en déduit que (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ et dans cette base, la matrice de u est diagonale, de la forme :

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

4. La matrice de passage $P = \begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&1\\0&-1&1\end{pmatrix}$ convient.

   Remarque. *Si on prend la base (v_3, v_1, v_2), la matrice de u dans cette base est :*

$$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

   et la matrice de passage $P = \begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}$.

Correction 19 On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
On a $f(e_1) = (1,1)$, $f(e_2) = (1,0)$ et $f(e_3) = (0,-1)$ d'où la matrice suivante:

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}$$

Correction 20 On note $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Soit $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On raisonne par équivalence :

$$X \in E \Leftrightarrow x + 2y - z = 0 \Leftrightarrow X = (x, y, x + 2y) \Leftrightarrow X = x(1,0,1) + y(0,1,2)$$

   donc :

$$E = \text{vect}((1,0,1),(0,1,2)).$$

   On a :

   - $e_1 = \frac{1}{2}(1,0,1) + \dfrac{1}{2}(1,0,-1)$ donc $p(e_1) = \dfrac{1}{2}(1,0,1)$.
   - $e_2 = (0,1,2) - (1,0,1) - (1,0,-1)$ donc $p(e_2) = (0,1,2) - (1,0,1) = (-1,1,1)$ et
   - $e_3 = -\frac{1}{2}(1,0,-1) + \dfrac{1}{2}(1,0,1)$ donc $p(e_3) = \dfrac{1}{2}(1,0,1)$.

   On a donc

$$Mat_B(p) = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-1&\frac{1}{2}\\0&1&0\\\frac{1}{2}&1&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

2. On sait que $p + q = Id$, on a donc $Mat_B(q) = I_3 - Mat_B(p)$ d'où

$$Mat_B(q) = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}&1&-\frac{1}{2}\\0&0&0\\-\frac{1}{2}&-1&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

   De même, on remarque que $s = 2p - Id_{\mathbb{R}^3}$, on a donc :

$$Mat_B(s) = 2Mat_B(p) - I_3 = \begin{pmatrix}0&-2&1\\0&1&0\\1&2&0\end{pmatrix}$$

3. Par calcul matriciel, on trouve $p(1,2,3) = (0,2,4)$, $p(1,1,1) = (0,1,2)$ et $s(1,2,3) = (-1,2,5)$, $s(1,1,1) = (-1,1,3)$.

Correction 21 On a $f(1) = (1,1,1)$, $f(X) = (1,2,3)$, $f(X^2) = (1,4,9)$ et $f(X^3) = (1,8,27)$ d'où la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&4&8\\1&3&9&27\end{pmatrix}$$

Correction 22 On a :

- $\varphi_a(1) = 1$.
- $\varphi_a(X) = X + a$.
- $\varphi_a(X) = (X + a)^2 = X^2 + 2aX + a^2$.

donc :

$$M_a = \begin{pmatrix}1&a&a^2\\0&1&2a\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

On remarque que $\varphi_a^{-1} : P(X) \mapsto P(X - a)$, donc $\varphi_a^{-1} = \varphi_{-a}$, d'où :

$$M_a^{-1} = M_{-a} = \begin{pmatrix}1&-a&a^2\\0&1&-2a\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Correction 23 1. Il suffit de montrer que cette famille est libre. On suppose donc qu'il existe $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ réels tels que $\lambda_1\epsilon_1 + \lambda_2\epsilon_2 + \lambda_3\epsilon_3 = (0,0,0)$. On résout le système :

$$\left\{\begin{array}{l}\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0\\\lambda_1 - \lambda_2 = 0\\\lambda_1 + \lambda_3 = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\lambda_1 = 0\\\lambda_2 = 0\\\lambda_3 = 0\end{array}\right.$$

La famille est libre, et comme elle est de bon cardinal, c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. On va exprimer directement les images des vecteurs de la base B' dans cette base. On a :

$$\begin{aligned} f(\epsilon_1) &= f(e_1)+f(e_2)+f(e_3) \\ &= (3e_1-e_2+e_3)+(e_1+e_2+e_3)+(-3e_1+e_2-e_3) \\ &= e_1+e_2+e_3 \\ &= \epsilon_1. \end{aligned}$$

De même, on montre que :

$$\begin{aligned} f(\epsilon_2) &= f(e_1-e_2) \\ &= f(e_1)-f(e_2) \\ &= (3e_1-e_2+e_3)-(e_1+e_2+e_3) \\ &= 2e_1-2e_3 \\ &= 2\epsilon_2. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f(\epsilon_3) &= f(e_1+e_3) \\ &= f(e_1)+f(e_3) \\ &= (3e_1-e_2+e_3)+(-3e_1+e_2-e_3) \\ &= 0_{\mathbb{R}^3}. \end{aligned}$$

d'où :

$$Mat_{B'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. D'après la matrice $Mat_{B'}(f)$, on voit que l'espace engendré par les colonnes est de dimension 2. L'image est donc de dimension 2 et pour en donner une base, il suffit de donner deux vecteurs non colinéaires de l'image, par exemple, ϵ_1 et $2\epsilon_2$. Plus simplement, une base de l'image est (ϵ_1, ϵ_2). D'après le théorème du rang, on sait que le noyau est de dimension 1, il suffit donc de donner un vecteur non-nul du noyau; on sait que ϵ_3 appartient au noyau et il est non-nul, c'est donc une base du noyau.

Correction 24 On remarque que la somme des deux premières colonnes donne la troisième colonne. Cela se traduit par :

$$f(1,0,0,0)+f(0,1,0,0) = f(0,0,1,0),$$

soit encore $f(1,1,-1,0)=(0,0,0)$. De même, si on soustrait la première colonne à la troisième, on trouve la quatrième, on a donc :

$$f(0,0,1,0)-f(1,0,0,0) = f(0,0,0,1),$$

d'où $f(1,0,-1,1)=(0,0,0)$.

On a trouvé deux éléments non colinéaires de $\mathrm{Ker}(f)$ donc $\dim(\mathrm{Ker}(f)) \geqslant 2$. D'après le théorème du rang, on a $4 = \mathrm{rg}(f) + \dim\mathrm{Ker}(f)$. La matrice A n'est pas de rang 1 puisque toutes ses colonnes ne sont pas colinéaires donc elle est de rang au moins 2. On en déduit que $\mathrm{rg}(f) \geqslant 2$. Le théorème du rang impose $\dim\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{rg}(f) = 2$. Comme on a trouvé deux éléments non colinéaires du noyau, ils engendrent celui-ci donc :

$$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}\left((1,1,-1,0),(1,0,-1,1)\right).$$

Pour donner une base de l'image, il suffit de donner deux éléments non colinéaires de celle-ci. On peut, par exemple prendre $f(1,0,0,0)$ et $f(0,1,0,0)$:

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left((1,2,-1),(1,-1,-1)\right).$$

Correction 25 1. On cherche à déterminer le noyau, on a $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}A$ si $AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. On résout le système suivant:

$$AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y-z=0 \\ -x+2y-z=0 \\ -x-y+2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y-z=0 \\ 3x-3y=0 \; L_2 \leftarrow L_1-L_2 \\ 3x-3z=0 \; L_3 \leftarrow -L_3+L_1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ x=z \end{cases}$$

On a donc $X = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $\mathrm{Ker}f = \mathrm{vect}(1,1,1)$.

D'après le théorème du rang, on sait que l'image est de dimension 2, il suffit donc de donner deux vecteurs non colinéaires de l'image, par exemple, ceux donnés par les deux premières colonnes de la matrice. On a donc :

$$\mathrm{Im}f = \mathrm{vect}\left((2,-1,-1),(-1,2,-1)\right).$$

2. On doit montrer que ces deux espaces sont en somme directe, c'est-à-dire que leur intersection est réduite à zéro. Soit donc $x \in \mathrm{Ker}f \cap \mathrm{Im}f$, alors il existe α, β, γ réels tels que $x = \alpha(1,1,1) = \beta(2,-1,-1)+\gamma(-1,2,-1)$ d'où :

$$\begin{cases} \alpha = 2\beta-\gamma \\ \alpha = -\beta+2\gamma \\ \alpha = -\beta-\gamma \end{cases}$$

En retranchant la première ligne à la troisième, on trouve $\beta = 0$, en retranchant la deuxième à la troisième, on trouve $\gamma = 0$ d'où $\alpha = \beta = \gamma = 0$ et par conséquent $x = 0$; la somme est bien directe. Par ailleurs, on a $\dim(\mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Im} f) = \dim\mathrm{Ker} f + \dim\mathrm{Im} f = \dim\mathbb{R}^3$ d'après le théorème du rang donc par égalité des dimensions, on a $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Im} f$.

3. On note $e_1 = (1,1,1)$, $e_2 = (2,-1,-1)$, et $e_3 = (-1,2,-1)$. Cette base est adaptée à la somme directe. Par ailleurs, on a $f(e_2) = (6,-3,-3) = 3e_2$ et $f(e_3) = (-3,6,-3) = 3e_3$ par calcul matriciel donc la matrice de f dans cette base est :
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Correction 26 1. Pour montrer que c'est une base, il suffit de montrer que c'est une famille libre car elle est de cardinal 3. On suppose donc qu'il existe $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ des réels tels que $\alpha_1\epsilon_1 + \alpha_2\epsilon_2 + \alpha_3\epsilon_3 = 0_E$. On remplace les ϵ_i par leurs expressions :
$$\alpha_1(e_1 + e_3) + \alpha_2(e_1 + e_2) + \alpha_3(e_1 + e_2 + e_3) = 0_E,$$
ce qu'on peut aussi écrire :
$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)\, e_1 + (\alpha_2 + \alpha_3)\, e_2 + (\alpha_1 + \alpha_3)\, e_3 = 0_E.$$
Comme la famille (e_1, e_2, e_3) est libre, on a $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = \alpha_2+\alpha_3 = \alpha_1+\alpha_3 = 0$ ce qui implique $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. La famille est bien libre, c'est donc une base de E.

Pour calculer la matrice $Mat_{B'}(f)$, on calcule les images de ϵ_1, ϵ_2 et ϵ_3. On a :

- $f(\epsilon_1) = f(e_1 + e_3) = f(e_1) + f(e_3) = -e_3 + e_1 + 2e_3 = e_1 + e_3 = \epsilon_1$,
- $f(\epsilon_2) = f(e_1 + e_2) = f(e_1) + f(e_2) = -e_3 + e_1 + e_2 + e_3 = e_1 + e_2 = \epsilon_2$ et
- $f(\epsilon_3) = f(e_1) + f(e_2) + f(e_3) = 2e_1 + e_2 + 2e_3 = \epsilon_1 + \epsilon_3$.

On en déduit que :
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On sait que $A^n = P_{BB'} Mat_{B'}(f)^n P_{B'B}$. Calculons $Mat_{B'}(f)^n$. On écrit $Mat_{B'}(f) = I_3 + B$ avec $B^2 = (0)$ donc :
$$Mat_{B'}(f)^n = I_3 + nB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, $\forall n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & n+1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & n+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -n+1 & n & n \\ 0 & 1 & 0 \\ -n & n & n+1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Correction 27 On note f l'application canoniquement associée à A. Soit $X = (x, y)$, alors :
$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y \\ x - 2y \\ x + y \end{pmatrix},$$
donc $f(x, y) = (2x + y, x - 2y, x + y)$. On cherche $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ telle que $g \circ f = id_{\mathbb{R}^2}$. On remarque que $x = (2x + y) - (x + y)$ et $y = \dfrac{1}{2}\left((2x + y) - (x - 2y) - (x + y)\right)$.
L'application $g : (x, y, z) \mapsto \left(x - z, \dfrac{1}{2}(x - y - z)\right)$ vérifie bien $g \circ f = id_{\mathbb{R}^2}$.
La matrice de g dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ est :
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$
et, par la formule de la matrice de la composée, on a $BA = I_2$.
La matrice B n'est pas unique car on peut trouver une autre application qui vérifie $h \circ f = id_{\mathbb{R}^2}$. On peut par exemple prendre :
$$h : (x, y, z) \mapsto \left(\frac{1}{5}(2x + y), 2z - x\right).$$
Sa matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ est :
$$B' = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
et on a bien $B'A = I_2$.

Correction 28 On note f et g les applications canoniquement associées à A et B. Si AB est inversible, alors $f \circ g$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$. La bijectivité de $f \circ g$ implique la surjectivité de f. Or $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ et $\dim(\mathbb{R}^3) > \dim(\mathbb{R}^2)$, elle ne peut donc pas être surjective. On a une contradiction donc AB ne peut pas être inversible.

Correction 29 L'idée est d'exhiber une base de matrices de projection puis de considérer les applications linéaires canoniquement associées.

On considère les matrices $M_{ij} = E_{ii} + E_{ij}$ si $i \neq j$ et $M_{ii} = E_{ii}$. Elles forment une famille libre de $M_n(\mathbb{R})$ car par les opérations élémentaires $M_{ij} \leftarrow M_{ij} - M_{ii}$, on obtient la base canonique de $M_n(\mathbb{R})$. De plus, cette famille est de cardinal n^2, c'est donc une base de $M_n(\mathbb{R})$ (ou bien, la famille est génératrice de $M_n(\mathbb{R})$ car obtenue à partir de la base canonique par des opérations élémentaires). De plus, ce sont des matrices de projection car elles vérifient $M_{ij}^2 = M_{ij}$. En effet,

- $M_{ii}^2 = E_{ii}E_{ii} = E_{ii}$
- Pour $i \neq j$, $M_{ij}^2 = E_{ii}E_{ii} + E_{ii}E_{ij} + E_{ji}E_{ii} + E_{ij}E_{ij} = E_{ii} + E_{ij} + (0) + (0) = M_{ij}$

Ces matrices sont bien des matrices de projections. Soit $\mathcal{B}$ une base de E. Pour tout (i,j), on note f_{ij} l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est M_{ij}. Pour tout i,j, $f_{ij}^2 = f_{ij}$ donc $(f_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est une famille de projecteurs. De plus, la famille est une base car c'est l'image de la base $(M_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ par l'isomorphisme φ entre $M_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{L}(E)$ défini comme la bijection réciproque de $f \mapsto Mat_{\mathcal{B}}(f)$.

On a bien trouvé une base de $\mathcal{L}(E)$ formée de projecteurs.

Correction 30

Analyse :Si $B = (e_1, a_1, \cdots, e_r, a_r, e_{r+1}, \cdots, e_m)$ est une telle base, on a :

$$\forall i [\![1,m]\!],\ f(e_i) = 0_E \text{ et } \forall i \in [\![1,r]\!],\ f(a_i) = e_i.$$

On en déduit que $(e_1, \cdots, e_m)$ appartient à Ker(f) et $(a_1, \cdots, a_r)$ sont des antécédents des $(e_1, \cdots, e_r)$.

Synthèse :On a $f^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$ donc $\mathrm{Im}(f) \subset Ker(f)$. On choisit $(e_1, \cdots, e_r)$ une base de $\mathrm{Im}(f)$ que l'on complète en une base $(e_1, \cdots, e_m)$ de $\mathrm{Ker}(f)$. On pose ensuite $(a_1, \cdots, a_r)$ des antécédents des $(e_1, \cdots, e_r)$. Montrons que la famille $(e_1, a_1, \cdots, e_r, a_r, e_{r+1}, \cdots, e_m)$ est une base de E. Elle est de cardinal $r+m$. Or r est le cardinal de $(e_1, \cdots, e_r)$ donc $r = \mathrm{rg}(f)$ et m est le cardinal de $(e_1, \cdots, e_m)$ donc $m = \dim(\mathrm{Ker}(f))$. Par le théorème du rang, le cardinal de la famille est égal à la dimension de E, il suffit donc de montrer qu'elle est libre.

On suppose qu'il existe $(\alpha_1, \cdots, \alpha_m, \beta_1, \cdots, \beta_r) \in \mathbb{R}^{r+m}$ tel que :

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i e_i + \sum_{j=1}^{r} \beta_j a_j = 0_E.$$

On applique f, par linéarité de celle-ci, on obtient :

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i f(e_i) + \sum_{j=1}^{r} \beta_j f(a_j) = 0_E$$

On sait que $\forall i \in [\![1,m]\!],\ f(e_i) = 0_E$ et $\forall i \in [\![1,r]\!],\ f(a_i) = e_i$ donc $\sum_{j=1}^{r} \beta_j e_j = 0_E$.La famille $(e_1, \cdots, e_r)$ est libre donc $\forall j \in [\![1,r]\!], \beta_j = 0$. En revenant à l'égalité de départ, on a $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i e_i = 0_E$ et, par liberté de la famille $(e_1, \cdots, e_m)$, on obtient la nullité des α_i.

La famille $B = (e_1, a_1, \cdots, e_r, a_r, e_{r+1}, \cdots, e_m)$ est bien une base de E dans laquelle la matrice de f est de la forme souhaitée.

Correction 31

1. Pour $i \in [\![2,n]\!]$, on fait l'opération élémentaire $L_i \leftarrow L_i - L_{i-1}$, on obtient :

$$P(x) = \begin{vmatrix} r_1 + x & b+x & \dots & \dots & b+x \\ a - r_1 & r_2 - b & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & a - r_2 & r_3 - b & 0 \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a - r_{n-1} & r_n - b \end{vmatrix}$$

En développant par rapport à la première ligne, on obtient un polynôme de degré au plus 1 puisque toutes les lignes de 2 à n ont leurs coefficients constants par rapport à x.

2. On a $P(-a) = \prod_{i=1}^{n} (r_i - a)$ et $P(-b) = \prod_{i=1}^{n} (r_i - b)$ car, dans ces deux cas-là, la matrice est triangulaire.

3. On cherche deux réels α et β tel que $P(X) = \alpha X + \beta$, sachant que $P(-a) = \prod_{i=1}^{n} (r_i - a)$ et $P(-b) = \prod_{i=1}^{n} (r_i - b)$. En résolvant le système

$$\begin{cases} -a\alpha + \beta = P(-a) \\ -b\alpha + \beta = P(-b) \end{cases}$$

on trouve

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{P(-b) - P(-a)}{a-b} \\ \beta = \dfrac{aP(-b) - bP(-a)}{a-b} \end{cases}$$

donc

$$P(X) = \frac{1}{a-b}\left(\prod_{i=1}^{n}(r_i - b) - \prod_{i=1}^{n}(r_i - a)\right) X + \frac{1}{a-b}\left(a\prod_{i=1}^{n}(r_i - b) - b\prod_{i=1}^{n}(r_i - a)\right).$$

On en déduit que $\Delta_1 = P(0) = \dfrac{1}{a-b}\left(a\prod_{i=1}^{n}(r_i - b) - b\prod_{i=1}^{n}(r_i - a)\right)$.

Pour Δ_2, on prend $r_i = 0$ pour tout i, on a donc $\Delta_2 = \dfrac{(-b)^n - (-a)^n}{a-b} = (-1)^n\dfrac{b^n - a^n}{a-b}$.

4. On peut poser $b = a + \epsilon$, on fera tendre ensuite ϵ vers 0. On a $\prod_{i=1}^{n}(r_i - b) = \prod_{i=1}^{n}(r_i - a) - \epsilon\sum_{i=1}^{n}\prod_{i\neq j=(}^{r} {}_j - a) + o(\epsilon^2)$ donc en injectant dans P puis en faisant tendre ϵ vers 0, on trouve

$$P(X) = \prod_{i=1}^{n}(r_i - a) + \sum_{i=1}^{n}\prod_{i\neq j=(}^{r} {}_j - a)(X+a)$$

On peut aussi utiliser la multilinéarité du déterminant. On pose $r'_i = r_i - a$, E_i la colonne avec un seul coefficient non nul égal à 1 sur la $i$ème ligne et U la colonne avec tous les coefficients égaux à 1. On a $P(x) = \det((a+x)U + r'_1E_,(a+x)U + r'_2E_2, \dots, (a+x)U + r'_nE_n)$. On développe colonne par colonne, chaque fois que l'on a deux U, le déterminant est nul. On se retrouve donc avec

$$\begin{aligned} P(x) &= (a+x)\det(U, r'_2E_2, \dots, r'_nE_n) + (a+x)\det(r'_1E_1, U, r'_3E_3, \dots, r'_nE_n) \\ &\dots + \det(r'_1E_1, \dots, r'_nE_n), \end{aligned}$$

d'où

$$P(x) = (a+x)\sum_{i=1}^{n}\prod_{j\neq i} r'_j + \prod_{i=1}^{n} r'_i,$$

d'où le résultat trouvé ci-dessus en remplaçant r'_i par $r_i - a$.

Correction 32 1. Si $x_i = x_j$ pour $i \neq j$, le déterminant est nul car deux lignes sont identiques.

2. Pour $x_i \neq x_j$, écrire $R(X) = \dfrac{\prod_{j=1}^{n-1}(X - y_j)}{\prod_{i=1}^{n}(X + x_i)}$ sous la forme $\sum_{i=1}^{n}\dfrac{a_i}{X + x_i}$. On a $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $a_i = \dfrac{\prod_{j=1}^{n}(y_j - x_i)}{\prod_{j\neq i}(x_j - x_i)} \neq 0$.

3. Si on note $L_1, \dots, L_n$ les lignes, on a $D_n = \begin{vmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{vmatrix} = \dfrac{1}{\lambda_n}\begin{vmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_{n-1} \\ \sum_{i=1}^{n}\lambda_i L_i \end{vmatrix}$ On a donc

$$\begin{aligned} D_n &= \begin{vmatrix} \frac{1}{x_1+y_1} & \dots & \frac{1}{x_1+y_n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{1}{x_{n-1}+y_1} + \dots & \frac{1}{x_{n-1}+y_n} & \\ R(y_1) & \dots & R(y_n) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \frac{1}{x_1+y_1} & \dots & \frac{1}{x_1+y_{n-1}} & \frac{1}{x_1+y_n} \\ \vdots & \dots & \vdots & \\ \frac{1}{x_{n-1}+y_1} + \dots & \frac{1}{x_{n-1}+y_{n-1}} & \frac{1}{x_{n-1}+y_n} & \\ 0 & \dots & 0 & R(y_n) \end{vmatrix} \\ &= \frac{R(b_n)}{\lambda_n} D_{n-1}. \end{aligned}$$

Par récurrence, en utilisant $D_1 = \dfrac{1}{a_1 + b_1}$, on obtient $D_n = \dfrac{\sum_{i<j}(x_j - x_i)(y_j - y_i)}{\prod_{i,j}(x_i + y_j}$