1 Vrai/faux

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

---

affirmation 1. Si p est un projecteur, alors il existe une base B dans laquelle la matrice de p est $\begin{pmatrix} I_r & (0) \\ (0) & (0) \end{pmatrix}$

---

affirmation 2. Soit $f \in \mathscr{L}(\mathscr{E})$, alors il existe une matrice représentant f de la forme $\begin{pmatrix} A & (0) \\ (0) & (0) \end{pmatrix}$ où A est une matrice carrée de taille r avec $r = \mathrm{rg}(f)$.

---

affirmation 3. Soit p un projecteur, alors $\mathrm{rg}(p) = \mathrm{Tr}(p)$.

---

affirmation 4. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et A une matrice représentant f, alors $\mathrm{Ker}(A) \simeq \ker(f)$.

---

affirmation 5. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et A une matrice représentant f, alors $\mathrm{Im}(A) \simeq \mathrm{Im}(f)$.

---

2 Solutions du Vrai/Faux calculs algébriques

Correction 1

VRAI il faut prendre une base adaptée à la somme directe $\mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$.

Correction 2

FAUX, considérons $f : (x, y) \mapsto (0, x)$ qui est de rang 1. Il n'existe aucune base dans laquelle la matrice de f est $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ car $f^2 = 0_{\mathscr{L}(E)}$ (et donc $M^2 = (0)$).

Correction 3

VRAI car dans une base adaptée, la matrice de p est de la forme $\begin{pmatrix} I_r & (0) \\ (0) & (0) \end{pmatrix}$ où r est la dimension de $\mathrm{Im}(p)$ donc son rang.

Correction 4

VRAI, si $A = Mat_{BC}(f)$, alors l'isomorphisme est donné par $x \mapsto Mat_B(x)$.

Correction 5

VRAI, si $A = Mat_{BC}(f)$, alors l'isomorphisme est donné par $x \mapsto Mat_C(x)$.
