Lycée du Parc
PCSI 842 Année 2024-2025
Feuille 24

TD 24: Variables aléatoires.

1 Manipulation

Exercice 1.
Soit Y une variable aléatoire prenant les valeurs $2, 4, 6$ et 8. On a $P(Y < 6) = \dfrac{1}{4}$, $P(Y > 6) = \dfrac{1}{2}$ et $P(Y = 4) = P(Y = 2)$. Déterminer la loi de Y et calculer son espérance.

Exercice 2.
On considère une variable aléatoire X dont la loi est donnée par : P(X=1)=P(X=4)=P(X=9)=1/3. On pose Z=$\sqrt{X}$, calculer l'espérance de Z.

Exercice 3.
On dispose de deux urnes U et V. L'urne U contient 3 boules noires et 2 boules blanches, et l'urne V 4 boules noires et 1 boule blanche.

1. On choisit une urne au hasard et on en extrait successivement trois boule, avec remise à chaque fois de la boule tirée.

   On note X la var égale au nombre de boules noires tirées. Déterminer $P(X = 0)$.
2. On choisit une urne au hasard et on en extrait successivement 3 boules, sans remise de la boule tirée.

   On note Y la var égale au nombre de boules noires tirées. Calculer $P(Y = 3)$.

Exercice 4.
Une urne contient deux boules blanches et huit boules noires. Un joueur tire 5 boules successivement et sans remise. Soit B la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches tirées et N égale au nombre de boules noires tirées.

1. Déterminer la loi de B puis calculer $E(B)$.
2. Trouver une relation liant B et N. En déduire la loi de N et son espérance.

Exercice 5.
Soit X une var à valeurs dans $[\![1, n]\!]$, montrer que $E(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(X \geqslant k)$.

Exercice 6.
Un mobile se déplace par sauts aléatoirement sur les points à coordonnées entières et positives ou nulles d'un axe d'origine O. Le voyage se déroule ainsi :
• Le mobile est en O à l'instant 0
• Si le mobile est sur le point d'abscisse k à l'instant n, alors : à l'instant $n+1$, il sera : $\begin{cases} \text{soit sur le point d'abscisse } k+1 \text{ avec la probabilité } p \in]0,1[\\ \text{soit en O avec la probabilité } 1-p \end{cases}$
On appelle X_n la v.a.r. égale à l'abscisse du mobile à l'instant n : $X_0 = 0$.

1. Donner la loi de X_1.
2. Montrer que : $X_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$.
3. (a) Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall k \in [\![1, n]\!], \quad P(X_n = k) = p\, P(X_{n-1} = k-1)$
   (b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad E(X_n) = p\, E(X_{n-1}) + p$
   (c) Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $E(X_n)$ en fonction de p et de n.

Exercice 7.
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\beta \in \mathbb{R}$, et soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0, n]\!]$ telle que $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $P(X = k) = \beta \dfrac{\binom{n}{k}}{k+1}$

1. Déterminer β.
2. Calculer $E(X)$.

2 Lois usuelles

Exercice 8.
Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n, p. Donner (puis reconnaître) la loi de $Y = n - X$.

Exercice 9.
Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n, p. Les résultats de X sont censés être affichés sur un compteur mais celui-ci est détraqué:

- Lorsque X prend la valeur n, le compteur affiche la bonne valeur de X.
- Lorsque X prend la valeur k, avec $k < n$, le compteur affiche $k + 1$.

On note Y la variable aléatoire égale à la valeur affichée sur le compteur.

1. Déterminer la loi de Y.
2. Montrer que $E(Y) \geqslant E(X)$.
3. Aurait-on pu prévoir ce résultat?

Exercice 10.
Soit X une variable aléatoire binomiale de taille n et de paramètre $p \in]0,1[$. Calculer l'espérance de la variable $Y = \dfrac{1}{X+1}$.

Exercice 11.

Donner la loi de X dans chacun des cas suivants. Préciser l'univers image et les paramètres.

1. On suppose que la probabilité de naissance d'une fille et d'un garçon sont identiques. X est le nombre de filles dans une famille de 3 enfants.
2. Dans un champ, on trouve 15 lamas, 15 dromadaires et 15 chameaux. On sort un animal au hasard de ce champ. X est le nombre de bosses de cet animal.
3. On range 20 cravates dans 3 tiroirs, au hasard. X est le nombre de cravates dans le premier tiroir.
4. Un jeu de tarot (78 cartes) est mélangé et posé faces cachées. On retourne une par une les cartes jusqu'à trouver l'Excuse. X est le nombre de cartes retournées au total.

3 Couples de variables aléatoires

Exercice 12.
Soit X et Y deux variables aléatoires réelles. Montrer que $|\operatorname{Cov}(X,Y)| \leqslant \sqrt{\mathbb{V}(X)\mathbb{V}(Y)}$.

Exercice 13.
À un péage autoroutier n voitures franchissent au hasard et indépendamment l'une des trois barrières de péage mises à leur disposition. On note X_1, X_2, X_3 les variables aléatoires dénombrant les voitures ayant franchi ces barrières.

1. Déterminer la loi de X_1.
2. Calculer les variances de X_1, X_2 et de $X_1 + X_2$.
3. En déduire la covariance de X_1 et X_2. Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

Exercice 14.
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant les lois $\mathcal{B}(m,p)$ et $\mathcal{B}(n,p)$ respectivement. Montrer que $X+Y$ suit la loi $\mathcal{B}(m+n,p)$.

Exercice 15.
On pioche deux boules successivement et sans remise dans une urne contenant a boules noires et b boules blanches. On note X_1 la variable indicatrice de l'événement "la première boule est noire" et X_2 la variable indicatrice de l'événement "la seconde boule est noire".

1. Déterminer la loi conjointe du couple (X_1, X_2), ainsi que ses lois marginales.
2. Montrer que X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.
3. Déterminer $\mathbb{E}(X_1X_2)$ et $\mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_2)$.
4. Soit $X = X_1 + X_2$. Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.

Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev

Exercice 16.
Soient X une variable aléatoire réelle et $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction strictement croissante. Montrer que

$$\forall a \geqslant 0, \qquad \mathbb{P}(|X| \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbb{E}(g(|X|))}{g(a)}.$$

Exercice 17.
Lors d'élections, on sait qu'un parti politique recueille en général un pourcentage p des voix compris entre 20 et 30. Combien de personnes suffit-il d'interroger à la sortie du bureau de vote pour estimer p avec une précision de 3%, et une probabilité d'erreur inférieure à 10% ?

Exercice 18.
Soit X une variable aléatoire d'espérance μ et d'écart-type σ. Montrer que pour tout réel α strictement positif.

$$\mathbb{P}(\mu - \alpha\sigma < X < \mu + \alpha\sigma) \geqslant 1 - \frac{1}{\alpha^2}.$$

4 Si besoin d'encore un peu d'entrainement

Exercice 19.
On considère un dé cubique truqué à six faces, de sorte que la probabilité d'obtenir la face numérotée k est proportionnelle à k.
Soit X la var associée au lancer de ce dé.

1. Déterminer la loi de X et calculer son espérance.
2. On pose Y $= 1/$X. Déterminer la loi de Y ainsi que son espérance.

Exercice 20.
Donner la loi de X dans chacun des cas suivants.

1. On suppose que les probabilités de naissance d'une fille et d'un garçon sont identiques. On note X le nombre de filles dans une famille de 3 enfants.
2. Dans un champ, on trouve 15 lamas, 15 dromadaires et 15 chameaux. On sort un animal au hasard de ce champ. On note X le nombre de bosses de cet animal. Même question en ajoutant 15 moutons.
3. On range 20 cravates dans 3 tiroirs, au hasard. On note X le nombre de cravates dans le premier tiroir.
4. Un jeu de tarot (78 cartes) est mélangé et posé faces cachées. On retourne une par une les cartes jusqu'à trouver l'Excuse. On note X le nombre de cartes retournées au total.

Exercice 21.
On considère une variable aléatoire X dont la loi est donnée par $\mathrm{P(X{=}1)}=\frac{1}{5}$, $\mathrm{P(X{=}e)}=\frac{3}{5}$, $\mathrm{P(X{=}e^2)}=\frac{1}{5}$.

1. On pose $Z = \ln(X)$, calculer l'espérance de Z grâce au théorème de transfert.
2. Montrer que $\dfrac{1+3e+e^2}{5} \neq e$ et en déduire que $\mathrm{ln(E(X))} \neq \mathrm{E(ln(X))}$

Exercice 22.
On lance deux dés cubiques équilibrés, les faces étant marquées de 1 à 6.

1. On gagne 1 euro si la somme des points obtenus est supérieure strictement à 7 et on perd 1 euro sinon. Le jeu est-il équitable ?
2. On considère maintenant la règle suivante : on gagne 1 euro si les points obtenus sur les deux dés diffèrent de 1 ou 2 et on perd sinon. Le jeu est-il équitable ?

Exercice 23.
Un garagiste dispose de deux voitures de location. Chacune est utilisable en moyenne 4 jours sur 5.
Il loue les voitures avec une marge brute de 300 euros par jour et par voiture.
On considère X la var égale au nombre de clients se présentant chaque jour pour louer une voiture.
On suppose que $X(\Omega) = [\![0, 3]\!]$ avec :
$P(X = 0) = 0.1, \quad P(X = 1) = 0.3, \quad P(X = 2) = 0.4 \;\text{ et }\; P(X = 3) = 0.2$

1. On note Z le nombre de voitures disponibles par jour. Déterminer la loi de Z. On pourra considérer dans la suite que X et Z sont indépendantes.
2. Soit Y la var : '*nombre de clients satisfaits par jour*'. Déterminer la loi de Y.
3. Calculer la marge brute moyenne par jour.

Exercice 24.
Soit $\alpha > 0$ et X une var à valeurs dans $[\![1, 10]\!]$. On suppose que pour tout $k \in [\![1, 10]\!]$, $P(X = k) = \alpha k$.

1. Déterminer la valeur de α.
2. Calculer l'espérance et la variance de X.
3. Déterminer les lois et calculer les espérances de $Y = X + 1$, $Z = (X - 5)^2$ et $T = 2Z$.

Exercice 25.
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On lancer n fois une pièce dont la probabilité de tomber sur pile est $p \in]0, 1[$. On désigne par X la variable aléatoire égale au numéro du lancer au cours duquel apparaît "pile" pour la première fois ou égale à $n + 1$ si pile n'apparaît pas au cours des n lancers.

1. Déterminer la loi de X.
2. Montrer que $E(X) = \dfrac{1 - (1 - p)^{n+1}}{p}$.

Exercice 26.
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et X une var telle que $\forall k \in [\![1, 2n]\!]$, $P(X = k) = \alpha k$.

1. Déterminer α.
2. Calculer $P(X \in \mathcal{P})$ ou $\mathcal{P}$ désigne l'ensemble des entiers pairs de $[\![1, 2n]\!]$.

Exercice 27.
Une urne contient 5 boules blanches, 3 boules vertes et 7 boules rouges. On tire trois boules dans l'urne avec remise et on note X la variable égale au nombre de boules blanches tirées. Donner sans calcul la loi de X.

Exercice 28.
Parmi les situations suivantes qu'elles sont celles que l'on peut décrire par une variable aléatoire discrète de loi uniforme.

1. Le lancer d'un dé non truqué.
2. Le nombre de six obtenus en trois lancers successifs d'un dé.
3. Le jour (jour + mois) d'anniversaire de naissance d'une personne.
4. Le jour du mois où est née une personne.

Exercice 29.
Soit X une variable aléatoire suivante une loi $\mathcal{B}(0.4)$.
Calculer $P(X = 0)$ $P(X = 1)$ et $P(X > 1)$

Exercice 30.

Le comité des fêtes d'une école d'ingénieurs organise le Gala annuel de l'école. La soirée est prévue dans un château.

À l'arrivée, chacun des 2500 participants devra déposer ses affaires dans l'un des trois vestiaires, appelés $V1, V2$ et $V3$.

Chaque participant choisit son vestiaire de manière aléatoire, indépendamment du choix des autres participants.

On considère la variable aléatoire X, où X désigne le nombre de participants choisissant le vestiaire $V1$.

1. Quelles valeurs la variable aléatoire X peut-elle prendre ?
2. Déterminer la probabilité qu'aucun participant ne choisisse le vestiaire $V1$.
3. Déterminer la probabilité que tous les participants choisissent le vestiaire $V1$.
4. Déterminer la loi de la variable aléatoire X.

Exercice 31.
On tire une carte d'un jeu de 32 cartes. On note X la variable aléatoire indicatrice de l'événement "on tire un roi", Y la variable aléatoire indicatrice de l'événement "on tire une dame ", et Z la variable aléatoire indicatrice de l'événement "on tire un cœur".

1. Déterminer les lois conjointes et marginales des couples (X, Y) et (X, Z).
2. Ces variables sont-elles indépendantes ?

Exercice 32.
On jette n dés, et on note X et Y les nombres de 1 et de 6 obtenus respectivement.

1. Déterminer les lois suivies par X et Y, leurs espérances et leurs variances.
2. Déterminer, pour tout $j \in Y(\Omega)$, la loi de X sachant $Y = j$.
3. En déduire la loi conjointe du couple (X, Y). Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Déterminer la loi de $Z = X + Y$.

Exercice 33.

On donne dans le tableau suivant la loi d'une variable aléatoire X :

k	-2	-1	0	1	2	3
$\mathbb{P}(X = k)$	$2a$	a	a	$3a$	a	$2a$

1. Justifier que $a = \frac{1}{10}$. Calculer $\mathbb{P}(X \leqslant 0)$ et $\mathbb{P}(\|X\| \leqslant 1)$.
2. Calculer l'espérance et la variance de X. Soit $Y = X + 1$. Exprimer $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{V}(Y)$.
3. Déterminer la loi de la variable $Z = |X - 1|$.
4. Soit T une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{3}$ telle que X et T soient indépendantes.

   Déterminer la loi conjointe du couple (T, X) et calculer $\mathbb{E}(TX)$.

Exercice 34.
Une usine A et une usine B fabriquent des pièces de moteur. En moyenne 5% des pièces fabriquées dans l'usine A et 10% des pièces fabriquées par dans l'usine B sont défectueuses. Pour un contrôle, on prélève aléatoirement 100 pièces de A et 400 pièces de B, et on considère X et Y les variables aléatoires donnant le nombre de pièces prélevées défectueuses respectivement de A et de B.

1. Déterminer les lois de X et Y.
2. Soit $Z = X + Y$. Déterminer l'espérance et la variance de Z.
3. À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, déterminer c tel que le risque que le nombre de pièces défectueuses prélevées soit supérieur à c est inférieur à 5%.

Exercice 35.
On donne dans le tableau suivant la loi d'une variable aléatoire X :

k	-2	-1	0	1	2	3
$P(X = k)$	$2a$	a	a	$3a$	a	$2a$

1. Justifier que $a = \frac{1}{10}$.
2. Calculer $P(X \leqslant 0)$ et $P(|X| \leqslant 1)$.
3. Calculer l'espérance et la variance de X.
4. Soit $Y = X + 1$. Exprimer $E(Y)$ et $V(Y)$.
5. Déterminer la loi de la variable $Z = |X - 1|$.
6. Soit T une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{3}$ telle que X et T soient indépendantes.

   Déterminer la loi conjointe du couple (T, X) et calculer $E(TX)$.

5 Une fois qu'on est à l'aise

Exercice 36.
Une urne contient b billes blanches et n billes noires. On tire toute les billes les unes après les autres sans remise.

1. On note X la var représentant le rang d'apparition de la première bille noire. Calculer la loi de X
2. On note Y la var représentant le rang d'apparition de la deuxième bille noire. Calculer la loi de Y

Exercice 37.
Soit $n \geqslant 2$. Une urne contient des boules numérotées de 1 à n. On tire toutes les boules une à une et sans remise. Soit X la variable aléatoire égale au numéro du premier tirage au cours duquel le numéro tiré est strictement supérieur à un numéro tiré précédemment, ou égale à n si aucun des tirages ne vérifie cela. Préciser l'ensemble des valeurs de X, déterminer $P(X > k)$ et en déduire la loi de X.

Exercice 38.
Dans une urne contenant n boules blanches et n boules rouges, on prélève successivement et sans remise les boules. On note X le nombre de tirages juste nécessaire à l'obtention de toutes les boules rouges (c'est-à-dire le rang de la dernière boule rouge tirée).

1. Déterminer la loi de X (on précisera l'univers utilisé).
2. (a) Lemme: $p \leqslant m$, en écrivant $\binom{k}{p} = \binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1}$, démontrer la formule dite "de Pascal généralisée" : $\displaystyle\sum_{k=p}^{m} \binom{k}{p} = \binom{m+1}{p+1}$.
   (b) Que vaut $\displaystyle\sum_{k=p}^{m} \binom{k}{k-p}$?
   (c) Calculer $E(X)$.
3. Calculer $V(X)$.

Exercice 39.

Soit $n \geqslant 1$. Au départ d'une course de chevaux, n jockeys se présentent avec des dossards numérotés de 1 à n. Les chevaux se répartissent au hasard dans les emplacements de la grille de départ, numérotés de 1 à n.

On définit pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, la variable aléatoire X_k égale à 1 si le cheval numéro k est dans l'emplacement numéro k, et 0 sinon ; et S la variable aléatoire égale au nombre de chevaux placés dans l'emplacement correspondant à leur numéro de dossard.

1. Déterminer, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, la loi de X_k, son espérance et sa variance.
2. Calculer, pour tout $(k, l) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $k \neq l$, $E(X_k X_l)$.
3. X_k et X_l sont-elles indépendantes pour $k \neq l$?
4. En admettant que $V(S) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} V(X_k) + 2 \sum_{1 \leqslant k < l \leqslant n} E(X_k X_l) - E(X_k)E(X_l)$, calculer $E(S)$ et $V(S)$.

Exercice 40.
Soit X une variable aléatoire de moyenne μ et de variance σ^2. En introduisant la variable aléatoire $Y = (\alpha(X - \mu) + \sigma)^2$, montrer que pour tout $\alpha > 0$,

$$\mathbb{P}(X \geqslant \mu + \alpha\sigma) \leqslant \frac{1}{1 + \alpha^2}.$$

6 Problèmes

Exercice 41.
Soit N un entier supérieur ou égal à 3. Une urne contient N boules numérotées de 1 à N.

1. On tire deux boules successivement avec remise. On note X la v.a.d. égale au plus grand numéro obtenu et Y la v.a.d. égale au plus petit numéro obtenu.
   (a) Préciser l'univers Ω , $X(\Omega)$. Déterminer la loi de X.
   (b) calculer $E(X)$.
   (c) Mêmes questions pour Y.
2. On tire de l'urne initiale deux boules simultanément. Reprendre les trois questions précédentes.
3. On tire de l'urne initiale une poignée de m boules, m étant un entier non nul et inférieur ou égal à N. Pour tout entier $k \in [\![1, N]\!]$, on note X_k la v.a.d. qui prend la valeur k si la boule numéro k est dans la poignée et qui prend la valeur 0 sinon.
   (a) Déterminer la loi de chacune des variables aléatoires X_k et leurs espérances.
   (b) Soit S la variable aléatoire égale à la somme des numéros de la poignée tirée. Déterminer l'espérance de S

Exercice 42.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On effectue n lancers indépendants d'une pièce donnant pile avec la probabilité $p \in]0; 1[$ et face avec la probabilité $q = 1 - p$. On s'intéresse aux

successions de lancers amenant un même côté. Pour décrire la succession de n lancers, on introduit la notion de séries de lancers amenant un même côté et on parle de longueur d'une série. Ainsi :

- la première série est de longueur $m \in [\![1, n-1]\!]$ si les m premiers lancers ont amené le même côté de la pièce et le $(m+1)$-ième l'autre côté ;
- elle est de longueur n si les n lancers ont amené le même côté de la pièce.

Si la longueur de la première série est égale à $m < n$:

- la deuxième série commence au $(m+1)$-ième lancer et se termine au lancer précédant un changement de côté s'il y a au moins un deuxième changement de côté au cours des n lancers ;
- sinon on dit qu'elle est de longueur $n-m$.

On peut définir de même les séries suivantes. Ω_n désigne l'ensemble des successions de pile ou face au bout de n lancers.

Pour $i \in \mathbb{N}^*$, on note P_i l'événement "le i-ième lancer amène pile ", F_i l'événement contraire.

1. Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On note L_1 la variable aléatoire égale à la longueur de la première série.
   (a) Déterminer $L_1(\Omega_n)$.
   (b) On suppose que $m < n$. Exprimer l'événement $(L_1 = m)$ à l'aide des événements P_i et F_i pour $i \in [\![1, m+1]\!]$. En déduire $P(L_1 = m)$.
   (c) On suppose maintenant que $m = n$. Exprimer l'événement $(L_1 = n)$ à l'aide des événements P_i et F_i pour $i \in [\![1, n]\!]$. En déduire $P(L_1 = n)$.
   (d) Vérifier : $\displaystyle\sum_{m=1}^{n} P(L_1 = m) = 1$.
2. On note L_2 la longueur de la deuxième série, s'il y en a une, et on pose $L_2 = 0$ s'il n'y a pas de deuxième série.
   (a) Déterminer $L_2(\Omega_n)$.
   (b) On suppose que $m + k < n$. Exprimer l'événement $(L_1 = m) \cap (L_2 = k)$ à l'aide des événements P_i et F_i pour i entier naturel variant entre 1 et $m+k+1$. En déduire la probabilité de l'événement $(L_1 = m) \cap (L_2 = k)$.
   (c) On suppose que $m + k = n$. Exprimer l'événement $(L_1 = m) \cap (L_2 = k)$ à l'aide des événements P_i et F_i pour i entier naturel variant entre 1 et n. En déduire la probabilité de l'événement $(L_1 = m) \cap (L_2 = k)$.

Exercice 43.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $N \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

Un joueur lance successivement et de façon indépendante n boules au hasard dans N cases numérotées de 1 à N.

Chaque boule a la probabilité $\frac{1}{N}$ de tomber dans chacune des N cases.

On cherche à étudier la variable aléatoire T_n égale au nombre de cases non vides après n lancers.

2. Déterminer en fonction de n et de N les valeurs que peut prendre T_n.
3. Donner les lois de T_1 et de T_2.

Pour la suite, on prendra $n \geqslant 2$.

4. Déterminer les probabilités $P(T_n = 1)$ et $P(T_n = 2)$.
5. Calculer $P(T_n = n)$.
   On pourra distinguer les cas $n \leqslant N$ et $n > N$.
6. Prouver que, pour tout k appartenant à $[\![1, n]\!]$ on a :
$$P(T_{n+1} = k) = \frac{k}{N} P(T_n = k) + \frac{N-k+1}{N} P(T_n = k-1).$$
7. On considère dans cette question la fonction :
$$G_n(x) = \sum_{k=1}^{n} P(T_n = k)\, x^k.$$
   (a) Soit $x \in \mathbb{R}$, montrer que :
$$G_{n+1}(x) = \frac{1}{N}\left(x - x^2\right) G_n'(x) + x\, G_n(x).$$
   (b) En dérivant l'expression précédente, démontrer que :
$$\mathbb{E}(T_{n+1}) = \left(1 - \tfrac{1}{N}\right) \mathbb{E}(T_n) + 1.$$
   (c) En déduire la valeur de $\mathbb{E}(T_n)$ et déterminer sa limite quand n tend vers $+\infty$.
   (d) Retrouver le résultat directement avec les variables aléatoires $X_i = 1$ si la $i$ème case est pleine, 0 sinon.