1 Vrai/faux sur la dimension finie

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?
E désigne un ssev de dimension finie.

affirmation 1. Soit F et G deux ssev d'un ev E, si $\dim(F) = \dim(G)$ alors $F = G$.

affirmation 2. Si $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$, alors $F + G = E$.

affirmation 3. Si $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$ et $F + G = E$ alors F et G sont en somme directe.

affirmation 4. Soit F et G deux ssev d'un ev E, si $\dim(F) = \dim(G)$ alors $F \simeq G$.

affirmation 5. Soit F un hyperplan de E. Si $x \notin F$, alors $F \oplus \mathrm{Vect}(x) = E$.

affirmation 6. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Si $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont supplémentaires dans E alors f est un projecteur.

affirmation 7. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Si $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont en somme directe, alors ils sont supplémentaires dans E

affirmation 8. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et $g \in GL(E)$, alors $\mathrm{rg}(g \circ f) = \mathrm{rg}(f)$.

affirmation 9. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et $g \in GL(E)$, alors $\text{rg}(f \circ g) = \text{rg}(f)$.

2 Solutions du Vrai/Faux sur la dimension finie

Correction 1

Faux si on ne suppose pas qu'il y a une inclusion

Correction 2

FAUX, prenez $F = G = \text{Vect}(1,0)$, alors $F + G = F \neq \mathbb{R}^2$.

Correction 3

VRAI car $\dim(F+G) = \dim(E)$ et par Grassman, $\dim(F \cap G) = 0$.

Correction 4 VRAI car ils sont tous les deux isomorphes à $\mathbb{K}^n$ avec n leur dimension commune.

Correction 5

VRAI car la somme est directe et on a égalité des dimensions.

Correction 6

FAUX, prenez $f : (x, y) \longmapsto (2x, 0)$.

Correction 7

VRAI car, par le thm du rang, on a égalité des dimensions entre E et $\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

Correction 8

VRAI car deux espaces isomorphes ont même dimension et $\mathrm{Im}(g \circ f) = g\big(\mathrm{Im}(f)\big)$ est isomorphe à $\mathrm{Im}(f)$ par g.

Correction 9

VRAI car $\mathrm{Im}(f \circ g) = f \circ g(E)$ et $g(E) = E$ puisque g est un isomorphisme.
