Devoir surveillé 10.

Chaque résultat doit être justifié, les réponses doivent être soulignées ou encadrées. Les étapes des éventuels calculs doivent apparaître sur la copie. On peut admettre un résultat ou une question en le précisant explicitement. La clarté et la précision de la rédaction ainsi que la présentation de la copie seront prises en compte dans l'évaluation.

Chaque exercice doit être rédigé sur une copie séparée.

Exercice 1.

Cet exercice doit être rédigé sur une copie séparée

Soit n un entier naturel non nul.
Une urne contient n boules indiscernables au toucher et numérotées de 1 à n. On tire une boule au hasard dans l'urne. Si cette boule tirée porte le numéro k, on place alors dans une seconde urne toutes les boules suivantes: une boule numérotée 1, deux boules numérotées 2, et plus généralement pour tout $j \in [\![1, k]\!]$, j boules numérotées j, jusqu'à k boules numérotées k. Les boules de cette deuxième urne sont aussi indiscernables au toucher. On effectue alors un tirage au hasard d'une boule dans cette seconde urne.

On note X la variable aléatoire égale au numéro de la première boule tirée et on note Y la variable aléatoire égale au numéro de la deuxième boule tirée.

1. Reconnaître la loi de X.
2. Déterminer $Y(\Omega)$.
3. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Pour tout entier j de $[\![1, n]\!]$, exprimer $\mathbb{P}_{[X=k]}(Y = j)$ en fonction de k et j.
   On distinguera les cas $j \leqslant k$ et $j \geqslant k + 1$.
4. (a) Déterminer la décomposition en éléments simples de $\frac{1}{k(k+1)}$
   (b) En déduire que, pour tout élément j de $Y(\Omega)$,
   $$\mathbb{P}(Y = j) = \frac{2(n + 1 - j)}{n(n + 1)}.$$
5. Montrer que $\mathbb{E}(Y) = \dfrac{n + 2}{3}$.
6. Les variables X et Y sont-elles indépendantes?
7. (a) Montrer que $\mathbb{E}(XY) = \dfrac{(n + 1)(4n + 5)}{18}$.
   (b) En déduire que $\mathrm{Cov}(X, Y) = \dfrac{n^2 - 1}{18}$.

Cet exercice doit être rédigé sur une copie séparée

Exercice 2.
On note $l^2(\mathbb{N})$ l'ensemble des suites réelles $U = (U_n)$ telles que la série $\sum U_n^2$ converge.
Sous réserve d'existence, on pose pour $U, V \in l^2(\mathbb{N})$:

$$\langle U, V\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} U_n V_n.$$

1. Pour α et $n \in \mathbb{N}$, on pose $U_n = \dfrac{1}{n^\alpha + 1}$. Pour quelles valeurs de α, la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle un élément de $l^2(\mathbb{N})$?

2. Produit scalaire sur $l^2(\mathbb{N})$:

   (a) Démontrer $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $ab \leqslant \dfrac{1}{2}\left(a^2 + b^2\right)$.

   (b) En déduire que si $U, V \in l^2(\mathbb{N})$, $\langle U, V\rangle = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} U_n V_n$ est bien défini.

   (c) Montrer que $l^2(\mathbb{N})$ est un espace vectoriel et que $\langle \cdot, \cdot\rangle$ est un produit scalaire sur $l^2(\mathbb{N})$.

   (d) On pose

   $$S = \{U \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, U_n = 0 \text{ et } \sum_{n=0}^{+\infty} U_n = 0\},$$

   c'est-à-dire l'ensemble des suites nulles à partir d'un certain rang et dont la somme des termes est nulle. Montrer que S est un sous-espace vectoriel de $l^2(\mathbb{N})$.

   (e) Montrer que $S^\perp = \{0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}\}$.

   (f) En déduire que $S \subsetneq \left(S^\perp\right)^\perp$.

On note E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[-\pi, \pi]$ à valeurs réelles que l'on munit du produit scalaire défini, pour $f, g \in E$, par

$$\langle f \mid g \rangle_E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)\mathrm{d}t$$

On admet que $\langle \ \mid \ \rangle_E$ est un produit scalaire sur E.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $0 \leqslant k \leqslant n$, on définit la fonction $f_k \in E$ par

$$\forall t \in \mathbb{R}, f_k(t) = \cos(kt).$$

De même pour $1 \leqslant k \leqslant n$, soit $g_k \in E$ définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, g_k(t) = \sin(kt).$$

On note $\mathcal{F}_n = (f_0, f_1, \ldots, f_n, g_1, \ldots, g_n)$ et $F_n = \mathrm{Vect}\,(f_0, \ldots, f_n, g_1, \ldots, g_n)$.

3. **Une famille orthonormée de E.**
   Dans cette question, on fixe $n \in \mathbb{N}^\star$.

   (a) Soient $u, v \in \mathbb{R}$. Donner une expression de $\cos(u)\cos(v)$ et de $\sin(u)\sin(v)$ en fonction de $\cos(u+v)$ et de $\cos(u-v)$.

   (b) Démontrer que $\mathcal{F}_n = (f_0, f_1, \ldots, f_n, g_1, \ldots, g_n)$ est une famille orthogonale dans E.

   (c) Calculer la norme des vecteurs de $\mathcal{F}_n$.

   (d) Montrer que F_n est de dimension finie et déterminer sa dimension.

4. **Une projection orthogonale.** Soit $h \in E$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on note $p_{F_n}(h)$ le projeté orthogonal de h sur F_n.

   (a) Montrer qu'il existe un unique couple de suites $(a_k(h))_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_k(h))_{k\in\mathbb{N}}$ tel que $b_0(h) = 0$ et

   $$\forall n \in \mathbb{N}^\star, p_{F_n}(h) = \sum_{k=0}^{n} a_k(h) f_k + \sum_{k=1}^{n} b_k(h) g_k.$$

   Exprimer pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k(h)$ et $b_k(h)$ à l'aide d'intégrales.

   (b) On note $\|h\|_E = \sqrt{\langle h \mid h \rangle_E}$. Démontrer que

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \|p_{F_n}(h)\|_E \leqslant \|h\|_E.$$

   (c) Justifier que les suites $(a_k(h))_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_k(h))_{k\in\mathbb{N}}$ sont des éléments de $l^2(\mathbb{N})$ et que

   $$a_0(h)^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty} a_k(h)^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty} b_k(h)^2 \leqslant \|h\|_E^2.$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer

$$\inf_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n \in \mathbb{R}} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left(1 - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \sin(kt) \right)^2 \mathrm{d}t \right).$$

Cet exercice doit être rédigé sur une copie séparée

Exercice 3 (Processus de branchement et extinction).
On considère une espèce de plante dont chaque individu de chaque génération (indépendamment des autres) donne naissance à :

- deux descendants, avec probabilité $p \in]0;1[$;
- aucun descendant, avec probabilité $1-p$;

puis meurt. A la génération 0, la population est constituée d'un seul individu. On note X_n le nombre d'individus à la génération n, et on s'intéresse à la probabilité d'extinction après n générations :

$$r_n = \mathbb{P}(X_n = 0)$$

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, X_n est un entier pair compris entre 0 et 2^n.
2. Déterminer la loi de X_1 et de X_2.
3. Que vaut r_0 ?
4. En considérant le SCE $((X_1 = 0), (X_1 = 2))$, justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$r_{n+1} = (1-p) + pr_n^2.$$
5. Soit $f_p : x \mapsto px^2 + 1 - p$.
   (a) Étudier les variations de f_p sur $[0;1]$.
   (b) Montrer que $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans $[0;1]$ et est monotone, et en déduire que $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $\ell \in [0;1]$.
   (c) Déterminer les points fixes de f_p (leur nombre et leur position par rapport à 1). On pourra distinguer les cas $p < \frac{1}{2}$, $p = \frac{1}{2}$ et $p > \frac{1}{2}$. Dans chacun des cas, on donnera l'allure du graphe de f_p en mettant en évidence ces points fixes.
   (d) Conclure sur la limite de la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ selon la valeur de p. Interpréter.
6. Dans cette question, on suppose $p \neq \dfrac{1}{2}$, et on note toujours ℓ la limite de la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Justifier que $2p\ell < 1$, puis montrer à l'aide de l'inégalité des accroissements finis:
$$\forall n \in \mathbb{N},\ |r_n - \ell| \leqslant \ell\,(2p\ell)^n.$$
7. Dans cette question, on s'intéresse au cas où $p = \dfrac{1}{2}$.
   (a) Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la relation $\dfrac{1}{1-r_{n+1}} - \dfrac{1}{1-r_n} = \dfrac{1}{1+r_n}$.
   (b) Montrer que si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à termes strictement positifs converge vers un réel $c > 0$, alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k \sim c \times n$, lorsque $n \to +\infty$.
   On pourra fixer u une suite respectant les hypothèses de l'énoncé, fixer un $\varepsilon > 0$, et justifier qu'à partir d'un certain rang k_0, on a $c - \varepsilon \leqslant u_k \leqslant c + \varepsilon$.
   (c) Déduire des deux questions précédentes: $r_n = 1 - \dfrac{2}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Cet exercice doit être rédigé sur une copie séparée

Exercice 4.
Dans toute cette partie, n est un entier strictement positif fixé.

On note Φ l'application définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \Phi(P) = \left(\left(X^2-1\right)P\right)''.$$

1. Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. (a) Donner la matrice de Φ dans la base canonique.
   (b) En déduire qu'il existe $n+1$ réels distincts $\lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_n$, que l'on précisera, tels que pour tout $i \in [\![0;n]\!]$, $\Phi - \lambda_i \mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[X]}$ n'est pas bijective.
   (c) Quel est le rang de $\Phi - \lambda_i \mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[X]}$?

3. Prouver que pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $\mathrm{Ker}\left(\Phi - \lambda_k \mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[X]}\right)$ contient un unique polynôme unitaire, que l'on notera P_k dans la suite de l'exercice.

4. Soit $k \in [\![0,n]\!]$.
   (a) Prouver que $\deg P_k = k$.
   (b) Soit $Q_k = P_k(-X)$. Montrer que $\Phi\left(Q_k\right) = \lambda_k Q_k$, et en déduire que $P_k(-X) = (-1)^k P_k(X)$.

5. Calculer P_0, P_1, P_2, P_3.

Pour $(P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose

$$(P \mid Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\left(1-t^2\right) dt.$$

6. Prouver que $(\cdot \mid \cdot)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

7. Prouver que pour tous $(P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2, (\Phi(P) \mid Q) = (P \mid \Phi(Q))$.

8. En déduire que $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

9. Prouver que pour tout $k \in [\![0,n]\!], P_k \in \mathbb{R}_{k-1}[X]^{\perp}$.

Correction du DS n 10

Exercice 1 Soit n un entier naturel non nul.
Une urne contient n boules indiscernables au toucher numérotées de 1 à n.On tire une boule au hasard dans l'urne. Si cette boule tirée porte le numéro k, on place alors dans une seconde urne toutes les boules suivantes : une boule numérotée 1, deux boules numérotées 2 et plus généralement, pour tout $j \in [\![1,k]\!]$, j boules numérotées j, jusqu'à k boules numérotées k. Les boules de cette deuxième urne sont indiscernables au toucher. On effectue alors un tirage au hasard dans cette seconde urne.
On note X la variable aléatoire égale au numéro de la première boule tirée et Y la variable aléatoire égale au numéro de la deuxième boule tirée.

1. Le premier tirage se fait dans une urne qui contient n boules indiscernables au toucher et chaque numéro est alors équiprobable; on a reconnu la loi uniforme
$$X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,n]\!]).$$

2. Dans le *pire* des cas, on pioche lors du premier tirage la boule numérotée 1 et il n'y a dans la deuxième urne qu'une boule numérotée 1. Si on pioche au premier coup la boule numérotée n, il y a ensuite des boules numérotées de 1 à n dans la deuxième urne. Ainsi, la valeur de la deuxième boule piochée est toujours une valeur entre 1 et n et toutes les valeurs sont possibles. On a donc $Y(\Omega) = [\![1,n]\!]$.

   Beaucoup ont écrit $Y(\Omega) = [\![1,k]\!]$

3. Soit $k \in [\![1,n]\!]$. On suppose que l'évènement $[X = k]$ est réalisé.
D'après la description de l'expérience, on a disposé dans la deuxième urne un nombre de boules égal à
$$1 + 2 + ... + k = \sum_{j=1}^{k} j = \frac{k(k+1)}{2}.$$
Si $j \in [\![1,k]\!]$, il y a dans l'urne des boules numérotées j (et il y en a exactement j). Sinon, les boules j ne font pas partie de l'urne (et la probabilité de les piocher alors nulle). On a donc par équiprobabilité et avec la formule ci-dessus pour le total de boules :
$$\mathbb{P}_{[X=k]}(Y = j) = \begin{cases} \dfrac{2j}{k(k+1)}, & \text{si } 1 \leqslant j \leqslant k \\ 0, & \text{si } k < j \end{cases}$$

4. (a) On écrit
$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1+k-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

(b) Soit $j \in [\![1, n]\!]$. D'après la formule des probabilités totales appliquée au s.c.e $\{[X = k] : k \in [\![1, n]\!]\}$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y = j) &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}_{[X=k]}(Y = j)\mathbb{P}(X = k) \\
&= \sum_{k=j}^{n} \mathbb{P}_{[X=k]}(Y = j)\mathbb{P}(X = k) \\
&= \sum_{k=j}^{n} \frac{2j}{k(k+1)} \times \frac{1}{n} = \frac{2j}{n} \sum_{k=j}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \\
&= \frac{2j}{n} \sum_{k=j}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\
&= \frac{2j}{n} \left(\frac{1}{j} - \frac{1}{n+1} \right) \\
&= \frac{2(n+1-j)}{n(n+1)},
\end{aligned}$$

ce qui est bien le résultat demandé.

Il faut bien penser à citer que c'est la formule des probabilités totales et préciser à quel SCE elle est appliquée. Attention, on a $\mathbb{P}_{[X=k]}(Y = j) = 0$ lorsque $k + 1 \leqslant j$.

5. On a:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y) &= \sum_{j=1}^{n} j\mathbb{P}(Y = j) = \sum_{j=1}^{n} j \frac{2(n+1-j)}{n(n+1)} \\
&= \frac{2}{n(n+1)} \sum_{j=1}^{n} j(n+1-j) = \frac{2}{n(n+1)} \left((n+1) \sum_{j=1}^{n} j - \sum_{j=1}^{n} j^2 \right) \\
&= \frac{2}{n(n+1)} \left((n+1)\frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right) \\
&= (n+1) - \frac{2n+1}{3} \\
&= \frac{n+2}{3},
\end{aligned}$$

ce qui est bien le résultat attendu.

6. Soit $n \geqslant 2$. Si X et Y étaient indépendantes alors, pour tout couple $(k, j) \in [\![1, n]\!]^2$, on aurait

$$\mathbb{P}_{[X=k]}(Y = j) = \mathbb{P}(Y = j) \neq 0.$$

Or, la probabilité de gauche est nulle dès que $j > k$. Les variables X et Y ne sont donc pas indépendantes.
Pour $n = 1$, les deux variables aléatoires X et Y sont certaines et égales à 1... elles sont donc indépendantes.

7. (a) On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(XY) &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} kj\mathbb{P}([X=k]\cap[Y=j]) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} kj\mathbb{P}([X=k])\mathbb{P}_{[X=k]}([Y=j]) \\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} kj \times \frac{1}{n} \times \frac{2j}{k(k+1)} \text{ car } P_{X=k}(Y=j)=0 \forall j \geqslant k+1 \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k+1}\sum_{j=1}^{k} j^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k+1}\times\frac{k(k+1)(2k+1)}{6} \\
&= \frac{1}{3n}\sum_{k=1}^{n} k(2k+1) = \frac{1}{3n}\left(2\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k\right) \\
&= \frac{1}{3n}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{3}+\frac{n(n+1)}{2}\right) \\
&= \frac{n+1}{18}(2(2n+1)+3) \\
&= \frac{(n+1)(4n+5)}{18},
\end{aligned}$$

ce qui fait plaisir car c'est ce qu'on demande!

Pensez à citer le thm de transfert

(b) Par la formule de König-Huygens,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X,Y) &= \mathbb{E}(XY)-\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \\
&= \frac{(n+1)(4n+5)}{18}-\frac{n+1}{2}\times\frac{n+2}{3} \\
&= \frac{n+1}{18}(4n+5-3(n+2)) \\
&= \frac{(n+1)(n-1)}{18} = \frac{n^2-1}{18}
\end{aligned}$$

et c'est tout bon.
(On remarque que, pour $n=1$, la covariance est nulle, ce qui est cohérent avec ce que l'on a mentionné ci-avant quant à l'indépendance de X et Y.)

Exercice 2 1. *Pour $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $U_n = \dfrac{1}{n^\alpha+1}$. La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle élément de $l^2(\mathbb{N})$?*

La suite diverge grossièrement si $\alpha = 0$. Si $\alpha > 0$, on a $U_n^2 \sim_{+\infty} \dfrac{1}{n^{2\alpha}}$, la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc un élément de $l^2(\mathbb{N})$ si et seulement si $2\alpha > 1$ c'est-à-dire $\alpha > \dfrac{1}{2}$.

On a changé l'énoncé et on voulait vous interroger pour $\alpha \in \mathbb{R}$, typo dans l'énoncé ce qui a amené certains (très peu) à considérer les cas à la main. L'immense majorité, vous avez fait un équivalent. Attention, il n'est valable que pour $\alpha > 0$. Pour affirmer que les séries sont de même nature, il faut préciser que l'équivalent est positif (ou de signe constant) ou invoquez le "critère de comparaison des séries à termes positifs". Si vous majorez seulement le terme général, vous n'aurez pas de condition nécessaire et suffisante.

2. *Produit scalaire sur* $l^2(\mathbb{N})$:

(a) *Démontrer* $\forall a, b \in \mathbb{R},\ ab \leqslant \frac{1}{2}\left(a^2+b^2\right)$.

On raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned} ab \leqslant \frac{1}{2}\left(a^2+b^2\right) &\Leftrightarrow 2ab \leqslant a^2+b^2 \\ &\Leftrightarrow 0 \leqslant (a-b)^2 \end{aligned}$$

La dernière inégalité est vraie donc, par équivalence, la première l'est également. On a bien $\forall a, b \in \mathbb{R},\ ab \leqslant \frac{1}{2}\left(a^2+b^2\right)$

Une suite d'équivalences sans conclusion vous a fait perdre la moitié des points.

(b) *En déduire que si* $U, V \in l^2(\mathbb{N})$, $\langle U \mid V\rangle = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} U_n V_n$ *est bien défini.*

Soit $U, V \in l^2(\mathbb{N})$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$0 \leqslant |U_n V_n| \leqslant \frac{1}{2}\left(U_n^2+V_n^2\right).$$

La série de terme général $\frac{1}{2}\left(U_n^2+V_n^2\right)$ converge en tant que somme de séries convergentes. Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que $\sum U_n V_n$ est absolument convergente donc convergente. La série de terme général $U_n V_n$ admet donc une somme ce qui justifie la définition de $\langle U \mid V\rangle$.

Beaucoup de rédactions confuses sur cette question. Certains somment les inégalités pour majorer la somme partielle. Comment allez-vous conclure ensuite? Soit vous invoquez que la suite des sommes partielles est croissantes car le terme général de la série est positif (ce qui est faux) et, dans ce cas, le fait qu'elle soit majorée vous garantit qu'elle converge. Me dire juste que la somme partielle est majorée ne vous donne pas la convergence de la série (on majore le tg de la série !!!). J'ai encore vu des sommes (de 0 à ∞ pour justifier que la série converge: ça n'a aucun sens, la notation $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}$ n'est défini que si la série converge.

(c) *Montrer que* $l^2(\mathbb{N})$ *est un espace vectoriel et que* $\langle\cdot \mid \cdot\rangle$ *est un produit scalaire sur* $l^2(\mathbb{N})$.

On commence par s'assurer que $l^2(\mathbb{N})$ est non-vide ce qui est le cas puisque la suite nulle appartient à $l^2(\mathbb{N})$. On se donne ensuite deux éléments $U, V \in l^2(\mathbb{N})$ et un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$, montrons que $\lambda U+V$ est un élément de $l^2(\mathbb{R})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(\lambda U_n+V_n)^2 = \lambda^2 U_n^2 + 2\lambda U_n V_n + V_n^2$. Par hypothèse, les séries de terme général U_n^2 et V_n^2 convergent et on a montré à la question précédente que $\sum U_n V_n$ convergeait. On en déduit que $\sum\left(\lambda U_n+V_n\right)^2$ converge donc $\lambda U+V \in l^2(\mathbb{R})$ et cet ensemble est bien un ssev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

On commence TOUJOURS pas s'assurer que l'ensemble contient le vecteur nul !!!!!

Montrons que $\langle\cdot \mid \cdot\rangle$ est un produit scalaire:

- $\forall U, V \in l^2(\mathbb{R})$, $\langle U \mid V\rangle \in \mathbb{R}$, c'est une forme.
- Symétrique: $\forall U, V \in l^2(\mathbb{N})$, $\langle U \mid V\rangle = \langle V \mid U\rangle$ par commutativité sur $\mathbb{R}$ donc la forme est symétrique.
- Bilinéaire: Soit $U, V, W \in l^2(\mathbb{N})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors la suite de terme général $(\lambda U_n+V_n) W_n$ est convergente de somme égale à $\lambda \sum\limits_{n=0}^{+\infty} U_n W_n + \sum\limits_{n=0}^{+\infty} V_n W_n$ par propriétés des limites. On a donc la linéarité par rapport à la première variable et, par symétrie, on obtient la linéarité par rapport à la deuxième variable.

- Positive : Soit $U \in l^2(\mathbb{N})$, alors $\sum U_n^2$ est une série positive et convergente. La suite de ses sommes partielles est donc une suite positive et convergente, sa limite est, par conséquent positive. On a bien $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n^2 \geqslant 0$.
- Définie: Soit $U \in l^2(\mathbb{N})$ telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n^2 = 0$. La suite des ses sommes partielles est croissante (puisque $U_n^2 \geqslant 0$), positive et de limite nulle. C'est donc la suite nulle. On a bien $\langle U, U\rangle = 0 \Rightarrow U = 0$ d'où le caractère défini.

On a montré que $\langle \mid \rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive, c'est donc un produit scalaire sur $l^2(\mathbb{R})$.

Là, j'avoue, j'ai été sévère mais soyez honnête: aviez-vous vraiment compris pourquoi c'était un produit scalaire?? Dites-moi que vous partez en vacances en ayant intégré le fait que $\sum_{n=0}^{+\infty}$ est une limite et pas une somme (même si elle s'appelle somme de la série, je sais, c'est pervers).

(d) *On pose* $S = \{U \in l^2(\mathbb{N}), \exists n_0, \forall n \geqslant n_0, U_n = 0$ *et* $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n = 0\}$. *Montrer que S est un sous-espace vectoriel de $l^2(\mathbb{N})$.*

La suite nulle appartient à S, l'ensemble est donc non-vide. Soit $U, V \in S$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors par définition de S, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0, U_n = 0$ et il existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant m_0$, $V_n = 0$. Pour tout $n \geqslant \max(n_0, m_0)$, on a alors $\lambda U_n + V_n = 0$. Par ailleurs, les deux séries $\sum \lambda U_n$ et $\sum V_n$ étant convergentes, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda U_n + V_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} U_n + \sum_{n=0}^{+\infty} V_n = 0.$$

On a donc $\lambda U + V \in S$ et S est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Il est clair qu'il est inclus dans $l^2(\mathbb{N})$ puisque si $U \in S$, la série de terme général U_n^2 admet un nombre fini de termes non nuls, elle est donc convergente.

(e) *Montrer que* $S^\perp = \{0_{\mathbb{R}^\mathbb{N}}\}$.

Soit $U \in S^\perp$, posons

$$V_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ -1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a bien $V \in S$ et, par suite, $\langle U, V\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} U_n V_n = U_0 - U_1 = 0$. Ainsi $U_0 = U_1$. On fait ensuite le produit scalaire de U avec W définie par

$$W_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ -1 & \text{si } n = 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

À nouveau, il est clair que $W \in S$, on a donc $\langle U, W\rangle = 0$ ce qui impose $U_1 = U_2$. Par récurrence, on montre ainsi que U est une suite constante. Or, la série $\sum U_n^2$ converge. Si U est constante, la série ne peut converger que si $U = 0$. On a montré $S^\perp \subset \{0_{\mathbb{R}^N}\}$ et l'autre inclusion est évidente donc $S^\perp = \{0\}$.

(f) *En déduire que* $S \subsetneq \left(S^{\perp}\right)^{\perp}$. On a $\left(S^{\perp}\right)^{\perp} = \{0_{\mathbb{R}^2}\}^{\perp} = l^2(\mathbb{N})$ et $S \subsetneq l^2(\mathbb{N})$. En effet, on peut considérer la suite dont les deux premiers termes valent 1 et les suivants 0, c'est un élément de $l^2(\mathbb{N})$ donc la somme n'est pas nulle, il n'appartient pas à S. On a donc une inclusion stricte.

3. Une famille orthonormée de E. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.

(a) *Soient $u, v \in \mathbb{R}$. Donner une expression de $\cos(u)\cos(v)$ et de $\sin(u)\sin(v)$ en fonction de $\cos(u+v)$ et de $\cos(u-v)$.*
Soit $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, On a

$$\cos(u+v) + \cos(u-v) = 2\cos(u)\cos(v) \text{ et } \cos(u-v) - \cos(u+v) = 2\sin(u)\sin(v)$$

on en déduit que

$$\cos(u)\cos(v) = \frac{1}{2}\cos(u+v) + \frac{1}{2}\cos(u-v) \text{ et } \sin(u)\sin(v) = \frac{1}{2}\cos(u-v) - \frac{1}{2}\cos(u+v).$$

(b) *Démontrer que $\mathcal{F}_n = (f_0, f_1, \ldots, f_n, g_1, \ldots, g_n)$ est une famille orthogonale dans E.*

- Soit $i \neq j$, montrons que $< f_i \mid f_j >_E = 0$.
  On a
$$\begin{aligned} < f_i \mid f_j >_E &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(it)\cos(jt)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos((i+j)t) + \cos((i-j)t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{4\pi}\left[\frac{\sin((i+j)t)}{i+j} + \frac{\sin((i-j)t)}{i-j}\right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= 0 \end{aligned}$$

- Soit $i \neq j$, montrons que $< g_i \mid g_j >_E = 0$. On a
$$\begin{aligned} < g_i \mid g_j >_E &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(it)\sin(jt)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos((i-j)t) - \cos((i+j)t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{4\pi}\left[\frac{\sin((i-j)t)}{i-j} - \frac{\sin((i+j)t)}{i+j}\right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= 0 \end{aligned}$$

- Soit $i \in [\![0, n]\!]$ et $j \in [\![1, n]\!]$, montrons que $< f_i \mid g_j >_E = 0$.
  On sait que $\sin(u+v) + \sin(u-v) = 2\sin(u)\cos(v)$ donc $\sin(u)\cos(v) = \frac{1}{2}\sin(u+v) + \frac{1}{2}\sin(u-v)$.
  On suppose tout d'abord $i \neq j$:
  On a
$$\begin{aligned} < f_i \mid g_j >_E &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(it)\sin(jt)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} sin((i+j)t) + \sin((j-i)t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{4\pi}\left[-\frac{\cos((i+j)t)}{i+j} + \frac{\cos((i-j)t)}{i-j}\right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= 0 \end{aligned}$$

  Si $i = j$, on a
$$< f_i \mid g_i >_E = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(it)\sin(it)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(2it)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4\pi}\left[-\frac{\cos(2it)}{2i}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

  On peut aussi traiter ce dernier cas sans faire de disjonction de cas en disant que la fonction $t \mapsto \cos(it)\sin(jt)$ est impaire et on l'intègre sur un intervalle centré en 0.

La famille est bien orthogonale.

Je me permets de vous signaler que l'intégrale d'une fonction périodique sur sa période n'est pas nécessairement nulle, même si la fonction en question est paire. Certains m'ont écrit " $=0$ par propriété des fonctions sinusoïdales". Vous savez que l'énoncé vous dit que vous allez trouver un produit scalaire nul n'est-ce pas? donc ne pas se fouler à le montrer proprement c'est quand même s'exposer à ne prendre aucun point

(c) *Calculer la norme des vecteurs de $\mathcal{F}_n$.*

- $||1||^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}t = 1.$
- Soit $i \in [\![1, n]\!]$, alors

$$||f_i||^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(it)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 1+\cos(2it)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$$

- Soit $i \in [\![1, n]\!]$, on remarque que $||f_i||^2 + ||g_i||^2 = 1$, on en déduit que $||g_i||^2 = \frac{1}{2}$. Ainsi, $||f_i|| = ||g_i|| = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Il fallait faire attention à ne pas diviser par 0 et donc, à traiter f_0 à part.

(d) *Montrer que F_n est de dimension finie et déterminer sa dimension.*

F_n est de dimension finie car il possède une famille génératrice finie. On a montré aux deux questions précédentes que la famille $\mathcal{F}_n$ est orthogonale et ne possède aucun élément nul (puisque les normes ne sont pas nulles), on en déduit que la famille est libre et, par suite, que $\dim(F_n) = 2n+1$.

Relisez l'énoncé, on demande de montrer qu'il est de dimension finie PUIS de la déterminer. On attend donc que vous reveniez à la définition de dimension finie. Dire que la famille est orthogonale donc libre ne donne aucun point car c'est faux si vous ne précisez pas que les vecteurs sont non nuls (pourquoi croyez-vous qu'on vous a fait calculer les normes avant!)

4. *Une projection orthogonale. Soit $h \in E$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $p_{F_n}(h)$ le projeté orthogonal de h sur F_n.*

(a) *Montrer qu'il existe un unique couple de suites $(a_k(h))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_k(h))_{n\in\mathbb{N}}$ tel que $b_0(h) = 0$ et*

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, p_{F_n}(h) = \sum_{k=0}^{n} a_k(h) f_k + \sum_{k=1}^{n} b_k(h) g_k$$

Exprimer pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k(h)$ et $b_k(h)$ à l'aide d'intégrales.

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On sait que la famille

$$\left(f_0, \sqrt{2}f_1, \dots, \sqrt{2}f_n, \sqrt{2}g_1, \dots, \sqrt{2}g_n\right),$$

est une BON de F_n. D'après l'expression du projeté dans une BON, on a donc

$$P_{F_n}(h) =< f_0, h > + \sum_{k=1}^{n} \langle h, \sqrt{2}f_k\rangle \sqrt{2} f_k + \sum_{k=1}^{n} \langle h, \sqrt{2}g_k\rangle \sqrt{2} g_k$$

En posant

- $a_0^{(n)}(h) = \langle f_0, h \rangle = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} h(t)\,\mathrm{d}t$,
- $\forall k \in [\![1, n]\!]$,

$$a_k^{(n)}(h) = 2\langle h, f_k \rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kt)h(t)\,\mathrm{d}t \text{ et } b_k^{(n)}(h) = 2\langle h, g_k \rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kt)h(t)\,\mathrm{d}t,$$

on a bien l'existence d'un $(2n+1)$-uplet tel que

$$p_{F_n}(h) = \sum_{k=0}^{n} a_k^{(n)}(h) f_k + \sum_{k=1}^{n} b_k^{(n)}(h) g_k.$$

De plus, ce $(2n+1)$-uplet est unique puisque la famille $\mathcal{F}_n$ est libre.

Soit maintenant $k \in \mathbb{N}^\star$. on remarque que pour tout $n \geqslant k$, $a_k^{(n)}(h)$ ne dépend pas de n (d'après l'expression intégrale qui ne dépend que de h et k). Posons, $\forall k \in \mathbb{N}, a_k(h) = a_k^{(k)}(h)$, $b_0(h) = 0$ et $b_k(h) = b_k^{(k)}$. On a alors deux suites $(a_k(h))_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telles que $b_0(h) = 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, p_{F_n}(h) = \sum_{k=0}^{n} a_k(h) f_k + \sum_{k=0}^{n} b_k(h) g_k.$$

Ces suites sont uniques puisque pour tout n fixé, leurs $2n+2$ premiers termes sont uniques.

Elle n'était pas simple cette question parce qu'il fallait d'abord dire que pour un n fixé, il existait $2n+1$ réels ($2n+2$ si on fixait b_0) uniques puis remarquer que les coefficients ne dépendaient pas de n que c'était les mêmes pour tout n (sous réserve d'en prendre suffisamment)

(b) *On note $\|h\|_E = \sqrt{\langle h, h\rangle_E}$. Démontrer que $\|p_{F_n}(h)\|_E \leqslant \|h\|_E$.*

On sait que $p_{F_n}(h)$ et $h - p_{F_n}(h)$ sont orthogonaux (car ils appartiennent respectivement à l'image et au noyau d'un projecteur orthogonal), par le théorème de Pythagore, on a donc

$$||h||_E^2 = ||p_{F_n}(h)||_E^2 + ||h - P_{F_n}(h)||_E^2 \geqslant ||p_{F_n}(h)||_E^2.$$

En prenant la racine carrée de l'inégalité, comme les quantités sont positives, on a donc $||p_{F_n}(h)||_E \leqslant ||h||_E$.

(c) *Justifier que les suites $(a_k(h))_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_k(h))_{k\in\mathbb{N}}$ sont éléments de $l^2(\mathbb{N})$ et que $a_0(h)^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty} a_k(h)^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty} b_k(h)^2 \leqslant \|h\|_E^2$.*

Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question 4a, on a

$$p_{F_n}(h) = \sum_{k=0}^{n} a_k(h) f_k + \sum_{k=1}^{n} b_k(h) g_k,$$

et la famille $\mathcal{F}_n$ est orthogonale. On en déduit que

$$||p_{F_n}(h)||_E^2 = \sum_{k=0}^{n} a_k(h)^2 \, ||f_k||^2 + \sum_{k=1}^{n} b_k(h)^2 \, ||g_k||^2.$$

On sait que $||f_0||_E = 1$ et $\forall k \in [\![1, n]\!], ||f_k||_E = ||g_k||_E = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, on a donc

$$||p_{F_n}(h)||_E^2 = a_0(h)^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} a_k(h)^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} b_k(h)^2.$$

D'après la question précédente, on sait que $\forall n \in \mathbb{N}$, $||p_{F_n}(h)||_E \leqslant ||h||_E$, on a donc,

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_0(h)^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} a_k(h)^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} b_k(h)^2 \leqslant ||h||_E^2 .$$

En particulier, on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} a_k(h)^2 \leqslant ||h||_E^2 \text{ et } \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} b_k(h)^2 \leqslant ||h||_E^2 .$$

Les suites $\left(\sum_{k=1}^{n} a_k(h)^2\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\sum_{k=1}^{n} b_k(h)^2\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont donc croissantes et majorées, ce qui montre que les séries $\sum a_k(h)^2$ et $\sum b_k(h)^2$ convergent donc $(a_k(h))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_k(h))_{n\in\mathbb{N}}$ sont des éléments de $l^2(\mathbb{N})$.

En passant à la limite quand n tend vers $+\infty$ dans l'inégalité

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} a_k(h)^2 \leqslant ||h||_E^2 \text{ et } \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} b_k(h)^2 \leqslant ||h||_E^2 ,$$

on obtient l'inégalité souhaitée
Il fallait justifier que l'on pouvait passer à la limite avant de faire tendre n vers $+\infty$.

5. *Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer*

$$\inf_{\alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathbb{R}} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left(1 - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \sin(kt)\right)^2 \mathrm{d}t\right)$$

Si on note $H_n = \mathrm{Vect}\,(g_1, \dots, g_n)$, alors

$$\inf_{\alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathbb{R}} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left(1 - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \sin(kt)\right)^2 \mathrm{d}t\right) = \inf_{h\in H_n} 2\pi\, ||1-h||_E^2 = 2\pi d(f_0, H_n).$$

Comme H_n est un sous-espace vectoriel de F_n, il est de dimension finie, on a donc $d(f_0, H_n) = ||f_0 - p_{H_n}(f_0)||_E$, où p_{H_n} désigne le projecteur orthogonal sur H_n. Or, on sait que $f_0 \in H_n^\perp$, on a donc $p_{H_n}(f_0) = 0$ donc

$$\inf_{\alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathbb{R}} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left(1 - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \sin(kt)\right)^2 \mathrm{d}t\right) = 2\pi\, ||f_0||^2 = 2\pi.$$

Exercice 3 1. Soit $n \geqslant 1$. Tout d'abord, X_n désignant un nombre d'individus, il est positif.

Ensuite, si l'on note Y_{n-1} le nombre d'individus à la génération $n-1$ qui donne naissance à deux descendants, alors on a $X_n = 2Y_{n-1}$. Cela prouve que, pour tout $n \geqslant 1$, X_n est un entier pair.

De plus, par définition, $Y_{n-1} \leqslant X_{n-1}$, donc $X_n \leqslant 2X_{n-1}$. Cette inégalité, couplée au fait que $X_0 = 1$, donne par récurrence immédiate $X_n \leqslant 2^n$.

2. D'après l'énoncé, $X_1(\Omega) = \{0; 2\}$, avec $\mathbb{P}(X_1 = 2) = p$ et $\mathbb{P}(X_1 = 0) = 1 - p$.

Pour X_2: on a $X_2(\Omega) = \{0; 2; 4\}$.

- D'après la formule des probas totales, avec le SCE $((X_1 = 0), (X_1 = 2))$, et par indépendance des individus de la génération 2,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_2 = 0) &= \mathbb{P}(X_1 = 0)\mathbb{P}(X_2 = 0 \mid X_1 = 0) + \mathbb{P}(X_1 = 2)\mathbb{P}(X_2 = 0 \mid X_1 = 2) \\ &= (1-p) \times 1 + p \times (1-p)^2 \\ &= (1-p)\,(1 + p(1-p))\end{aligned}$$

- De même, d'après la formule des probas totales, avec le SCE $((X_1 = 0), (X_1 = 2))$, et par indépendance des individus de la génération 2,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_2 = 4) &= \mathbb{P}(X_1 = 0)\mathbb{P}(X_2 = 4 \mid X_1 = 0) + \mathbb{P}(X_1 = 2)\mathbb{P}(X_2 = 4 \mid X_1 = 2) \\ &= 0 + p \times p^2 = p^3\end{aligned}$$

- Enfin,

$$\mathbb{P}(X_2 = 2) = 1 - \mathbb{P}(X_2 = 0) - \mathbb{P}(X_2 = 4) = 1 - \big((1-p)\,(1 + p(1-p)) + p^3\big) = 2p^2(1-p)$$

N'oubliez pas de préciser $X(\Omega)$!

3. On a $r_0 = 0$, d'après l'énoncé.

4. Par la formule des probas totales, en utilisant le SCE $((X_1 = 0), (X_1 = 2))$,

$$\begin{aligned}r_{n+1} = \mathbb{P}(X_{n+1} = 0) &= \mathbb{P}(X_1 = 0)\mathbb{P}(X_{n+1} = 0 \mid X_1 = 0) + \mathbb{P}(X_1 = 2)\mathbb{P}(X_{n+1} = 0 \mid X_1 = 2) \\ &= (1-p) + p \times \underbrace{\mathbb{P}(X_{n+1} = 0 \mid X_1 = 2)}_{=:u_n}\end{aligned}$$

Intéressons-nous maintenant à la probabilité u_n. Supposons pour cela que l'événement $(X_1 = 2)$ est réalisé; il y a donc deux individus A et B en vie à la génération 1. Chacun de ces individus va donner naissance à une descendance indépendante de l'autre individu. On peut noter, pour tout $n \geqslant 1$, A_n et B_n le nombre d'individus respectifs dans ces lignées à la génération n, de sorte que $A_1 = B_1 = 1$, et $X_n = A_n + B_n$. De plus, à un décalage près d'une génération, A_n et B_n suivent la même loi que les X_n, puisque le processus de reproduction est le même entre A_{n+1} et A_n qu'entre X_{n+1} et X_n. On a alors, par indépendance (conditionnellement à $(X_1 = 2)$) des deux lignées,

$$\begin{aligned}u_n = \mathbb{P}(X_{n+1} = 0 \mid X_1 = 2) &= \mathbb{P}((A_{n+1} = 0)\ \cap\ (B_{n+1} = 0) \mid X_1 = 2) \\ &= \mathbb{P}(A_{n+1} = 0 \mid X_1 = 2) \times \mathbb{P}(B_{n+1} = 0 \mid X_1 = 2) \\ &= r_n \times r_n\end{aligned}$$

La dernière égalité étant vraie, puisque, par exemple, $\mathbb{P}(A_{n+1} = 0 \mid X_1 = 2)$ est la probabilité que, partant d'un individu, sa lignée soit éteinte n générations plus tard; ce qui vaut bien r_n.

On en déduit alors la formule voulue :

$$r_{n+1} = 1 - p + p(r_n)^2$$

5. (a) La fonction f_p est dérivable sur $[0;1]$, et pour tout $x \in [0;1]$, on a

$$f_p'(x) = 2px \geqslant 0$$

Ainsi, la fonction f_p est croissante sur $[0;1]$.

(b) ► Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $P(n)$: "$0 \leqslant r_n \leqslant r_{n+1} \leqslant 1$". Montrons que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par récurrence.

- Pour $n = 0$, on a $r_0 = 0$, et $r_1 = p \in [0;1]$. On a bien $0 \leqslant r_0 \leqslant r_1 \leqslant 1$; $P(0)$ est donc vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie. Par hypothèse de récurrence, et par croissance de f, on a:

$$\begin{array}{rccccccc} & 0 & \leqslant & r_n & \leqslant & r_{n+1} & \leqslant & 1 \\ \text{Donc:} & f_p(0) & \leqslant & f_p(r_n) & \leqslant & f_p(r_{n+1}) & \leqslant & f_p(1) \\ \text{càd:} & 1-p & \leqslant & r_{n+1} & \leqslant & r_{n+2} & \leqslant & 1 \end{array}$$

  Comme $1-p \geqslant 0$, on en déduit que $P(n+1)$ est bien vraie.
- Finalement, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On a montré que la suite (r_n) est croissante et à valeurs dans $[0;1]$.

▶ Ainsi, (r_n) est croissante et à valeurs dans $[0;1]$, donc majorée; elle converge alors vers un réel $\ell \in [0;1]$.

Vous pouvez aller plus vite mais il faut impérativement que vous mentionnez intervalle stable! Ensuite, la croissance de f donne la monotonie de la suite et le sens de monotonie est donné par la position de r_0 par rapport à r_1.

(c) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes:

$$f_p(x) = x \Leftrightarrow px^2 - x + (1-p) = 0$$

Le discriminant de ce polynôme de degré 2 est $\Delta := 1 - 4p(1-p) = 4p^2 - 4p + 1 = (2p-1)^2 \geqslant 0$. Le polynôme admet alors deux racines (éventuellement confondues, comme on va le voir) :

$$\alpha_p = \frac{1 - \sqrt{(2p-1)^2}}{2p} = \frac{1 - |2p-1|}{2p}, \quad \text{et} \quad \beta_p = \frac{1 + \sqrt{(2p-1)^2}}{2p} = \frac{1 + |2p-1|}{2p}$$

Dès lors, trois cas se présentent:

- Si $p < \frac{1}{2}$, alors $2p - 1 < 0$, et dans ce cas on a

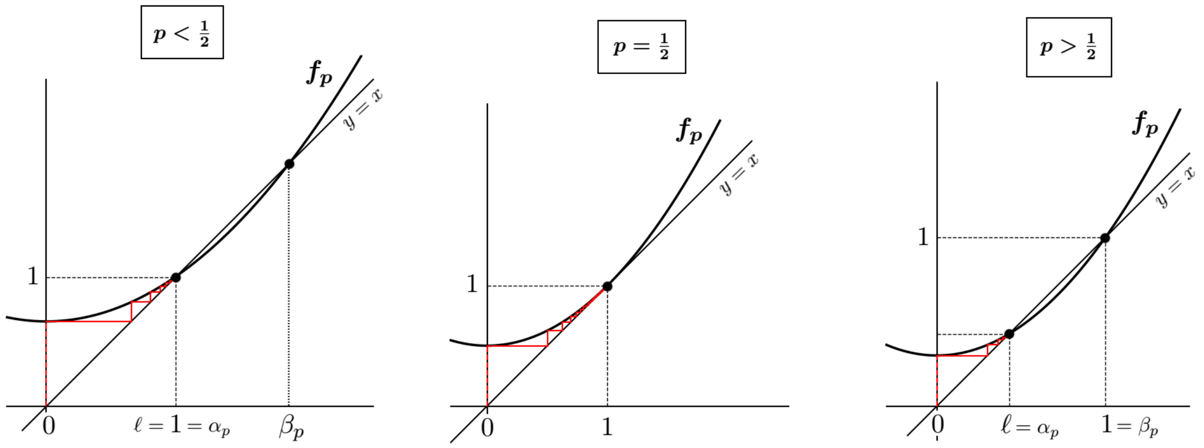
$$\alpha_p = \frac{1 - (1-2p)}{2p} = 1, \quad \text{et} \quad \beta_p = \frac{1 + (1-2p)}{2p} = \frac{1-p}{p} > 1$$

- Si $p = \frac{1}{2}$, alors $2p - 1 = 0$, et dans ce cas, f_p admet un seul point fixe:

$$\alpha_p = \beta_p = \frac{1}{2p} = 1$$

- Si $p > \frac{1}{2}$, alors $2p - 1 > 0$, et dans ce cas on a

$$\alpha_p = \frac{1 - (2p-1)}{2p} = \frac{1-p}{p} < 1, \quad \text{et} \quad \beta_p = \frac{1 + (2p-1)}{2p} = 1$$



(d) Tout d'abord, montrons que ℓ est un point fixe de f_p. Pour cela, il suffit de faire un passage à la limite dans l'égalité, valable pour tout $n \in \mathbb{N}$, $r_{n+1} = f_p(r_n)$; par continuité de f_p, on obtient $\ell = f_p(\ell)$. Ceci montre que ℓ est bien un point fixe de f_p.

Montrons ensuite que, quelle que soit la valeur de p, l'intervalle $I := [0; \alpha_p]$ est stable par f_p. En effet, soit $x \in I$; on peut donc écrire $0 \leqslant x \leqslant \alpha_p$.

Par croissance de f_p sur $I \subset [0; 1]$, on en déduit :

$$0 \leqslant 1 - p = f_p(0) \leqslant f_p(x) \leqslant f_p(\alpha_p) = \alpha_p$$

De plus, comme $r_0 = 0 \in I$, par récurrence immédiate, on en déduit que (r_n) est à valeurs dans I. Comme elle converge vers un point fixe, on en déduit que (r_n) converge vers α_p, puisque l'intervalle fermé $I = [0; \alpha_p]$ ne contient aucun autre point fixe.

Ainsi, par la question précédente:

- Si $p < \dfrac{1}{2}$, alors $r_n \longrightarrow_{n \to +\infty} \alpha_p = 1$.
- Si $p = \dfrac{1}{2}$, alors $r_n \longrightarrow_{n \to +\infty} \alpha_p = 1$.
- Si $p > \dfrac{1}{2}$, alors $r_n \longrightarrow_{n \to +\infty} \alpha_p = \dfrac{1-p}{p}$.

6. ► Si $p < \dfrac{1}{2}$, alors $\ell = 1$, et dans ce cas,

$$2p\ell = 2p < 1$$

Si maintenant $p > \dfrac{1}{2}$, alors $\ell = \alpha_p = \dfrac{1-p}{p}$, et dans ce cas,

$$2p\ell = 2p\,\frac{1-p}{p} = 2(1-p) < 1$$

En effet, $2p > 1$, ce qui donne bien $2 - 2p < 1$.

► Appliquons l'inégalité des accroissements finis à la fonction f_p sur l'intervalle $[0; \alpha_p] = [0; \ell]$. On a, pour tout $x \in [0; \ell]$, $\left|f_p'(x)\right| = |2px| = 2px \leqslant 2p\ell$.

Par l'inégalité des accroissements finis, f_p est $2p\ell$-lipschitzienne; autrement dit, pour tous $x, y \in [0; \ell]$,

$$|f_p(x) - f_p(y)| \leqslant 2p\ell\,|x - y|$$

En particulier, pour $x = r_n$ et $y = \ell$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|r_{n+1} - \ell| = |f_p(r_n) - f_p(\ell)| \leqslant 2p\ell\,|r_n - \ell|$$

Par récurrence immédiate, on obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|r_n - \ell| \leqslant (2p\ell)^n\, |r_0 - \ell| = (2p\ell)^n \cdot \ell$$

7. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a, comme $p = \dfrac{1}{2}$:

$$\frac{1}{1-r_{n+1}} = \frac{1}{1-f_p(r_n)} = \frac{1}{1-(\frac{1}{2}r_n^2 + \frac{1}{2})} = \frac{2}{1-r_n^2}$$

On en déduit, en remarquant que $1 - r_n^2 = (1-r_n)(1+r_n)$:

$$\frac{1}{1-r_{n+1}} - \frac{1}{1-r_n} = \frac{2}{1-r_n^2} - \frac{1}{1-r_n} = \frac{1-r_n}{(1-r_n)(1+r_n)} = \frac{1}{1+r_n}$$

(b) Soit donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$, et telle que $u_n \longrightarrow_{n\to+\infty} c > 0$. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$: $S_n := \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$. L'objectif est de montrer que $\dfrac{S_n}{cn} \longrightarrow_{n\to+\infty} 1$.

Fixons $\varepsilon > 0$.

Par définition de la limite, il existe un rang $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $k \geqslant k_0$,

$$|u_k - c| \leqslant \varepsilon, \quad \text{càd} \quad c - \varepsilon \leqslant u_k \leqslant c + \varepsilon$$

Soit $n \geqslant k_0 + 1$. On somme ces inégalités pour $k \in [\![k_0+1, n]\!]$:

$$(c-\varepsilon)(n-k_0) \leqslant S_n - S_{k_0} \leqslant (c+\varepsilon)(n-k_0)$$

On obtient ainsi, en divisant par cn et en isolant $\frac{S_n}{cn}$:

$$\frac{c-\varepsilon}{c} - \frac{(c-\varepsilon)k_0 - S_{k_0}}{cn} \leqslant \frac{S_n}{cn} \leqslant \frac{c+\varepsilon}{c} - \frac{(c+\varepsilon)k_0 - S_{k_0}}{cn}$$

càd:

$$1 - \frac{\varepsilon}{c} - \frac{(c-\varepsilon)k_0 - S_{k_0}}{cn} \leqslant \frac{S_n}{cn} \leqslant 1 + \frac{\varepsilon}{c} - \frac{(c+\varepsilon)k_0 - S_{k_0}}{cn}$$

On note $C_1 := (c-\varepsilon)k_0 - S_{k_0}$ et $C_2 := (c+\varepsilon)k_0 - S_{k_0}$. Comme $\dfrac{C_1}{cn} \longrightarrow_{n\to+\infty} 0$ et $\dfrac{C_2}{cn} \longrightarrow_{n\to+\infty} 0$, il existe un rang $N \geqslant 1$ à partir duquel $\left|\dfrac{C_1}{cn}\right| \leqslant \varepsilon$ et $\left|\dfrac{C_2}{cn}\right| \leqslant \varepsilon$.

On obtient donc, pour tout $n \geqslant \max(k_0+1, N)$,

$$1 - \frac{\varepsilon}{c} - \varepsilon \leqslant \frac{S_n}{cn} \leqslant 1 + \frac{\varepsilon}{c} - \varepsilon$$

Ceci étant valable pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit, par définition de la limite, que $\dfrac{S_n}{cn} \longrightarrow_{n\to+\infty} 1$; càd $S_n \sim c \cdot n$.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a, par la question 7a, et par télescopage (en se rappelant que $r_0 = 0$),

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1+r_k} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{1-r_{k+1}} - \frac{1}{1-r_k} \right) = \frac{1}{1-r_n} - \frac{1}{1-r_0} = \frac{1}{1-r_n} - 1$$

De plus, par la question 7b, on a $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1+r_k} \sim c(n-1) \sim cn$, où $c = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1+r_n} = \frac{1}{2}$, puisque pour $p = \frac{1}{2}$, $r_n \longrightarrow_{n\to+\infty} 1$.
On en déduit

$$\frac{1}{1-r_n} - 1 = \frac{n}{2} + o(n)$$

puis

$$r_n = 1 - \frac{1}{1+\frac{n}{2}+o(n)} = 1 - \frac{1}{\frac{n}{2}(1+o(1))} = 1 - \frac{2}{n}(1+o(1)) = 1 - \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Exercice 4 1. Soit P et Q des polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors en utilisant la linéarité de la dérivée, on obtient :

$$\begin{aligned}\Phi(P+\lambda Q) &= ((X^2-1)(P+\lambda Q))'' \\ &= ((X^2-1)P + \lambda(X^2-1)Q))'' \\ &= ((X^2-1)P)'' + \lambda((X^2-1)Q)'' \\ &= \Phi(P) + \lambda\Phi(Q).\end{aligned}$$

De plus si P est de degré au plus n, $(X^2-1)P$ est encore un polynôme, de degré au plus $n+2$ et donc $\Phi(P)$ est bien un polynôme de degré au plus n, donc Φ est à valeurs dans $\mathbb{R}_n[X]$. On a donc montré que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

On a parfois l'impression que vous pensez que les éléments de $\mathbb{R}_n[X]$ sont de degré n ce qui est TRES faux ! Si vous dites que le degré de la dérivée vaut le degré " -1", c'est faux. Il faut préciser le cas où on dérive un polynôme constant.

2. (a) La base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est $(1, X, \ldots, X^n)$. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, on a

$$\Phi(X^k) = (X^{k+2} - X^k)'' = (k+2)(k+1)X^k - k(k-1)X^{k-2}.$$

Cette écriture convient aussi pour $k = 0$ ou $k = 1$ puisque $\Phi(1) = (X^2-1)'' = 2$ et $\Phi(X) = (X^3 - X)'' = 6X$.
La matrice de Φ dans la base canonique s'écrit donc

$$Mat_{(1,X,\ldots,X^n)}\Phi = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 6 & 0 & -6 & 0 & & \vdots \\ \vdots & 0 & 12 & 0 & -12 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & 20 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & & & 0 & 30 & \ddots & -n(n-1) \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & (n+2)(n+1) \end{pmatrix}$$

Beaucoup d'erreurs de signe dans le report des coefficients dans la matrice, quel dommage !

(b) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la matrice de $\Phi - \lambda \mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[X]}$ dans la base canonique est triangulaire, et son déterminant s'obtient alors en effectuant le produit des termes diagonaux.
On en déduit que ce déterminant est nul si et seulement si λ est égal à un des termes diagonaux, à savoir $\lambda_0 := 2$, $\lambda_1 := 6$, $\lambda_2 := 12$, ..., $\lambda_n := (n+2)(n+1)$ (c'est-à-dire pour

tout $k \in [\![0,n]\!]$, $\lambda_k = (k+2)(k+1)$ qui est bien une fonction strictement croissante sur les entiers naturels).

On a montré que, pour cette suite $\lambda_0 < \lambda_1 < \ldots \lambda_n$ de réels distincts, $\Phi - \lambda \mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[X]}$ est non bijective.

$\lambda_i Id$ est la matrice diagonale avec le même coefficient λ_i sur la diagonale (et pas $\mathrm{diag}(\lambda_0, \ldots, \lambda_n)$)

(c) Enfin, pour tout $i \in [\![0;n]\!]$, la matrice de $\Phi - \lambda_i \mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[X]}$ (qui est de taille $n+1$) est triangulaire avec n termes diagonaux non nuls (et un terme nul, par construction des λ_i), donc $\Phi - \lambda_i \mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[X]}$ est de rang n.

La matrice est de taille $n+1$!!!

3. Soit $k \in \mathbb{N}$.

- Comme $\Phi - \lambda_k \mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[X]}$ est de rang n d'après la question précédente, on a, d'après la formule du rang:
$$\dim(\ker(\Phi - \lambda_k \mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[X]})) = \dim(\mathbb{R}_n[X]) - n = 1$$
Donc $\ker(\Phi - \lambda_k \mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[X]})$ est une droite vectorielle.
Il existe donc $\tilde{P}_k \in \ker(\Phi - \lambda_k \mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[X]})$, $\tilde{P}_k \neq 0$, tel que $\ker(\Phi - \lambda_k \mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[X]}) = \mathrm{Vect}(\tilde{P}_k)$.
Notons alors $\alpha_k \neq 0$ le coefficient dominant de $\tilde{P}_k$. On pose $P_k := \dfrac{1}{\alpha_k}\tilde{P}_k$; par construction, le polynôme P_k est unitaire et il engendre $\ker(\Phi - \lambda_k \mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[X]})$.
Attention, de dimension 1 ne signifie pas du tout que le ssev ne contient qu'un élément !!!

- Démontrons l'unicité de P_k. Considérons à présent un polynôme $Q_k \in \ker(\Phi - \lambda_k \mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[X]})$ unitaire; comme P_k et Q_k appartiennent à la même droite vectorielle et $P_k \neq 0$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $Q_k = \alpha P_k$. Or, les deux polynômes étant unitaires, on en déduit que $\alpha = 1$.
Conclusion : il existe bien un unique polynôme unitaire dans $\ker(\Phi - \lambda_k \mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[X]})$.

4. (a) Sur la matrice, on lit que pour tout polynôme unitaire P de degré d, $\Phi(P)$ a pour terme dominant $(d+2)(d+1)X^d = \lambda_d X^d$.
Or, pour $k \in [\![0,n]\!]$, $\Phi(P_k) = \lambda_k P_k$, donc le coefficient dominant de $\Phi(P_k)$ est $\lambda_k = (k+2)(k+1)$ puisque P_k est un polynôme unitaire.
D'après ce qui précède, P_k est de degré k, puisque la fonction $k \mapsto \lambda_k$ est injective car strictement croissante. On peut aussi le refaire à la main : $(k+2)(k+1) = (d+2)(d+1) \Leftrightarrow (d-k)(d+k+3) = 0 \Leftrightarrow d = k$.
Très souvent mal traitée.

(b) - Notons $R = (X^2-1)P_k$, de sorte que $(X^2-1)Q_k = ((-X)^2-1)P_k(-X) = R(-X)$. On a alors, en remarquant que $R'' = \Phi(P_k)$:
$$\Phi(Q_k) = (R(-X))'' = R''(-X) = \Phi(P_k)(-X) = \lambda_k P_k(-X) = \lambda_k Q_k.$$
Le polynôme Q_k est donc également dans $\ker(\Phi - \lambda_k \mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[X]})$, qui est une droite vectorielle engendrée par le polynôme unitaire P_k, donc Q_k est un multiple de P_k.
- On a $Q_k = P_k(-X)$ donc Q_k est de même degré que P_k et, puisque P_k est lui-même unitaire, le coefficient dominant de Q_k est égal à $(-1)^k$.
On a donc $Q_k = (-1)^k P_k$ donc $P_k(-X) = (-1)^k P_k(X)$.

Là majorité est passée à côté. De manière générale pour un endomorphisme Φ quelconque, $\Phi(P)(-X) \neq \Phi(P(-X))$. Pensez à la dérivation.

5. On a vu que $\Phi(1) = 2$ et $\Phi(X) = 6X$, donc $P_0 = 1$ et $P_1 = X$ (ils sont bien unitaires). Étant donné la forme de la matrice, on va chercher P_2 sous la forme $X^2 + a$ et P_3 sous la forme $X^3 + bX$, avec a et b des réels. On sait que $\Phi(P_2) = 12P_2$ et $\Phi(P_3) = 20P_3$ donc :

$$\Phi(X^2 + a) = 12X^2 - 2 + 2a = 12(X^2 + a) \iff -2 + 2a = 12a \iff a = -\frac{1}{5}$$

$$\Phi(X^3 + bX) = 20X^3 - 6X + 6bX = 20(X^3 + bX) \iff -6 + 6b = 20b \iff b = -\frac{3}{7}$$

Donc $P_2 = X^2 - \frac{1}{5}$ et $P_3 = X^3 - \frac{3}{7}X$.

6. La fonction proposée est bien à valeurs réelles, puisqu'on intègre des fonctions continues sur un segment.

   - *symétrie :* quels que soient les polynômes P et Q, on a visiblement $(P \mid Q) = (Q \mid P)$.
   - *bilinéarité :* puisque l'expression est symétrique, il suffit de montrer la linéarité à gauche (par exemple). Soient $P, \tilde{P}, Q$ des polynômes et λ un réel,

   $$(P + \lambda\tilde{P} \mid Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)(1 - t^2)dt + \lambda \int_{-1}^{1} \tilde{P}(t)Q(t)(1 - t^2)dt = (P \mid Q) + \lambda(\tilde{P} \mid Q)$$

   par linéarité de l'intégrale, donc $(\cdot \mid \cdot)$ est linéaire à gauche, donc bilinéaire par symétrie.
   - *défini positif :* si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $(P \mid P) = \int_{-1}^{1} P^2(t)(1 - t^2)dt$ est positif par positivité de l'intégrale, puisque les bornes sont dans le bon ordre et $\forall t \in [-1, 1], P^2(t)(1 - t^2) \geqslant 0$.
   De plus si $(P \mid P) = 0$, alors $\int_{-1}^{1} P^2(t)(1 - t^2)dt = 0$. Par stricte positivité de l'intégrale, comme $t \mapsto P^2(t)(1 - t^2)$ est positive et continue sur $[-1, 1]$, cela implique que $P^2(t)(1 - t^2) = 0$ pour tout $t \in [-1, 1]$, donc en particulier $P(t) = 0$ sur $]-1, 1[$. Or P est un polynôme, donc puisqu'il admet une infinité de racines, c'est forcément le polynôme nul.
   - *conclusion :* l'application $(\cdot \mid \cdot)$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive : c'est donc un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

   On perd des points si on invoque la stricte positivité de l'intégrale sans préciser que la fonction est continue ou quand on montre la linéarité à droite (ou à gauche) et qu'on dit juste "donc bilinéaire" sans préciser que c'est grâce à la symétrie. Vous avez le droit d'invoquer la linéarité de l'intégrale mais en écrivant explicitement ce qu'elle vous donne comme égalité (ce qui montre alors que vous savez ce qu'il faut montrer pour avoir la linéarité).

7. Soit $(P, Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2$. Alors en procédant à deux IPP successives en intégrant $u(t) = ((X^2 - 1)P)''(t)$ et en dérivant $v(t) = Q(t)(1 - t^2) = ((1 - X^2)Q)(t)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
(\Phi(P) \mid Q) &= \int_{-1}^{1} ((X^2 - 1)P)''(t)Q(t)(1 - t^2)dt \\
&= \underbrace{\left[((X^2 - 1)P)'((1 - X^2)Q)\right]_{-1}^{1}}_{=0} - \int_{-1}^{1} ((X^2 - 1)P)'(t)((1 - X^2)Q)'(t)dt \\
&= -\underbrace{\left[((X^2 - 1)P)((1 - X^2)Q)'\right]_{-1}^{1}}_{=0} + \int_{-1}^{1} ((X^2 - 1)P)(t)((1 - X^2)Q)''(t)dt \\
&= \int_{-1}^{1} ((1 - X^2)P)(t)((X^2 - 1)Q)''(t)dt \\
&= \int_{-1}^{1} (1 - t^2)P(t)\Phi(Q)(t)dt = (P \mid \Phi(Q)).
\end{aligned}$$

Pour passer de la 3e à la 4e ligne, on a multiplié X^2-1 et $1-X^2$ par -1, et utilisé la linéarité de la dérivée.

8. Comme $\deg P_k = k$ pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, la famille $(P_0,\dots,P_n)$ est échelonnée et de cardinal $n+1 = \dim \mathbb{R}_n[X]$: on sait donc déjà que c'est base de $\mathbb{R}_n[X]$. Montrons que c'est une base orthogonale : si $i \neq j$,

$$\lambda_i(P_i \mid P_j) = (\Phi(P_i) \mid P_j) = (P_i \mid \Phi(P_j)) = \lambda_j(P_i \mid P_j)$$

   mais $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$, et donc on a nécessairement $(P_i \mid P_j) = 0$.

   La famille $(P_0,\dots,P_n)$ est donc une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

9. Soit $k \in [\![0,n]\!]$. Alors vérifions que $\mathrm{Vect}(P_0,\dots,P_{k-1}) = \mathbb{R}_{k-1}[X]$: la famille $(P_0,\dots,P_{k-1})$ est échelonnée en degré (donc libre), et chaque polynôme est de degré inférieur à $k-1$. On a donc $\mathrm{Vect}(P_0,\dots,P_{k-1}) \subset \mathbb{R}_{k-1}[X]$ et l'égalité des dimensions donne l'égalité entre ces sous-espaces vectoriels.

   Comme P_k est orthogonal à chacun des P_i pour $i \neq k$, il appartient bien à l'orthogonal de $\mathrm{Vect}(P_0,\dots,P_{k-1})$, donc $P_k \in \mathbb{R}_{k-1}[X]^\perp$.

Une famille orthogonale n'est libre que si elle ne contient aucun vecteur ul