1 Vrai/faux sur le calcul algébrique

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses?

---

affirmation 1. Soit $a \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ et $n \in \mathbb{N}$ alors $\sum_{k=1}^n a^k = \frac{1-a^n}{1-a}$

---

affirmation 2. Soit $a \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, alors

$$\sum_{k=0}^{n-1} a = na.$$

---

affirmation 3. Soit (a_k) une famille de complexes, $\lambda \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$, alors $\sum_{k=1}^n (\lambda a_k) =$

$$\lambda \sum_{k=1}^n a_k.$$

---

affirmation 4. Soit $n \in \mathbb{N}$, alors $\sum_{k=0}^n (k^2 - k) = \sum_{k=2}^n (k^2 - k).$

---

affirmation 5. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{C}$, alors

$$\sum_{k=0}^n a = na.$$

---

affirmation 6. Soit (a_j) une famille de complexes et $n \in \mathbb{N}$, alors

$$\sum_{j=0}^n a_j = \sum_{0 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a_{2k} + \sum_{0 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a_{2k+1}.$$

---

affirmation 7.

$$\sum_{i < j} ij = \sum_{j < i} ij$$

---

affirmation 11. Soit a et b deux complexes et $n \in \mathbb{N}^*$, alors

$$(a + b)^n = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

---

affirmation 8. Soit $(a_i)_{i \in I}$ et $(b_j)_{j \in J}$ deux familles de complexes. On a

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} a_i b_j = \left(\sum_{i \in I} a_i \right) \left(\sum_{j \in J} b_j \right).$$

---

affirmation 9. Soit $(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ une famille de complexes. Alors

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} = \sum_{i=1}^n a_i i + 2 \sum_{i < j} a_{ij}.$$

---

affirmation 10. Soit $(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ une famille de complexes. Alors

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} = \sum_{i=1}^n a_i i + 2 \sum_{i < j} a_{ij}.$$

---

2 Solutions du Vrai/Faux calculs algébriques

Correction 1

FAUX, il manque le premier terme : $\sum_{k=1}^n a^k = \frac{a(1-a^n)}{1-a}$

Correction 2

VRAI, il y a n termes dans la somme.

Correction 3

VRAI, par linéarité de la somme.

Correction 4

VRAI, les deux premiers termes sont nuls.

Correction 5

FAUX, il y a $n + 1$ termes dans la somme donc $\sum_{k=0}^n a = (n + 1)a$.

Correction 6

FAUX. On a

$$\sum_{j=0}^n a_j = \sum_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \text{ pair}}} a_j + \sum_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \text{ impair}}} a_j.$$

On pose $k = 2j$ dans la première somme, j varie de 0 à n donc k est compris entre 0 et $\frac{n}{2}$ et comme c 'est un entier, il varie de 0 à $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Dans la deuxième somme, on pose $j = 2k + 1$, j varie entre 0 et n donc entre 1 et n puisque j est impair. k varie donc entre 0 et $\frac{n-1}{2}$. Si $n = 2m$ est pair, $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor = m$ mais j ne vaut jamais $2n + 1$. La formule correcte est

$$\sum_{j=0}^n a_j = \sum_{0 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a_{2k} + \sum_{0 \leq k \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} a_{2k+1}.$$

Correction 9

FAUX, on a

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} = \sum_{i=1}^n a_i i + \sum_{i < j} a_{ij} + \sum_{j < i} a_{ij}.$$

C'est vrai uniquement si $a_{ij} = a_{ji}$ pour tout i, j .

Correction 7

VRAI car les indices sont muets et le terme général est symétrique :

$$\begin{aligned} \sum_{i < j} ij &= \sum_{k < l} kl \text{ en posant } (k, l) = (i, j) \\ &= \sum_{j < i} ji \text{ en posant } (i, j) = (l, k) \\ &= \sum_{j < i} ij \end{aligned}$$

Correction 10

FAUX, on a

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} = \sum_{i=1}^n a_i i + \sum_{i < j} a_{ij} + \sum_{j < i} a_{ij}.$$

C'est vrai uniquement si $a_{ij} = a_{ji}$ pour tout i, j .

Correction 8

VRAI car

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} a_i b_j = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} a_i b_j = \sum_{i \in I} a_i \sum_{j \in J} b_j = \sum_{j \in J} b_j \sum_{i \in I} a_i$$

Correction 11

FAUX, la somme commence à 0.