Lycée du Parc 842.

Fonctions de deux variables

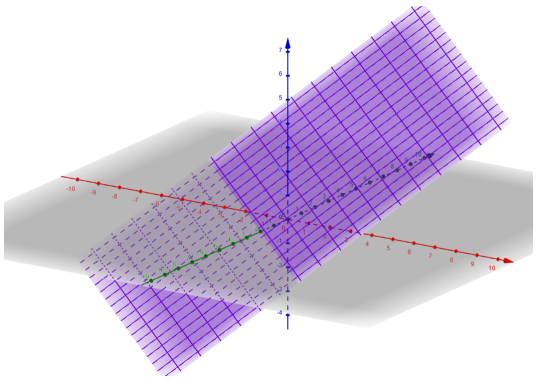
Dans ce chapitre, nous nous intéresserons exclusivement aux fonctions de deux variables. En effet, la différence essentielle est celle entre les fonctions d'une variable réelle et les fonctions de plusieurs variables réelles ; le fait que les variables soient au nombre de 2, 3 ou n ne changeant que les notations en les compliquant. Tout ce qui sera énoncé s'appliquera donc aussi bien aux fonctions de 3, voire n variables réelles.

Définition 1. Soit A une partie de $\mathbb{R}^2$ et $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables, on appelle graphe de f, noté Γ_f, l'ensemble de $\mathbb{R}^3$:

$$\Gamma_f = \{(x, y, f(x, y)), (x, y) \in A\}$$

Remarque. *C'est l'analogue du graphe (dans $\mathbb{R}^2$) d'une fonction d'une variable h:* $\{(x, h(x)), x \in D_h\} \subset \mathbb{R}^2$.

1. On considère la fonction $f : (x, y) \mapsto x + y + 1$. Γ_f est le plan d'équation $z = x + y + 1$.

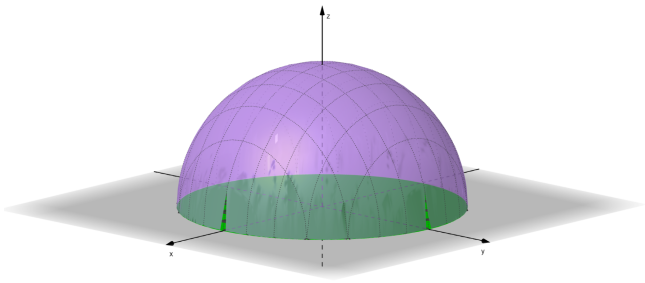


2. On considère la fonction $f : (x, y) \mapsto \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.
   f est définie sur le disque de centre $(0, 0)$ et de rayon 1 (en vert sur le dessin).

   Soit $z \in \mathbb{R}$:

   $$z = f(x, y) \iff \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ z \geqslant 0 \end{cases}$$

   Γ_f est la demi-sphère de centre $(0, 0, 0)$, de rayon 1 avec $z \geqslant 0$.



1 Rudiments de topologie de $\mathbb{R}^2$

L'espace $\mathbb{R}^2$ est muni de son produit scalaire canonique : pour tout vecteur $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$, la norme de h est $||h|| = \sqrt{h_1^2 + h_2^2}$.
si $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$ sont deux points de $\mathbb{R}^2$, $||x - y|| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$

1.1 Ouverts, fermés

Définition 2. Soit a un point de $\mathbb{R}^2$, r un réel strictement positif. La boule ouverte (resp. boule fermée) de centre a et de rayon r est l'ensemble

$$B(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^2 | \, ||a-x|| < r\}$$

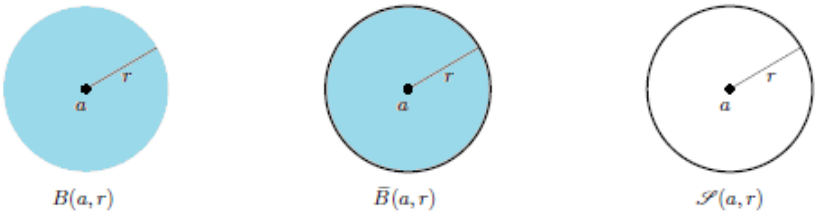
resp.

$$\overline{B}(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^2 | \, ||a-x|| \leqslant r\}.$$

La sphère de centre a et de rayon r est l'ensemble

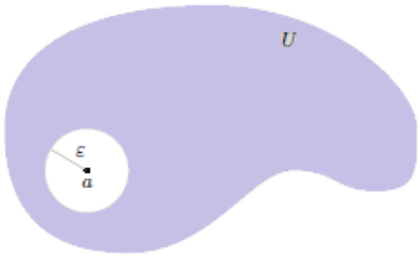
$$\mathcal{S}(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^2 | \, ||a-x|| = r\}.$$

Remarque. *On a* $\overline{B}(a,r) = S(a,r) \cup B(a,r)$



$B(a,r)$ $\quad \overline{B}(a,r)$ $\quad \mathcal{S}(a,r)$

Définition 3. Soit U une partie non vide de $\mathbb{R}^2$. On dit que U est ouvert si pour tout $a \in U$, il existe un réel $\epsilon > 0$ tel que la boule ouverte $B(a,\epsilon)$ soit incluse dans U. On convient que l'ensemble vide est ouvert.



Exemples 1.

1. *Soit* $U_1 = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x1 > 0\}$, *alors* U_1 *est un ouvert.*
2. *Soit* $U_2 = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_1 \geqslant 0\}$ *alors* U_2 *n'est pas un ouvert.*
3. *Une boule ouverte* $B(a,r)$ *est ouverte.*
4. *Une boule fermée* $\overline{B}(a,r)$ *n'est pas ouverte.*

Définition 4. Une partie $A \subset \mathbb{R}^2$ est dite fermée si son complémentaire $U = \mathbb{R}^2 \setminus A$ est ouvert.

Exemples 2.

1. *l'ensemble vide est fermé*
2. *la partie* $U_2 = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_1 \geqslant 0$ *est fermée*
3. *les boules fermées sont des fermés.*

⚠ Dire que les fermés sont les complémentaires des ouverts ne signifie en aucun cas qu'une partie est soit ouverte, soit fermée.

De même que dans $\mathbb{R}$ pour les intervalles, une partie de $\mathbb{R}^2$ n'est en général ni ouverte ni fermée. Par ailleurs, deux parties sont à la fois ouvertes et fermées (et ce sont les seules mais nous ne le démontrerons pas) : l'ensemble vide et son complémentaire $\mathbb{R}^2$.

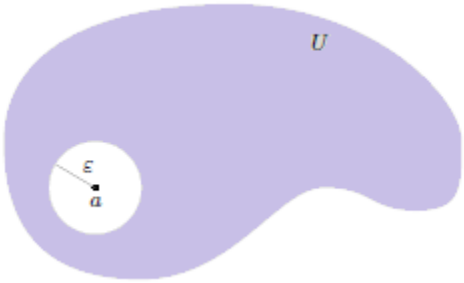
Définition 5. Une partie A de $\mathbb{R}^2$ est dite bornée s'il existe un réel positif R tel que $A \subset B(O, R)$.

Exemples 3.
1. *Les boules ouvertes et fermées sont bornées ;*
2. *les parties U_1 et U_2 des exemples précédents ne le sont pas.*

Définition 6. Soit A une partie de $\mathbb{R}^2$ et x un point de $\mathbb{R}^2$. On dit que x est adhérent à A si toute boule ouverte de centre x rencontre A, c'est-à-dire

$$\forall r > 0, B(x, r) \cap A \neq \emptyset.$$

Notations: l'ensemble des points adhérents à A est noté $\overline{A}$: c'est l'adhérence de A.



Proposition 1.

- Pour toute partie A de $\mathbb{R}^2$, $\overline{A}$ est la plus petite partie fermée, qui contient A.
- On a l'égalité $A = \overline{A}$ si, et seulement si, A est fermé.

Autrement dit : les points de l'adhérence $\overline{A}$ de A sont les points qui, s'ils n'appartiennent pas nécessairement à A, en sont aussi proches que possible (à distance nulle). c'est en ces points que l'on pourra parler de limite (éventuelle) d'une fonction définie sur la partie A.

1.2 Suites à valeurs dans $\mathbb{R}^2$

Définition 7. Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ et $a = (a_1, a_2)$ un point de $\mathbb{R}^2$. On dit que la suite u tend vers a en $+\infty$, on note $u_n \to a$ si, la suite numérique $(||u_n - a||)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.
En langage formalisé :

$$u_n \to a \text{ si } \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, ||u_n - a|| < \epsilon.$$

Une autre façon d'énoncer la convergence d'une suite de points de $\mathbb{R}^2$ est la suivante :

Proposition 2.
Avec les notations de la définition précédente, la suite (u_n) tend vers a si, et seulement si, $x_n \to a_1$ et $y_n \to a_2$.
Autrement dit, pour étudier les limites, il suffit de regarder les deux coordonnées des points.

Corollaire 3 (unicité de la limite)**.** *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, a et a' deux points de $\mathbb{R}^2$. Si $u_n \to a$ et $u_n \to a'$, alors $a = a'$.*

Nous avons dit plus haut que les points appartenant à l'adhérence d'une partie A étaient ceux qui en étaient "aussi proches que possibles". En termes de suites, cela s'énonce comme suit :

Théorème 4.
Soit A une partie de $\mathbb{R}^2$. Un point $a \in \mathbb{R}^2$ appartient à $\overline{A}$ si, et seulement si, il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de A qui converge vers a.

Corollaire 5.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points d'une partie fermée A. Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, sa limite ℓ appartient encore à A.

Corollaire 6.
Soit A une partie de $\mathbb{R}^2$ tel que toute suite convergente de A admet une limite dans A, alors A est fermée.

2 Limites et continuité

2.1 Limites

2.1.1 Définition, unicité

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}^2$ et a un point adhérent à A.

Définition 8. On dit que f admet pour limite ℓ en a si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, x \in A \cap B(a,\eta) \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon$$

c'est donc formellement la même définition que pour les fonctions d'une seule variable réelle, la seule différence étant que la condition $|x-a| < \eta$ est remplacée par $||x-a|| < \eta$, ce qui se traduit par $x \in B(a,\eta)$

Théorème 7.
Si f admet pour limites ℓ_1 et ℓ_2 en a, alors $\ell_1 = \ell_2$.

On peut noter, comme pour les fonctions d'une variable réelle, $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ lorsque cette limite existe.

Exemple 4. *Soit* $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{array} \right.$ *La fonction f admet-elle une limite en (0, 0) (qui est bien adhérent à son ensemble de définition) ?*

Proposition 8.
Si la fonction f admet pour limite ℓ avec $a \in A$, alors $\ell = f(a)$.

2.1.2 Caractérisation séquentielle

Théorème 9.
Soit $f : A \to \mathbb{R}$, a un point adhérent à A et ℓ un réel. Alors f admet pour limite ℓ en a si, et seulement si, pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de A qui tend vers a, on a $f(u_n) \to \ell$.

Cette caractérisation est un bon moyen pour prouver qu'une fonction n'admet aucune limite en un point donné.

Exemple 5. *Soit* $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, $(x,y)\dfrac{xy}{x^2+y^2}$. *Démontrer que* f *n'admet pas de limite en* $(0,0)$.

2.1.3 Opérations sur les limites

Théorème 10.
Soit $f : A \to \mathbb{R}$, a un point adhérent à A, λ et μ deux réels ; On suppose que f et g admettent pour limites respectives ℓ et m en a. Alors :

- Les fonctions $\lambda f + \mu g$ et fg admettent des limites en a et
$$\lim_{X\to a}(\lambda f(X) + \mu g(X)) = \lambda\ell + \mu m \text{ et } \lim_{X\to a} fg = \ell m.$$
- Si $\ell \neq 0$, alors a est adhérent à l'ensemble $A_1 = \{X \in A | f(X) \neq 0\}$ et la fonction $\dfrac{1}{f}$, définie sur A_1, admet pour limite $\dfrac{1}{l}$ en a.
- Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction admettant pour limite L en ℓ. Alors la fonction $h \circ f : A \to \mathbb{R}$ admet pour limite L en a.
- Soit $k : \mathbb{R} \to A$ une fonction admettant pour limite a en t_0. Alors la fonction $f \circ k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admet pour limite ℓ en t_0.

2.2 Continuité

2.2.1 Définition, propriétés

Définition 9. Soit $f : A \to \mathbb{R}$ et a un point de A. On dit que f est continue en a si f admet une limite finie en a. Comme on l'a déjà dit, si c'est le cas, alors cette limite est égale à f(a).

Définition 10. La fonction f est dite continue sur A (ou plus simplement continue) si elle l'est en tout point de A. On note $\mathcal{C}(A, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues définies sur A.

Comme conséquence immédiate des théorèmes sur les limites, on a les résultats suivants :

Théorème 11.
La fonction f est continue en $a \in A$ si et seulement si, pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de A qui converge vers a, on a $f(u_n) \to f(a)$.

Les propriétés des limites s'étendent à la continuité: stabilité par somme, produit, quotient si le dénominateur ne s'annule pas, composition quand bien défini.

Exemple 6. *On définit les deux projections pr_1 et pr_2 par :*

$$pr_1(x_1, x_2) = x_1 et\, pr_2(x_1, x_2) = x_2.$$

Ces deux applications sont continues.

Définition 11. Une fonction polynomiale sur $\mathbb{R}^2$ est une fonction du type $\sum_{(i,j)\in I} a_{ij}x^i y^j$, où $(a_{ij})_{(i,j)\in I}$ est une famille finie de réels.

Exemple 7. *La fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto 1 + 7x + 2y + 4xy + 3x^2y - y^3$ est une fonction polynomiale.*

Remarque. *f est continue*

2.2.2 Continuité et topologie

Proposition 12.
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue. l'ensemble $U = \{x \in \mathbb{R}^2 | f(x) > 0\}$ est ouvert et l'ensemble $V = \{x \in \mathbb{R}^2 | f(x) \geqslant 0\}$ est fermé.

Remarque. *Il est clair que les conclusions subsistent si l'on remplace la condition $f(x) > 0$ par $f(x) > a$ ou $f(x) < a$: il suffit pour cela de considérer la fonction $f - a$ ou $-f + a$. Seul le fait que l'inégalité soit stricte (et que la fonction soit continue, bien sûr) importe. De même, pour les fermés, seul le fait que l'inégalité soit large importe.*

Corollaire 13.
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue. l'ensemble $U = \{x \in \mathbb{R}^2 | f(x) \neq 0\}$ est ouvert.

Théorème 14 (admis)**.** *Soit f une fonction continue sur un ensemble A fermé et borné, alors f admet, sur A, un minimum et un maximum.*

2.2.3 Continuité partielle

Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$, $a = (x_0, y_0) \in U$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction. On définit deux applications partielles :

$$f(x_0, \ .\ ) : \begin{cases} U_{x_0} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & f(x_0, y) \end{cases} \quad \text{et } f(\ .\ , y_0) : \begin{cases} V_{y_0} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x, y_0) \end{cases}$$

où les ensembles U_{x_0} et V_{x_0} sont définis par :

$$U_{x_0} = \{y \in \mathbb{R} | (x_0, y) \in U\} \text{ et } V_{y_0} = \{x \in \mathbb{R} | (x, y_0) \in U\}$$

Proposition 15.
Si la fonction f est continue en $a = (x_0, y_0)$, alors les deux applications partielles $f(x_0, \ .\ )$ et $f(\ .\ , y_0)$ sont continues en y_0 et x_0 respectivement. La réciproque est fausse.

Exemple 8. *Considérons l'application f définie sur $\mathbb{R}^2$ par*

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & si\ (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & sinon \end{cases}.$$

3 Dérivées selon un vecteur

3.1 Définition

Définition 12. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ avec U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. On dit que f admet une dérivée selon v en $a \in U$ si la fonction de la variable réelle $t \mapsto f(a+tv)$ admet une dérivée en 0.

Exemple 9. *Soit* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *définie par*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2}{x} & si\ x \neq 0 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Soit $v = (1,3)$, *f admet-elle une dérivée selon* v *en* $(0,0)$*?*

3.2 Dérivées partielles

Définition 13. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ et $a = (x_0, y_0) \in U$, U un ouvert de $\mathbb{R}^2$. On dit que f admet en a une dérivée partielle par rapport à sa première (resp. seconde) coordonnée si $x \mapsto f(x, y_0)$ (resp. $y \mapsto f(x_0, y)$) est dérivable en x_0 (resp. en y_0).

Notations: On les note généralement $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a)$ ces dérivées, parfois $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x_2}(a)$.

Remarque. *Les dérivées partielles* $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ *et* $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *correspondent, respectivement à la dérivée en a selon le vecteur* $(1,0)$ *et* $(0,1)$.

Définition 14. Si les deux dérivées partielles de f en a existent, on appelle vecteur gradient en a le vecteur

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a), \frac{\partial f}{\partial y}(a) \right)$$

Définition 15. Le point a est dit

- critique si $\nabla f(a) = (0,0)$
- régulier si $\nabla f(a) \neq (0,0)$.

Contrairement à ce qui se passe pour les fonctions d'une variable réelle (la dérivabilité entraîne la continuité), la situation est plus compliquée pour les fonctions de deux variables : l'existence, en un point $a \in U$, d'une dérivée partielle n'entraîne pas la continuité en ce point.

Nous verrons un peu plus loin que ce problème disparaît si l'on impose une condition de régularité plus forte que l'existence des dérivées partielles.

Exemple 10. *Considérons la fonction* $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1,x_2) & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{x_1 x_2^2}{x_1^2+x_2^4} & si\ (x_1,x_2) \neq (0,0) \\ 0 & sinon \end{cases} \end{cases}$. *Montrer que f admet des dérivées partielles en* $(0,0)$. *Est-elle continue?*

Proposition 16.
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}, \gamma(t) = (x(t), y(t))$. On suppose que f admet des dérivées partielles en $\gamma(a)$ et que γ est dérivable en a. Alors $f \circ \gamma$ est dérivable en a et

$$(f \circ \gamma)'(a) = x'(a).\frac{\partial f}{\partial x}(\gamma(a)) + y'(a).\frac{\partial f}{partialy}(a).$$

3.3 Changement de variables

Un changement de variable est une bijection de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. Pour rester avec des fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, on va le noter sous la forme de deux fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Si (z, t) sont les nouvelles coordonnées, alors on note $(v_1(z,t), v_2(z,t))$ les 'anciennes' coordonnées.

Exemples 11.

1. *Si on fait un changement affine* $(2x + y, 3x - y)$, *alors* $v_1 : (x, y) \mapsto 2x + y$ *et* $v_2 : (x, y) \mapsto 3x - y$.
2. *Si on fait un changement en coordonnées polaires, alors* $v_1 : (r, \theta) \mapsto r\cos\theta$ *et* $v_2 : (r, \theta) \mapsto r\sin\theta$.

Proposition 17.
Si f, v_1 et v_2 admettent des dérivées partielles, alors $g : (x, y) \mapsto f(v_1(x, y), v_2(x, y))$ admet également des dérivées partielles et on a

$$\frac{\partial g}{\partial x}(a) = \frac{\partial v_1}{\partial x}(a)\frac{\partial f}{\partial x}(v_1(a), v_2(a)) + \frac{\partial v_2}{\partial x}(a)\frac{\partial f}{\partial y}(v_1(a), v_2(a))$$

et

$$\frac{\partial g}{\partial y}(a) = \frac{\partial v_1}{\partial y}(a)\frac{\partial f}{\partial x}(v_1(a), v_2(a)) + \frac{\partial v_2}{\partial y}(a)\frac{\partial f}{\partial y}(v_1(a), v_2(a))$$

Exemple 12. *Soit* $f : (x, y) \mapsto \sin(x^2 + y^2)$ *et* $(r, \theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$. *On a* $v_1 : (r, \theta) \mapsto r\cos\theta$, $v_2 : (r, \theta) \mapsto r\sin\theta$.
On pose $g(r, \theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$. *Déterminer* $\frac{\partial g}{\partial r}$ *et* $\frac{\partial g}{\partial \theta}$.

4 Développement limité et plan tangent

4.1 Développement limité

Définition 16. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un ouvert U et a un point de U. On dit que f admet un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de a s'il existe deux réels λ_1, λ_2 et une fonction ϵ tendant vers 0 en $(0, 0)$ telle que pour tout $h = (h_1, h_2)$ vérifiant $a + h \in U$, on a

$$f(a + h) = f(a) + \lambda_1 h1 + \lambda_2 h2 + ||h||\epsilon(h).$$

On note alors

$$f(a + h) = f(a) + \lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2 + o(||h||).$$

Il est encore équivalent d'exiger l'existence d'une fonction $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ linéaire telle que

$$f(a + h) = f(a) + \varphi(h) + o(||h||).$$

Cette définition généralise celle donnée dans le cas des fonctions d'une variable réelle, pour lesquelles on écrit

$$f(a+h) = f(a) + \lambda h + o(h) :$$

dans ce cas, l'application linéaire φ est la fonction (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) $h \mapsto \lambda h$; dans le cas des fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, la fonction φ est $(h_1, h_2) \mapsto \lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2$. On a évidemment :

Proposition 18.
Si la fonction f admet un $\mathrm{DL}_1(a)$, elle est continue en a.

Comme pour les fonctions d'une variable réelle, on a aussi :

Proposition 19.
Si la fonction f admet un $\mathrm{DL}_1(a)$, celui-ci est unique.

Autrement dit : les égalités $f(a+h) = f(a)+\lambda_1 h_1+\lambda_2 h_2+o(||h||) = f(a)+\mu_1 h_1+\mu_2 h_2+o(||h||)$ entraînent $\lambda_1 = \mu_1$ et $\lambda_2 = \mu_2$.

Proposition 20.
Soient f, g deux fonctions définies sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ et admettant en $a \in U$ les DL1(a) suivants :

$$f(a+h) = f(a) + \lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2 + o(||h||) \text{ et } g(a+h) = g(a) + \mu_1 h_1 + \mu_2 h_2 + o(||h||).$$

Alors

- la fonction f + g admet un $\mathrm{DL}_1(a)$ donné par

$$(f+g)(a+h) = (f+g)(a) + (\lambda_1+\mu_1)h_1 + (\lambda_2+\mu_2)h2 + o(||h||).$$

- pour tout réel α, la fonction αf admet un DL1(a) donné par

$$(\alpha f)(a+h) = \alpha f(a) + \alpha\lambda_1 h_1 + \alpha\lambda_2 h_2 + o(||h||)$$

- la fonction fg admet un $\mathrm{DL}_1(a)$ donné par

$$(fg)(a+h) = (fg)(a) + (g(a)\lambda_1 + f(a)\mu_1)\, h_1 + (g(a)\lambda_2 + f(a)\mu_2)\, h_2 + o(||h||).$$

Le dernier point est en particulier utile lorsque la fonction de deux variables se présente comme produit de deux fonctions d'une seule variable.

Exemple 13. *Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x_1, x_2) = (1+\sin x_1)(1+\sin x_2)$. Déterminer un DL_1 de f au voisinage de $(0,0)$.*

4.2 Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Définition 17. La fonction f, définie sur l'ouvert U de $\mathbb{R}^2$, est dite de classe $\mathcal{C}^1$ si

- Les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a)$ existent en tout point a de U
- les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$(définies sur U) sont continues.

Exemple 14. *La fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \sin(x+y^2)$ est de classe $\mathcal{C}^1$: en effet, par composition, les deux dérivées partielles existent en tout point de $\mathbb{R}^2$ et sont données par*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \cos(x+y^2) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y\cos(x+y^2)$$

Ces deux fonctions sont encore continues.

Le théorème essentiel concernant les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ est le suivant :

Théorème 21.
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$. Alors f admet en tout point $a \in U$ un développement limité à l'ordre 1 donné par $\forall h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a + h \in U$,

$$f(a+h) = f(a) + h_1\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + h_2\frac{\partial f}{\partial x_2}(a) + o(||h||) = f(a) + < \nabla f(a), h > + o(||h||)$$

ou encore, en notant $a = (a_1, a_2)$ et $a + h = (x_1, x_2)$,

$$f(x_1,x_2) = f(a_1,a_2) + (x_1-a_1)\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1,a_2) + (x_2-a_2)\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1,a_2) + o\left(||(x_1-a_1, x_2-a_2||\right)$$

Remarque: les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sont continues.

Exemple 15. *On reprend l'exemple* $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1,x_2) & \longmapsto & \begin{cases} \frac{x_1x_2^2}{x_1^2+x_2^4} & \text{si } (x_1,x_2) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$. *Les dérivées partielles sont-elles continues?*

4.3 Plan tangent

Définition 18. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, on appelle plan tangent en a le plan d'équation

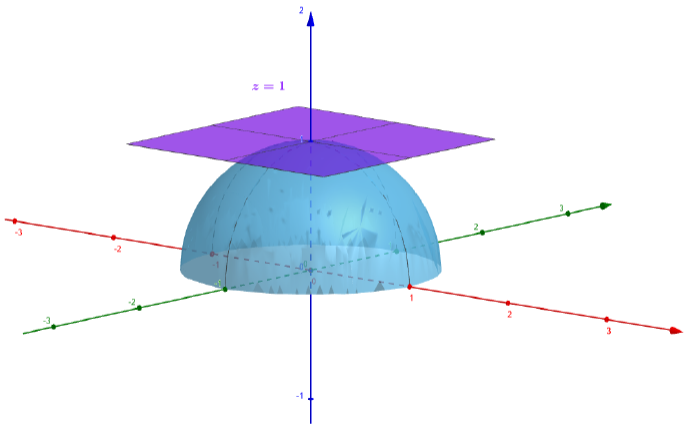
$$z = f(a) + h_1\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + h_2\frac{\partial f}{\partial x_2}(a),$$

ou encore, en notant $a = (a_1, a_2)$,

$$z = f(a_1,a_2) + (x_1-a_1)\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1,a_2) + (x_2-a_2)\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1,a_2)$$

Remarque. *On retrouve une formule analogue à $y = f(a) + f'(a)(x-a)$*

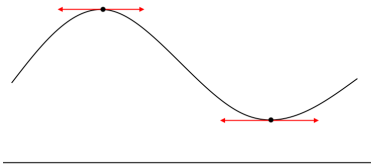
Exemple 16. *Considérons la demi-sphère de rayon 1 centrée en $(0,0,0)$ avec $z \geqslant 0$. Déterminer l'équation du plan tangent au sommet.*



5 Géométrie

5.1 Extrema

Comme pour les fonctions d'une variable réelle, l'étude des points où la dérivée (ici, les dérivées partielles) d'une fonction s'annule(nt) donne des renseignements sur les éventuels extrema de cette fonction. Comme pour les fonctions d'une variable réelle encore, cela ne donne que des candidats potentiels, il faut ensuite regarder s'il y a effectivement un extremum en le candidat. Quand on cherche les points d'extremum d'une fonction d'une variable qui ne sont pas sur les bords de l'intervalle de recherche, on commence par chercher les points où la dérivée est nulle, et en ces points son graphe admet des droites tangentes horizontales.



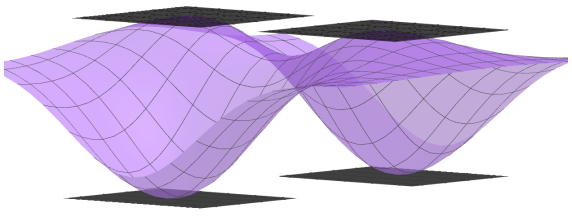
Définition 19. Soit f une fonction définie sur une partie A de $\mathbb{R}^2$ et a un point de A; On dit que f présente en a un maximum local (resp. global) si il existe un réel $\epsilon > 0$ tel que, pour tout $x \in A \cap B(a, \epsilon)$, on ait $f(x) \leqslant f(a)$ (resp. pour tout $x \in A, f(x) \leqslant f(a)$). Le maximum est dit strict si l'inégalité est,en outre, stricte pour $x \neq a$.

On définit bien sûr de façon analogue un minimum (local ou global) et un extremum (c'est un minimum ou un maximum).

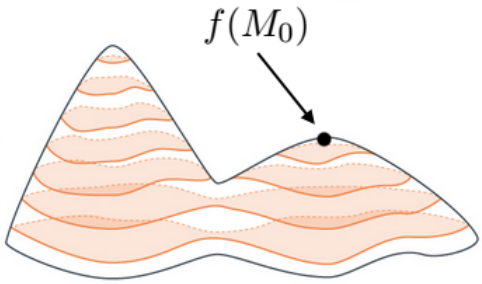
Exemples 17.

1. *Montrer que la fonction* $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$ *présente en* $a = (0, 0)$ *un minimum global strict.*
2. *Montrer que la fonction* $g : (x, y) \mapsto sin(x^2 + y^2)$ *présente en* $a = (0, 0)$ *un minimum local strict.*
3. *Montrer que la fonction* $h : (x, y) \mapsto x^2$ *présente en* $a = (0, 0)$ *un minimum global non strict.*

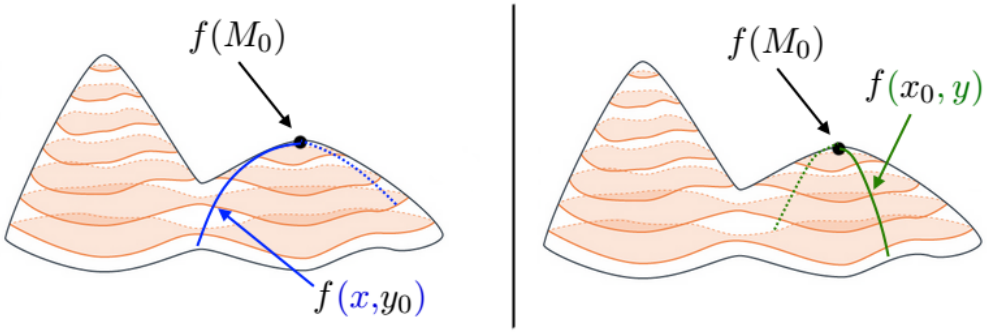
Pour une fonction à deux variables, les points d'extremum (qui ne sont pas aux bords du domaine de recherche) sont des points en lesquels le graphe admet un **plan tangent horizontal**.



Pour les trouver, on cherche les points où **le gradient est nul**. En effet si un point $M(x_0, y_0)$ correspond à un extremum local



alors les applications partielles $x \mapsto f(x,y_0)$ et $y \mapsto f(x_0,y)$ admettent toutes les deux un extremum local en respectivement $x = x_0$ pour la première, et $y = y_0$ pour la seconde



et donc leurs dérivées s'annulent en ces points ! Autrement dit, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$, c'est-à-dire $\nabla f(M_0) = (0, 0)$.

Théorème 22.
Soit f une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$. Si la fonction f, dérivable par rapport à ses deux variables, admet un extremum local en a, alors a est un point critique (c'est-à-dire $\nabla f(a) = (0, 0)$).

Remarque. *la réciproque est fausse.*

⚠ Cette propriété (un point en lequel f présente un extremum local est un point critique) n'est vraie que parce que l'ensemble U est ouvert, de même que la propriété analogue pour les fonctions d'une variable réelle n'est vérifiée qu'en un point intérieur à l'intervalle de définition.

Si $f : A \to \mathbb{R}$, il faudra donc faire l'étude sur le plus grand ouvert U inclus dans A puis examiner les points de la frontière c'est-à-dire les points de $A \setminus U$.

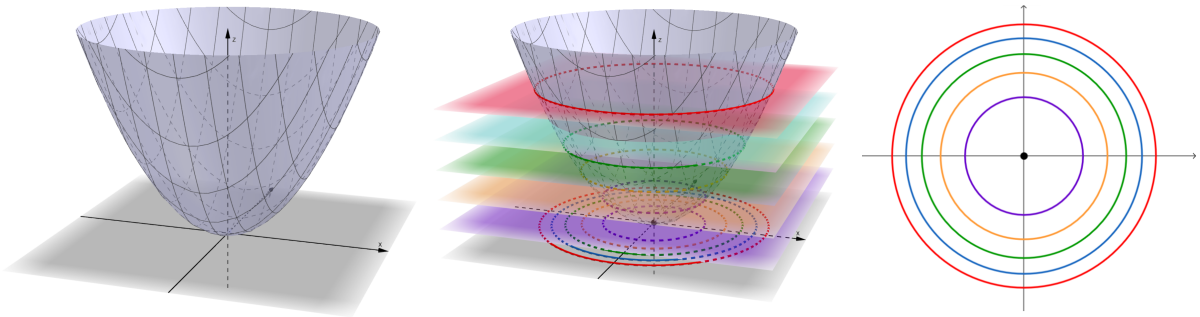
Exemple 18. *Considérons la fonction f définie sur le carré $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leqslant x \leqslant 2, 0 \leqslant y \leqslant 2\}$ par $f(x, y) = x - 3y - 1$. Étudier ses extrema.*

5.2 Lignes de niveau

Définition 20.

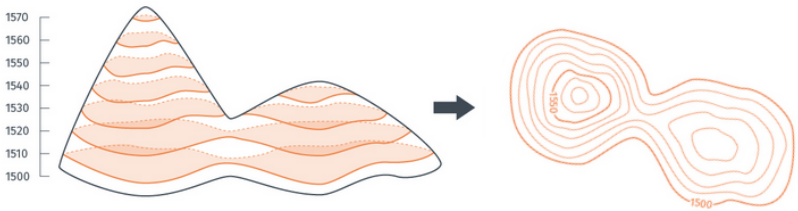
On appelle ligne de niveau $\lambda \in \mathbb{R}$ d'une fonction $f : (x, y) \mapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$ la partie de D_f d'équation $f(x, y) = \lambda$.

Exemple : on considère la fonction $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$.
Pour $\lambda \in \mathbb{R}_+$, $f(x, y) = \lambda$ est l'équation d'un cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon $\sqrt{\lambda}$.

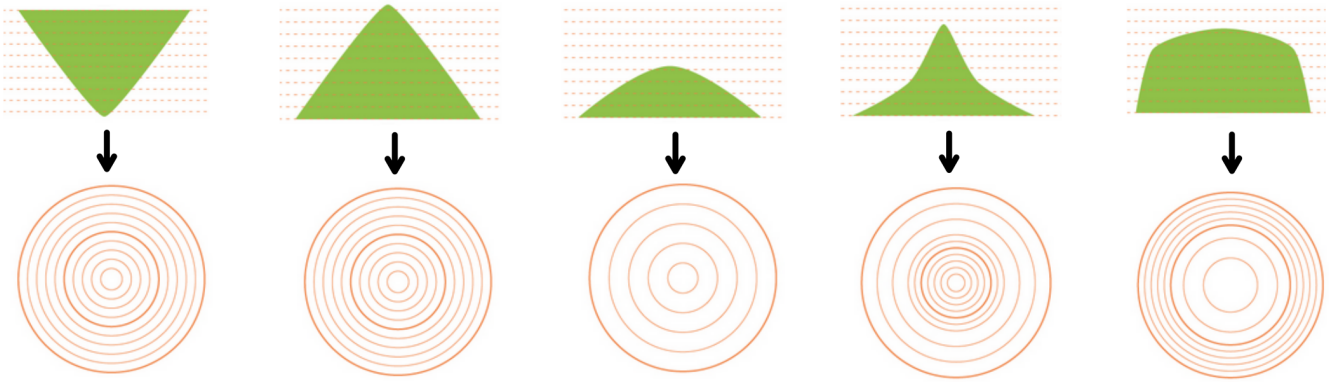


Géométriquement, la ligne de niveau λ s'obtient en considérant l'intersection entre le graphe de f et le plan d'équation $z = \lambda$, puis en projetant (orthogonalement) cette intersection sur le plan d'équation $z = 0$ (c'est-à-dire sur l'ensemble de départ).

Les lignes de niveau à altitude constante sont représentées sur les cartes topographiques.
Elles permettent d'apprécier le dénivelé sur une carte en 2 dimensions.

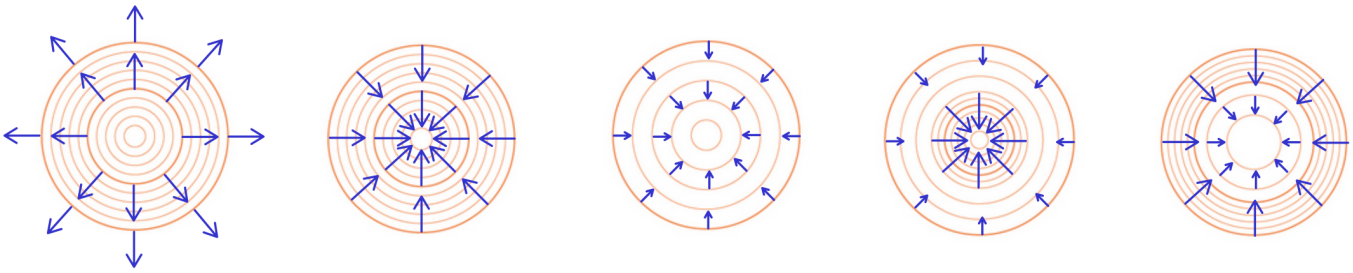


Plus les lignes de niveau sont rapprochées, plus la pente est forte, et inversement.



5.3 Interprétation géométrique du gradient

Soit f une fonction de classe C^1 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$. Étant donné un point $a \in U$, on cherche à savoir quand la pente en ce point est maximal. On cherche donc pour quel vecteur unitaire v, la dérivée de la fonction $h : t \mapsto f(a + tv)$ est maximale. La pente va

Proposition 23.
Le vecteur $\nabla f(a)$ dirige la ligne de plus grande pente de la surface d'équation $z = f(x, y)$ au point $(a, f(a))$; il est de même sens que la ligne de plus grande pente ascendante.

Proposition 24.
Le gradient est orthogonal aux lignes de niveau.