1 Vrai/faux sur les applications linéaires

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses?

affirmation 1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, alors $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont stables par f .

affirmation 2. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, alors $\text{Ker}(f^2) \subset \text{Ker}(f)$.

affirmation 3. Soit $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$, alors $\text{Im}(f \circ g) \subset \text{Im}(f)$.

affirmation 4. Soit $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$, alors $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f \circ g)$.

affirmation 5. Soit $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$, alors $\text{Ker}(g) \subset \text{Ker}(f \circ g)$.

affirmation 6. Soit f une forme linéaire sur E , alors elle est surjective.

affirmation 7. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $G \subset E$, alors $\text{Ker}(f|_G) = \text{Ker}(f) \cap G$.

2 Solutions du Vrai/Faux sur les applications linéaires

et $f(1, -1) = (0, 0)$.

Correction 1

VRAI car $\forall x \in E, f(f(x)) \in \text{Im}(f)$ et $f(0_E) = 0_E$.

Correction 5

VRAI car $f(0_E) = 0_E$

Correction 2

FAUX, $f : (x, y, z) \mapsto (0, x, y)$ vérifie $f^2(0, 1, 0) = (0, 0, 0)$ mais $f(0, 1, 0) = (0, 0, 1)$

Correction 6

FAUX, $f : x \mapsto 0$ n'est pas surjective (et c'est le seul car, une forme linéaire NON NULLE est toujours surjective).

Correction 3

VRAI car pour tout $x \in E, f \circ g(x) = f(g(x)) \in \text{Im}(f)$.

Correction 7

VRAI, $x \in \text{Ker}(f|_G) \Leftrightarrow x \in G$ (ensemble de départ de $f|_G$) et $f(x) = 0_E$ (définition du noyau)

Correction 4

FAUX, prenons $f : (x, y) \mapsto (x + y, 0)$ et $g : (x, y) \mapsto (x, 0)$, alors $f \circ g(1, -1) = (1, 0)$