Correction du TD n 23

Correction 1 1. symétrique, bilinéaire, positive et définie en se souvenant que $P^{(k)}(0) = k!a_k$.

2. Symétrique, bilinéaire, positive. Si $< f, f >= 0$ alors la fonction positive $t \mapsto (1-t^2)f^2(t)$ est nulle sur $[0,1]$ donc $f(t) = 0$ pour tout $t \in [0,1[$ et, par continuité de f, f est nulle sur $[0,1]$.

3. Si $< f, f >= 0$, $f'^2(t) = 0$ pour tout $t \in [0,1]$ donc f est constante sur $[0,1]$ et comme $f(0) = 0$, on a f nulle

Correction 2 C'est une forme symétrique, linéaire par rapport à la première variable (par linéarité du produit matriciel et de la trace) donc bilinéaire. Soit $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, on note $B = A^\top A = (b_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Alors par le formule du produit matriciel, on a

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}a_{kj},$$

donc $\mathrm{Tr}(A^\top A) = \sum_{1\leqslant i,k\leqslant} a_{ki}^2$. On a donc bien $(A, A) \geqslant 0$ et si $(A, A) = 0$, alors A est la matrice nulle donc c'est bien un produit scalaire.

Correction 3 On trouve

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(X^2 - 1), \frac{1}{\sqrt{38}}(X^2 + 6X + 1), \frac{1}{\sqrt{19}}(3X^2 - X + 3)\right)$$

Correction 4 1. Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une bon, alors $< f(e_i), f(e_j) >= \delta_{i,j}$ donc $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une famille orthonormale et comme de cardinal n, c'est une bon de E.

2. Soit $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, alors $f(x) = \sum_{j=1}^{n} < f(x), f(e_j) > f(e_j)$ car c'est une bon et par linéarité,

$$< f(x), f(e_j) >=< \sum x_i e_i, e_j >= x_j,$$

donc $f(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j f(e_j)$ et f est linéaire.

Correction 5 On a $||e_i|| = 1$ pour tout i et

$$||e_i||^2 = \sum_{j=1}^{n} < e_i, e_j >^2,$$

donc

$$\sum_{i\neq j} < e_i, e_j >^2 = 0,$$

puis $< e_i, e_j >= 0$ pour $i \neq j$. La famille est donc orthonormale. Montrons que c'est une base de E.

Pour cela, on va montrer que pour tout $x \in E$, on a $x = \sum_{i=1}^{n} < x, e_i > e_i$. Soit donc $x \in E$, on pose $y = x - \sum_{i=1}^{n} < x, e_i > e_i$ On a $< y, e_j >= 0$ pour tout j donc $||y||^2 = 0$ et $y = 0$. On a montré que la famille était génératrice de E et libre car orthonormale donc c'est une base de E.

Correction 6 On applique Cauchy-Schwarz à f et f' avec le produit scalaire $(f, g) = \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$.

Correction 7 Cauchy-Schwarz appliqué à $(\sqrt{2}x, y, \sqrt{5}z)$ et $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

Correction 8 On applique Cauchy-Schwarz à $t \mapsto t^n\sqrt{f}$ et $t \mapsto t^m\sqrt{f}$ avec le produit scalaire $< f, g >= \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$.

Correction 9 On applique Cauchy-Schwarz à I_n et A.

Correction 10 On remarque que $G = (\mathrm{Vect}((1, 2, -1, 1)))^\perp$ donc $G^\perp = \mathrm{Vect}((1, 2, -1, 1))$.

Correction 11 On note $S_n(\mathbb{R})$, $A_n(\mathbb{R})$ et $D_n(\mathbb{R})$ respectivement l'ensemble des matrices symétriques, antisymétriques et diagonales.

On peut remarquer que la base (E_{ij}) de $M_n(\mathbb{R})$ est une BON pour ce produit scalaire. Une base de l'ensemble des matrices diagonales est $(E_{ii}, i \in [\![1, n]\!])$, une base des matrices symétriques est $(E_{ii}, i \in [\![1, n]\!]) \cup (E_{ij} + E_{ji}, i < j)$.

L'orthogonal des matrices diagonales est l'ensemble des matrices de diagonale nulle. En effet, si $M \in D_n(\mathbb{R})^\perp$, alors pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $< M, E_{ii} >= 0$, soit $m_{ii} = 0$ (puisque $M = \sum_{i,j} m_{ij}E_{ij}$ et $(E_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ BON pour ce produit scalaire.)

L'orthogonal des matrices symétriques est l'ensemble des matrices antisymétriques. En effet, les matrices antisymétriques, c'est-à-dire les matrices vérifiant $M^\top = -M$ admettent pour base $(E_{ij} - E_{ij})_{i<j}$. Si $i<j$ et $k<l$, on a

$$< E_{ij} + E_{ji}, E_{kl} - E_{kl} >= \begin{cases} 0 & \text{si } (i,j) \neq (k,l) \\ ||E_{ij}||^2 - ||E_{ji}||^2 = 0 & \text{si } (i,j) = (k,l) \end{cases}$$

Remarque: On ne peut pas avoir $(i,j) = (l,k)$ car $i<j$ et $k<l$.

Par ailleurs, on a

$$< E_{ii}, E_{kl} - E_{lk} >= 0,$$

puisque la base (E_{ij}) est orthonormée. On a donc bien que pour tout $k<l$, $E_{kl} - E_{lk} \in S_n(\mathbb{R})^\perp$ d'où $A_n(\mathbb{R}) \subset S_n(\mathbb{R})$. Par égalité des dimensions, on a montré que l'orthogonal des matrices symétriques est l'ensemble des matrices antisymétriques.

Correction 12 Soit $f \in H^\perp$ alors $h : t \mapsto tf(t)$ est un élément de H donc $< h, f >= \int_0^1 tf^(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Par stricte positivité de l'intégrale, comme $t \mapsto tf^2(t)$ est positive et continue, on a $tf^2(t) = 0$ pour tout $t \in [0,1]$ donc $f(t) = 0$ pour tout $t \in]0,1]$ puis $f \equiv 0$ par continuité. Ainsi, on a montré $H^\perp \subset \{0\}$. Comme $H^\perp$ est un ssev de E, on a donc $H^\perp = \{0\}$.

Correction 13

Correction 14

1. On a $\dim(F) = 2$.
2. On remarque que $F = \mathrm{Vect}(u,v)^\perp$ avec $u = (1,1,1,1)$ et $v = (1,2,3,4)$ donc $F^\perp = \mathrm{vect}(u,v)$. Comme u et v sont non colinéaires, ils forment une base de $F^\perp$.
3. On cherche une base orthogonale de $F^\perp$. On orthogonalise (u,v) (attention, il faut appliquer la formule avec $\frac{1}{2}(1,1,1,1)$, on trouve le vecteur $\frac{1}{2}(-3,-1,1,3)$ donc $((1,1,1,1),(3,1,-1,-3)) = (u,w)$ est une base orthogonale de $F^\perp$. On a donc

$$q(x) = \frac{\langle u, x\rangle}{||u||^2}u + \frac{\langle x, w\rangle}{||w||^2}w,$$

où q désigne la projection ortho sur $F^\perp$. On a donc

$$d(x,F) = ||q(x)|| = \left|\left|\frac{1}{5}(4,3,2,1)\right|\right| = \sqrt{\frac{6}{5}}.$$

Correction 15

1. On remarque que $F = \mathrm{vect}(u,v)^\perp$ avec $u = (1,-1,1)$ et $v = (1,1,2)$. On a donc $F^\perp = \mathrm{vect}(u,v)$
2. On a F de dimension 1, $F = \mathrm{vect}(w)$ avec $w = (3,1,-2)$. On a donc

$$p(x) = \frac{\langle x, w\rangle}{||w||^2}$$

et

$$s(x) = 2p(x) - x = \frac{\langle x, w\rangle}{7}w - x.$$

On en déduit que

$$Mat_B(s) = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 3 & -6 \\ 3 & -6 & -2 \\ -6 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Correction 16

1. forme, symétrique, linéaire par rapport à la première coordonnée donc bilinéaire, positive. On suppose $\langle P, P\rangle = 0$ alors $P(a_k) = 0$ pour tout $k \in [\![0,n]\!]$ donc P admet $n+1$ racines distinctes. Or $P \in \mathbb{R}_n[X]$ donc $P = 0$.
2. (a) On a $P_j(a_k) = \delta_{jk}$

   (b) On a $\langle P_j, P_i\rangle = \sum_{k=0}^n \delta_{jk}\delta_{ik} = \delta_{ij}$ donc la famille est orthonormale.
3. On remarque que

$$H = \left\{P \in E, \sum_{k=0}^n P(a_k)\right\} = \mathrm{vect}(1)^\perp = \mathbb{R}^\perp,$$

si on note $A = 1$. On en déduit que

$$d(Q,H) = \frac{|\langle A, Q\rangle|}{||A||} = \frac{\left|\sum_{k=0}^n Q(a_k)\right|}{\sqrt{n+1}}.$$

Correction 17

1. On raisonne par équivalence. Soit $M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$. On a

$$M \in F^\perp \Leftrightarrow \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, M \right\rangle = 0 \text{ et } \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, M \right\rangle = 0$$

donc

$$M \in F^\perp \Leftrightarrow m_{11} = m_{22} \text{ et } m_{12} = -m_{21} \Leftrightarrow M \in \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

2. On utilise l'expression de la projection orthogonale. On trouve que la projection de B sur F vaut $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Correction 18 On raisonne par équivalence en remplaçant $||x+y||^2$ par $2\,||x||^2 + 2\,||y||^2 - ||x-y||^2$ (identité du parallélogramme). On arrive à

$$||x-y||^2 + 2\,||x||^2\,||y||^2 \geqslant 0,$$

ce qui est vrai donc l'inégalité donnée l'est aussi.

Correction 19 On trouve $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1), \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)\right)$

Correction 20 Cauchy-Schwarz appliqué à (x,y,z) et $(1,2,3)$.

Correction 21 On note $(e_1,\dots,e_n,e_{n+1})$ la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$ et on suppose que $\mathbb{R}^{n+1}$ est muni de son produit scalaire canonique. On pose $x = \sum_{i=0}^{n} \sqrt{\binom{n}{i}} e_i = \left(\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n}\right)$ et $y=(1,\dots,1)$. Alors $< x, y >= \sum_{i=0}^{n} \sqrt{\binom{n}{i}}$, $||x|| = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$ et $||y|| = n+1$. En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz x et y, on a l'inégalité souhaitée.

Correction 22

1. C'est le noyau de la forme linéaire trace donc un ssev et, par le thm du rang, sa dimension est n^2-1.

   On peut aussi dire qu'un élément de F vérifie $m_{nn} = -\sum_{i=1}^{n} m_{ii}$ donc il est engendré par $(E_{ij}, i \neq j) \cup (E_{ii} - E_{nn}, i \in [\![1, n-1]\!]$. C'est assez rapide de montrer que cette famille est libre et elle est de cardinal n^2-1.

2. On sait que $\dim(F^\perp) = n^2 - \dim(F) = 1$, il suffit donc de donner un élément non nul de $F^\perp$. On remarque que $I_n \in F^\perp$ car pour tout $M \in F$, $< I_n, M >= \mathrm{Tr} {I_n}^\top M = \mathrm{Tr} I_n M = \mathrm{Tr}(M) = 0$, donc $F^\perp = \mathrm{Vect}(I_n)$.

Correction 23 Soit $x \in E$, alors $\langle x, 0_E \rangle = 0$ donc $x \in \{0_E\}^\perp$. On en déduit que $E \subset \{0_E\}^\perp \subset E$ donc $E = \{0_E\}^\perp$.

Soit maintenant $x \in E^\perp$ alors $\langle x, x \rangle = 0$ donc $x = 0_E$. On a donc $E^\perp \subset \{0_E\}$ donc $E^\perp = \{0_E\}$ car $E^\perp$ est un ssev.

Correction 24 On a $F = \mathrm{vect}(u)^\perp$ avec $u = (1,-1,1,-1)$ donc $F^\perp = \mathrm{vect}(u)$. Pour tout x de E, on a $p(x) = x - q(x) = x - \frac{\langle x, u \rangle}{||u||^2} u$ avec $||u||^2 = 4$. On a donc

$$Mat_B(p) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Correction 25 On a $F = \mathrm{vect}(u,v)^\perp$ avec $u = (1,2,-1)$ et $v = (2,-1,0)$ donc $\dim(F) = 1$. On trouve $F = \mathrm{vect}(w)$ avec $w = (1,2,5)$. Pour tout x de E on a $s(x) = 2p(x) - x = \frac{1}{15}\langle x, w, w \rangle - x$ donc

$$Mat_B(s) = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} -14 & 2 & 5 \\ 2 & -11 & 10 \\ 5 & 10 & 10 \end{pmatrix}$$

Correction 26

1. Le supplémentaire orthogonal est l'ensemble des matrices antisymétriques c'est-à-dire les matrices vérifiant $M^\top = -M$ ou encore $m_{ij} = -m_{ji}$.

2. On peut remarquer qu'un BON de $S_3(\mathbb{R})^\perp$ est $(E_{12} - E_{21}, E_{13} - E_{31}, E_{2,3} - E_{32})$(on l'a vu ex18). On applique alors la formule du projeté orthogonal sur $S_3(\mathbb{R})^\perp$. On a $M(E_{31} - E13) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ donc

   $$-1 = \mathrm{Tr}\left(M(^\top E_{13} - E_{31})\right) = \mathrm{Tr}\left((^\top E_{13} - E_{31})M\right) = \langle E_{13} - E_{31} \rangle.$$

   De même,

   $$M(E_{21} - E_{12}) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

   donc $\langle E_{12} - E_{21}, M \rangle = -2$.

   Enfin,

   $$M(E_{32} - E_{23}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

   donc $\langle E_{23} - E_{32}, M \rangle = -2$.

   On en déduit, on notant p la projection orthogonale sur $S_3(\mathbb{R})^\perp$, que

   $$p(M) = -(E_{13} - E_{31}) - 2(E_{12} - E_{21}) - 2(E_{23} - E_{32}) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

   On a ensuite $||p(M)|| = \sqrt{18}$ car $||A||^2 = \sum_{ij} a_{ij}^2$ (cf cours lorsque l'on a montré que l'on définissait bien un produit scalaire.

Correction 27 On voit que φ est symétrique et bilinéaire. On suppose φ définie positive. On sait, par cauchy-Schwarz que $\forall x \in E, ||x||^2 \geqslant < x, a >^2$ car $||a||^2 = 1$.

On en déduit que $\varphi(x,x) = ||x||^2 + k < x, a >^2 \leqslant (k+1)\,||x||^2$ donc il faut que $k+1 \geqslant 0$. Si $k = -1$, on a $\varphi(a,a) = 0$ et φ ne sera pas définie. Il faut donc $k > -1$.

Réciproquement, supposons que $k > -1$. On a $\varphi(x,x) \geqslant (k+1) < x,a >^2 \geqslant 0$ et si $\varphi(x,x) = 0$ alors d'après l'inégalité

$$\varphi(x,x) \geqslant (k+1) < x,a >^2,$$

on a $< x,a >= 0$ donc $\varphi(x,x) = ||x||^2$ d'où $x = 0_E$ et φ est bien un produit scalaire.

Correction 28 1. Soit $x \in \text{Vect}\,(e_1,\dots,e_n)^\perp$. Alors $||x||^2 = 0$ car $< x, e_i >= 0$ pour tout i, on a donc $x = 0_E$. Ainsi, on a $\text{Vect}\,(e_1,\dots,e_n)^\perp = \{0_E\}$ donc $\text{Vect}(e_1,\dots,e_n) = E$ (car E euclidien) et la famille est bien génératrice de E.

2. On a $||e_j||^2 = 1 = 1 + \sum\limits_{i\neq j} < e_j, e_i >^2$ donc $< e_i, e_j >= 0$ pour $i \neq j$. On en déduit que la famille est orthonormale donc libre et avec la question 1, c'est une bon de E.

Correction 29 1. Soit $x \in G^\perp$, montrons que $x \in F^\perp$. Soit donc $y \in F$, montrons que $< x,y >= 0$. On a $y \in F$ et $F \subset G$ donc $y \in G$. Comme $x \in G^\perp$, on a $< x,y >= 0$. On a donc bien $x \in F^\perp$ d'où l'inclusion.

2. On le montre par double inclusion. Soit $x \in F^\perp \cap G^\perp$, montrons que l'on a $x \in (F+G)^\perp$. On se donne donc $a + b \in F + G$, on a

$$< x, a+b >=< x,a > + < x,b > .$$

Or $< x,a >= 0$ puisque $x \in F^\perp$ et $a \in F$. De même, $< x,b >= 0$, on a donc $< x,a+b >= 0$ donc $x \in (F+G)^\perp$ et on a montré l'inclusion $F^\perp \cap G^\perp \subset (F+G)^\perp$.

Par ailleurs, on a $F \subset (F+G)$ donc d'après la question précédente, $(F+G)^\perp \subset F^\perp$. De même, $G \subset (F+G)$ donc $(F+G)^\perp \subset G^\perp$. On en déduit que $(F+G)^\perp \subset F^\perp \cap G^\perp$.

On a montré l'égalité par double inclusion.

3. Soit $(a,b) \in F^\perp \cap G^\perp$, montrons que $a+b \in (F\cap G)^\perp$. Soit donc $x \in F \cap G$, alors $< x,a+b >=< x,a > + < x,b >$. Or $< x,a >= 0$ puisque $a \in F^\perp$ et $x \in F$. De même, $< x,b >= 0$ donc $a+b \in (F\cap G)\perp$ et on a montré l'inclusion $F^\perp + G^\perp \subset (F\cap G)^\perp$.

On peut aussi le montrer en raisonnant avec les ensembles: On a $F \cap G \subset F$ donc $F^\perp \subset (F\cap G)^\perp$. De même, $G^\perp \subset (F\cap G)^\perp$. Comme $(F\cap G)^\perp$ est un ssev, on a donc $F^\perp + G^\perp \subset (F\cap G)^\perp$.

4. On l'a vu en cours ! On a $F \subset (F^\perp)^\perp \subset F$ car si $x \in F$, alors $< x,y >= 0$ pour tout $y \in F^\perp$ donc $x \in (F^\perp)^\perp$. On conclut avec l'égalité des dimensions car $F \oplus F^\perp = E = F^\perp \oplus (F^\perp)^\perp$.

5. On applique la question 2 à $F^\perp$ et $G^\perp$, on obtient :

$$(F^\perp + G^\perp)^\perp = (F^\perp)^\perp \cap (G^\perp)^\perp$$

donc $(F^\perp + G^\perp)^\perp = F \cap G$. On en déduit que $(F\cap G) \perp= \left((F^\perp + G^\perp)^\perp\right)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

Correction 30 1. Si $< u_i, u_j >= 1$ pour tout i,j, alors pour i,j quelconque, $||u_i - u_j||^2 = 1 - 2 + 1 = 0$ donc $u_i = u_j$ ce qui est absurde. donc $a \neq 1$.

2. On a $||v||^2 = \sum\limits_{i,j} < u_i, u_j >= \sum\limits_{i\neq j} a + n$ on a donc $(n^2 - n)a + n \geqslant 0$ donc $a \geqslant -\dfrac{n}{n^2-n}$ d'où le résultat.

3. Pour tout $i,k \in [\![2,n]\!]$ on a

$$< u_i - u_1, u_k >=< u_i, u_k > - < u_1, u_k >= \begin{cases} 0 & \text{si } k = i \\ 1-a & \text{sinon} \end{cases}$$

On suppose qu'il existe des réels λ_i non tous nuls tels que $\sum \lambda_i(u_i - u_1) = 0_E$, alors pour tout $k \in [\![2,n]\!]$, $\sum \lambda_i < u_i - u_1, u_k >= 0$ donc $\lambda_k(1-a) = 0$ d'où $\lambda_k = 0$ pour tout k donc la famille est libre. On en déduit que $N \geqslant n-1$.

4. On suppose $(u_1,\dots,u_n)$ liée alors il existe des réels λ_i tels que $\sum \lambda_i u_i = 0_E$. On a donc, pour tout k, $< \sum \lambda_i u_i, u_k >= 0 = \sum\limits_{i\neq k} \lambda_i a + \lambda_k$ ou encore

$$\sum_i \lambda_i a + (1-a)\lambda_k = 0.$$

On somme pour k variant de 1 à n :

$$na \sum_i \lambda_i + (1-a)\sum_k \lambda_k = 0$$

donc $\sum_i \lambda_i(na+1-a) = 0$. Montrons que $\sum_i \lambda_i \neq 0$. On suppose, par l'absurde que $\sum_i \lambda_i = 0$, alors $-\lambda_1 = \sum\limits_{i\geqslant 2} \lambda_i$ donc

$$0 = \lambda_1 u_1 + \sum_{i\geqslant 2} \lambda_i u_i = \sum_{i\geqslant 2} \lambda_i(u_i - u_1)$$

Or $(u_2 - u_1, \dots, u_n - u_1)$ est libre donc $\forall k \geqslant 2$, $\lambda_i = 0$ puis $\lambda_1 = 0$. On obtient une contradiction, on a donc $\sum_i \lambda_i \neq 0$ d'où $na + (1-a) = 0$ d'où $a = -\dfrac{1}{n-1}$.