Lycée du Parc
PCSI 842 — Année 2024-2025
Feuille 23

TD 23: Espaces préhilbertiens.

1 Produit scalaire

Exercice 1.
Montrer que les applications suivantes définissent des produits scalaires sur E :

1. $(P,Q) \mapsto \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(0)Q^{(k)}(0)$ sur $E = \mathbb{R}_n[X]$ (avec $n \in \mathbb{N}$).
2. $(f,g) \mapsto \int_0^1 f(t)g(t)(1-t^2)\,\mathrm{d}t$ sur $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$.
3. $(f,g) \mapsto f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$ sur $E = \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$.

Exercice 2.
Pour tout $(A,B) \in M_n(\mathbb{R})$, on pose $(A,B) = \mathrm{Tr}(A^\top B)$.
Montrer que $(.,.)$ définit un produit scalaire sur $M_n(\mathbb{R})$.

2 BON et Gram-Schmidt

Exercice 3.
Orthonormaliser par le procédé de Gram-Schmidt dans l'espace euclidien $\mathbb{R}_2[X]$ la famille $\left(X^2-1, 3X+1, X^2+X\right)$.

Exercice 4.
Soit E un espace vectoriel euclidien et soit $f : E \mapsto E$ une application telle que

$$\forall (x,y) \in E^2, < f(x), f(y) >=< x, y > .$$

1. Montrer que l'image d'une bon de E par f est une bon de E.
2. En déduire que f est linéaire.

Exercice 5.
Soit E un espace préhilbertien réel avec $n \in \mathbb{N}^\star$. On suppose qu'il existe $(e_1,\dots,e_n) \in E^n$ tels que

$$\begin{cases} \forall i \in [\![1,n]\!], ||e_i|| = 1 \\ \forall x \in E, \sum_{i=1}^{n} < x, e_i >^2 = ||x||^2 . \end{cases}$$

Montrer que $(e_1,\dots,e_n)$ est une base orthonormée de E.

3 Cauchy-Schwarz

Exercice 6.
Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a<b$. Montrer que si $f \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})$, alors

$$\left(\int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t\right)\left(\int_a^b f'^2(t)\,\mathrm{d}t\right) \geqslant \left(\frac{f(b)^2 - f(a)^2}{2}\right)^2$$

Exercice 7.
Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\left(2x^2+y^2+5z^2\right) \leqslant 1$. Montrer que $(x+y+z)^2 \leqslant \frac{17}{10}$

Exercice 8.
Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue et positive. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t$.
Montrer que pour tout $(m,n) \in \mathbb{N}^2$, $I_{m+n}^2 \leqslant I_{2n}I_{2m}$.

Exercice 9.

Soit $M_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire: $\forall (A,B) \in M_n(\mathbb{R})$, $(A,B) = \mathrm{Tr}(A^\top B)$.
Montrer que pour tout $A \in M_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{Tr}(A)^2 \leqslant n\mathrm{Tr}\left(A^\top A\right)$.

4 Orthogonal d'un ssev

Exercice 10.
On suppose $\mathbb{R}^4$ muni de sa structure euclidienne canonique. Déterminer l'orthogonal de $G = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, x+2y-z+t=0\}$

Exercice 11.
On considère sur $M_n(\mathbb{R})$ le produit scalaire défini par $\forall (A,B) \in M_n(\mathbb{R})^2$,

$$(A|B) = \mathrm{Tr}(A^\top B).$$

Calculer l'orthogonal de l'ensemble des matrices diagonales puis celui des matrices symétriques.

Exercice 12.

Soit E l'espace vectoriel $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ muni du produit scalaire

$$(f|g) = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

On considère $H = \{f \in E, f(0) = 0\}$. Déterminer l'orthogonal de H.

Exercice 13.
Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R})$. Pour tous $f,g\in E$, on pose :

$$\langle f,g\rangle=\int_0^1\Big(f(t)g(t)+f'(t)g'(t)\Big)\mathrm{d}t$$

1. Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.
2. Soit $V=\{f\in E\,|\,f(0)=f(1)=0\}$. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$, V contient une fonction polynomiale de degré n. Que peut-on en déduire sur la dimension de V ?
3. Soit $W=\{f\in E\,|\,f=f''\}$. Déterminer une base de W.
4. Montrer que V et W sont orthogonaux.
5. Montrer que $E=V\oplus W$.

5 Projection et symétrie orthogonale

Exercice 14.

Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^4$, on considère le sous-espace vectoriel

$$F=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4, x+y+z+t=0=x+2y+3z+4t\}$$

1. Donner la dimension de F.
2. Déterminer une base de $F^\perp$.
3. Soit $u=(1,0,1,0)$, déterminer $d(u,F)$.

Exercice 15.

On suppose $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique et on pose

$$F=\Big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, x-y+z=0=x+y+2z\Big\}$$

1. Déterminer $F^\perp$.
2. Déterminer la matrice de la symétrie orthogonale s par rapport à F dans la base canonique. [1]

[1] une symétrie orthogonale est une symétrie d'axe F parallèlement à $F^\perp$

Exercice 16.
Soit $E=\mathbb{R}_n[X]$ et $a_0,\dots,a_n$ des réels distincts. On pose,

$$\forall P,Q\in E, \langle P,Q\rangle=\sum_{k=0}^n P(a_k)Q(a_k)$$

1. Montrer que l'application ci-dessus définit un produit scalaire.
2. Pour tout $j\in[\![0,n]\!]$, on pose $P_j(X)=\dfrac{\prod\limits_{i\neq j}(X-a_i)}{\prod\limits_{i\neq j}(a_j-a_i)}$.
   (a) Que vaut $P_j(a_k)$?
   (b) Montrer que $(P_0,\dots,P_n)$ est une famille orthonormale. En déduire que c'est une base de E.
3. Calculer la distance d'un polynôme Q de E au sous-espace

$$H=\left\{P\in E,\sum_{k=0}^n P(a_k)=0\right\}.$$

Exercice 17.

On considère sur $M_2(\mathbb{R})$ le produit scalaire défini par $\forall(A,B)\in M_2(\mathbb{R})^2$,

$$(A|B)=\mathrm{Tr}(A^\top B).$$

On considère le sous-espace vectoriel

$$F=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\b&-a\end{pmatrix},(a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$$

1. Trouver une base de $F^\perp$.
2. Déterminer la projection orthogonale de $B=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}$ sur F.

6 Si besoin d'encore un peu d'entrainement

Exercice 18.
Soit E un espace préhilbertien réel. Montrer que pour tout $(x,y)\in E^2$,

$$2+||x+y||^2\leqslant 2\left(1+||x||^2\right)\left(1+||y||^2\right)$$

Exercice 19.

Orthonormaliser par le procédé de Gram-Schmidt dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ la famille $((1,1,1),(1,0,1),(0,1,1))$.

Exercice 20.
Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ tels que $\left(x^2+y^2+z^2\right)\leqslant 1$. Montrer que $(x+2y+3z)^2\leqslant 14$

Exercice 21.
Soit $n\in\mathbb{N}$. Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n}\sqrt{\binom{n}{k}}\leqslant\sqrt{2^n(n+1)}$$

Exercice 22.
On considère sur $M_n(\mathbb{R})$ le produit scalaire défini par $\forall(A,B)\in M_n(\mathbb{R})^2$,

$$(A|B)=\operatorname{Tr}(A^\top B).$$

Soit $F=\{M\in M_n(\mathbb{R}),\operatorname{Tr}(M)=0\}$.

1. Montrer que F est un ssev de $M_n(\mathbb{R})$ et donner sa dimension.
2. Déterminer $F^\perp$.

Exercice 23.
Montrer que si E est un espace préhilbertien réel, $\{0_E\}^\perp=E$ et $E^\perp=\{0_E\}$.

Exercice 24.
On suppose $\mathbb{R}^4$ muni de sa structure euclidienne canonique et on pose

$$F=\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4, x-y-z+t=0\right\}$$

On note p la projection orthogonale sur F. Déterminer la matrice de p dans la base canonique.

Exercice 25.
On suppose $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique et on pose

$$F=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, x+2y-z=0=2x-y\right\}$$

On note s la symétrie orthogonale par rapport à F. Déterminer la matrice de s dans la base canonique.

Exercice 26.
On munit $M_3(\mathbb{R})$ du produit scalaire $\langle A,B\rangle=\operatorname{Tr}(\,A^\top\,B)$.

1. On note $S_3(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel constitué des matrices symétriques. Déterminer le supplémentaire orthogonal de $S_3(\mathbb{R})$.
2. Déterminer la distance de la matrice M ci-dessous au sous-espace vectoriel $S_3(\mathbb{R})$.

$$M=\begin{pmatrix}2&1&0\\3&1&2\\1&4&1\end{pmatrix}$$

7 Une fois qu'on est à l'aise

Exercice 27.
Soit a un vecteur unitaire d'un espace préhilbertien réel, k un réel et $\varphi: E\times E\to\mathbb{R}$ l'application déterminée par

$$\varphi(x,y)=<x,y>+k<x,a><y,a>.$$

Donner une CNS pour que φ soit un produit scalaire.

Exercice 28.

Soit E un espace vectoriel euclidien. On considère n vecteurs unitaires $(e_1,\dots,e_n)$ de E tels que

$$\forall x\in E, ||x||^2=\sum_{i=1}^{n}<x|e_i>^2.$$

1. Montrer que $(e_1,\dots,e_n)$ est une famille génératrice de E.
2. Montrer que $(e_1,\dots,e_n)$ est une base orthonormale de E.

Exercice 29.
Soit $(E,\langle,\rangle)$ un espace pré-hilbertien réel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que :

1. Si $F\subset G$ alors $G^\perp\subset F^\perp$.
2. $(F+G)^\perp=F^\perp\cap G^\perp$.
3. $F^\perp+G^\perp\subset(F\cap G)^\perp$.
4. Si $\dim(E)$ est finie, alors $(F^\perp)^\perp=F$.
5. Que devient l'inclusion de la question 3.

Exercice 30. ⚙ ⚙

On considère un espace vectoriel euclidien de dimension $N \geqslant 2$. On suppose qu'il existe n vecteurs unitaires deux à deux distincts $(u_1, \ldots, u_n)$ et un réel a tel que pour tout i, j distincts, $(u_i | u_j) = a$.

1. Montrer que $a \neq 1$.
2. Calculer la norme de $v = \sum_{i=1}^{n} u_i$. En déduire que $a \geqslant -\frac{1}{n-1}$.
3. Montrer que la famille $(u_2 - u_1, \ldots, u_n - u_1)$ est libre. Qu'en résulte-t-il?
4. On suppose que la famille $(u_1, \ldots, u_n)$ est liée. Montrez que $a = -\frac{1}{n-1}$.

Memo

- Comment montrer qu'une application est un produit scalaire?
  Revenir à la définition
- Comment déterminer l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel?
  - Trouver un nombre suffisant de vecteurs orthogonaux à une base
  - Interpréter les équations de l'espace vectoriel
  - Revenir à la définition
- Comment déterminer une BON
  - Faire preuve d'intuition/lire les questions précédentes
  - Trouver une BON d'un ssev et de son supplémentaire orthogonal
  - Utiliser Gram-Schmidt
- Comment déterminer le projeté orthogonal
  - Utiliser l'expression dans une BON
  - Décomposer comme pour un projecteur classique
- Comment calculer la distance à un espace vectoriel de dimension finie?
  - Déterminer le projeté sur l'orthogonal
  - Déterminer le projeté puis appliquer la définition
- Comment utiliser Cauchy-Schwarz?
  identifier l'inégalité à montrer en reconnaissant un produit scalaire.