Devoir maison des vacances .

Partie I: étude théorique

1. L'objectif de cette question est de démontrer la propriété suivante [1] :

   Si v et w sont deux suites réelles strictement positives à partir d'un certain rang, vérifiant $v_n \underset{+\infty}{\sim} w_n$, et si la série $\sum v_n$ diverge, alors :

   $$\sum_{k=0}^{n} v_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{n} w_k$$

   On considère donc v et w deux suites réelles strictement positives à partir d'un certain rang, vérifiant $v_n \underset{+\infty}{\sim} w_n$, et on suppose que la série $\sum v_n$ diverge. On pose en outre, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

   $$V_n = \sum_{k=0}^{n} v_k \qquad \text{et} \qquad W_n = \sum_{k=0}^{n} w_k$$

   (a) Justifier qu'il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $V_n > 0$ et $W_n > 0$.

   (b) Soit $\varepsilon > 0$. Justifier qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant p$:

   $$(1-\varepsilon)w_n \leqslant v_n \leqslant (1+\varepsilon)w_n$$

   (c) En déduire, pour $n \geqslant \max(n_0, p)$, un encadrement de $\dfrac{V_n}{W_n}$, et conclure.

2. À l'aide de la propriété (R), montrer le lemme suivant, appelé **lemme de l'escalier**, et qui sera l'outil central de la suite de l'exercice.

   Lemme de l'escalier : *soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle.*
   S'il existe un réel $\lambda \neq 0$ tel que $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda$, alors $u_n \sim \lambda n$.

3. Pour traiter le cas où $\lambda = 0$, on va utiliser le théorème de Cesaro :

   Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ une suite convergeant vers ℓ, alors la suite de terme général $v_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$ converge également vers ℓ.

   On se donne donc une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ une suite convergeant vers ℓ et pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose $v_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$. On fixe $\epsilon > 0$.

[1] On peut montrer que si les deux séries convergent, ce sont leurs restes qui sont équivalents !

(a) Montrer qu'il existe $N_1 \in \mathbb{N}^\star$ tel que $\forall n \geqslant N_1$,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=N_1}^{n} |u_k - \ell| \leqslant (n - N_1 + 1)\epsilon.$$

(b) Montrer qu'il existe $N_2 \in \mathbb{N}^\star$ tel que $\forall n \geqslant N_2$,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_1-1} |u_k - \ell| \leqslant \epsilon.$$

(c) En déduire l'existence de $N \in \mathbb{N}^\star$ tel que

$$\forall n \geqslant N, |v_n - \ell| < 2\epsilon,$$

puis conclure.

4. Redémontrez le lemme de l'escalier en utilisant Cesaro.

5. Si $u_{n+1} - u_n \to 0$, quel résultat nous donne Cesaro?

Partie II: applications

6. Dans cette question, on considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}\,,\ u_{n+1} = u_n e^{1/u_n}.$$

(a) Montrer que u est bien définie, et tend vers $+\infty$.

(b) À l'aide du lemme de l'escalier, montrer que $u_n \sim n$.

7. Dans cette question, on considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}\,,\ u_{n+1} = u_n + \frac{n}{(n+1)u_n^2}.$$

(a) Montrer que u est bien définie, et déterminer sa limite.

(b) À l'aide du lemme de l'escalier appliqué à la suite $(v_n)_{n\geqslant 0} = (u_n^3)_{n\geqslant 0}$, déterminer un équivalent simple de u_n lorsque $n \to +\infty$.

Pour poursuivre l'exercice, l'objectif est maintenant de comprendre comment on pouvait, dans la question précédente, intuiter le choix de poser $v_n = u_n^3$ pour obtenir un escalier. Pour cela, une façon de faire (parmi d'autres) est de procéder à un travail préparatoire non rigoureux en deux étapes.

- Simplifier de façon approximative la relation de récurrence pour exprimer $u_{n+1} - u_n$ en fonction de u_n. Ici, $\frac{n}{n+1} \sim 1$, donc :

$$u_{n+1} - u_n \sim \frac{1}{u_n^2}.$$

- Faire appel à l'analogie suite-fonction en remplaçant $u_{n+1} - u_n$ par f' et u_n par f, pour obtenir l'équation différentielle plus ou moins analogue :

$$f' = \frac{1}{f^2}.$$

Ici, cela se réécrit $f^2 \cdot f' = 1$, c'est-à-dire $\boxed{\frac{1}{3}\left(f^3\right)' = 1}$.

On comprend alors qu'il est crédible qu'en posant $v_n = u_n^3$, on ait $v_{n+1} - v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 3$.

8. Déterminer un équivalent simple de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par

$$u_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}\,,\ u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}.$$

9. Déterminer un équivalent simple de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}\,,\ u_{n+1} = \frac{u_n}{(1+u_n)^2}.$$

Partie III: Pour aller plus loin

10. Soit f admettant en 0 le DL $f(x) = x - ax^{p+1} + o(x^{p+1})$ avec $a > 0$ et $p > 0$. On considère la suite $u_{n+1} = f(u_n)$ et on admet que $u_n \to 0$

    (a) Montrer que $\dfrac{1}{u_{n+1}^p} - \dfrac{1}{u_n^p} \to ap$.

    (b) En déduire que $u_n \sim \left(\dfrac{1}{nap}\right)^{1/p}$.

    (c) On considère la suite définie par $x_0 > 0$ et $x_{n+1} = x_n + e^{-x_n}$.

        i. Appliquez le résultat précédent à $y_n = e^{-x_n}$.

        ii. En déduire un équivalent de x_n.

11. Considérons la suite définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{2n+1}{n+1} u_n$.

    (a) Trouver un équivalent de $\ln(u_n)$.

    (b) En considérant une série télescopique, montrer que $\left(\dfrac{u_n}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si la série de terme général $\ln\left(1 - \dfrac{1}{2(n+1)}\right)$ converge.

    (c) En déduire qu'il n'existe pas de réel λ tel que $u_n \sim \lambda 2^n$.

    (d) Déterminer un équivalent w_n de $\ln\left(\dfrac{u_n}{2^n}\right)$.

    (e) On pose $v_n = \dfrac{u_n}{2^n} e^{-w_n}$. Montrer que (v_n) converge.

    (f) En déduire que u_n admet un équivalent de la forme $\lambda \dfrac{\alpha 2^n}{\sqrt{n}}$ avec $\lambda > 0$.

Correction du DM des vacances

Partie I

1. (a) Par hypothèse, on a $V_n \to +\infty$, donc par définition de la limite, il existe un rang $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_1$, on a $V_n \geqslant 1 > 0$.

   De plus, comme $v_n \sim w_n$, alors par le théorème de comparaison asymptotique des séries à termes positifs, on en déduit que $W_n \to_{n\to+\infty} +\infty$, donc de même, il existe un rang $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_2$, on a $W_n \geqslant 1 > 0$.

   Ainsi, en posant $n_0 := \max(n_1, n_2)$, on en déduit que pour tout $n \geqslant n_0$, alors on a $V_n > 0$ et $W_n > 0$.

   (b) On sait que $v_n \underset{+\infty}{\sim} w_n$, donc $\dfrac{v_n}{w_n} \to 1$. Soit $\epsilon > 0$. D'après la définition de la limite, il existe un rang $p \in \mathbb{N}$ tel que:

$$\forall k \geqslant p, \quad 1-\varepsilon \leqslant \frac{v_k}{w_k} \leqslant 1+\varepsilon$$

   d'où (en multipliant par $w_k > 0$) :

$$(1-\varepsilon)w_k \leqslant v_k \leqslant (1+\varepsilon)w_k \qquad (*)$$

   (c) Tout revient à montrer que $\boxed{\dfrac{V_n}{W_n} \to_{n\to+\infty} 1}$.

   Soit $\epsilon > 0$. Soit $n \geqslant \max(n_0, p)$. Par la question précédente, en sommant l'encadrement $(*)$ pour $k \in [\![p, n]\!]$, on obtient :

$$(1-\varepsilon)\sum_{k=p}^{n} w_k \leqslant \sum_{k=p}^{n} v_k \leqslant (1+\varepsilon)\sum_{k=p}^{n} w_k$$

   Les sommes ci-dessus correspondent à V_n et W_n à une constante près, car :

$$\sum_{k=p}^{n} v_k = \sum_{k=0}^{n} v_k - \sum_{k=0}^{p-1} v_k = V_n - V_{p-1} \quad \text{et de même} \quad \sum_{k=p}^{n} w_k = W_n - W_{p-1}$$

   L'encadrement précédent devient alors :

$$(1-\varepsilon)(W_n - W_{p-1}) \leqslant V_n - V_{p-1} \leqslant (1+\varepsilon)(W_n - W_{p-1})$$

$$\text{donc:} \quad (1-\varepsilon)\left(1 - \frac{W_{p-1}}{W_n}\right) \leqslant \frac{V_n}{W_n} - \frac{V_{p-1}}{W_n} \leqslant (1+\varepsilon)\left(1 - \frac{W_{p-1}}{W_n}\right) \qquad \leftarrow \text{car } W_n > 0$$

$$\text{donc:} \quad \underbrace{(1-\varepsilon)\left(1 - \frac{W_{p-1}}{W_n}\right) + \frac{V_{p-1}}{W_n}}_{=:a_n} \leqslant \frac{V_n}{W_n} \leqslant \underbrace{(1+\varepsilon)\left(1 - \frac{W_{p-1}}{W_n}\right) + \frac{V_{p-1}}{W_n}}_{=:b_n}$$

   Or, W_{p-1} est une constante, et $W_n \to_{n\to+\infty} +\infty$; on a donc :

$$a_n \to_{n\to+\infty} 1-\varepsilon \qquad \text{et} \qquad b_n \to_{n\to+\infty} 1+\varepsilon$$

   Par définition de la limite, on a :

   - à partir d'un certain rang N_1, on a

$$(1-\varepsilon) - \varepsilon \leqslant a_n \leqslant (1-\varepsilon) + \varepsilon\ , \qquad \text{et donc en particulier:} \qquad 1 - 2\varepsilon \leqslant a_n$$

- à partir d'un certain rang N_2, on a

$$(1+\varepsilon)-\varepsilon \leqslant b_n \leqslant (1+\varepsilon)+\varepsilon \ , \qquad \text{et donc en particulier:} \qquad b_n \leqslant 1+2\varepsilon$$

Ainsi, à partir du rang $N_0 := \max(N_1, N_2)$, on a par transitivité :

$$1-2\varepsilon \leqslant \frac{V_n}{W_n} \leqslant 1+2\varepsilon$$

Ce raisonnement étant valable pour tout $\varepsilon > 0$, on a bien démontré que $\frac{V_n}{W_n} \to_{n\to+\infty} 1$.

2. Mettons-nous sous les hypothèses du lemme : considérons $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle, et supposons qu'il existe $\lambda \neq 0$ tel que $u_{n+1} - u_n \to_{n\to+\infty} \lambda$.

   Comme λ est non nul, on en déduit que $u_{n+1} - u_n \sim \lambda$. Quitte à considérer la suite $(-u_n)$, on peut de plus supposer $\lambda > 0$. Ainsi, à partir d'un certain rang, on a $u_{n+1} - u_n > 0$.

   Enfin, puisque la série $\sum \lambda$ diverge, par la propriété (R), on en déduit que

$$\sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) \sim \sum_{k=0}^{n-1} \lambda$$

   Or,

$$\sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = u_n - u_0 \ , \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n-1} \lambda = n\lambda$$

   La propriété (R) implique donc que

$$\begin{aligned} u_n - u_0 &= n\lambda + o(n) \\ \text{donc:} \quad u_n + o(n) &= n\lambda + o(n) \\ \text{donc:} \quad u_n &= n\lambda + o(n) \end{aligned}$$

   On obtient ainsi $u_n \sim n\lambda$.

3. (a) On sait que $|u_n - \ell| \to 0$. Par définition de la limite, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k \geqslant N_1$,

$$|u_k - \ell| \leqslant \epsilon.$$

   Soit $n \geqslant N_1$, alors pour tout $k \in [\![N_1, n]\!]$, $|u_k - \ell| \leqslant \epsilon$. En sommant ces inégalités, on obtient

$$\sum_{k=N_1}^{n} |u_k - \ell| \leqslant (n - N_1 + 1)\epsilon.$$

   (b) Une fois N_1 fixé à la question précédente, $\sum_{k=1}^{N_1-1} |u_k - \ell|$ est une constante. On a donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{N_1-1} |u_k - \ell| = 0$. Ainsi, il existe N_2 tel que $\forall n \geqslant N_2$, $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{N_1-1} |u_k - \ell| \leqslant \epsilon$.

(c) Soit $N = \max(N_1, N_2)$, alors $\forall n \geqslant N$, on a

$$\begin{aligned}
|v_n - \ell| &\leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N} |u_k - \ell| \text{ par l'inégalité triangulaire} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_1-1} |u_k - \ell| + \frac{1}{n}\sum_{k=N_1}^{n} |u_k - \ell| \\
&\leqslant \epsilon + \frac{n - N_1 + 1}{n}\epsilon \text{ d'après les deux questions précédentes} \\
&\leqslant 2\epsilon
\end{aligned}$$

On a bien montré que $v_n \to \ell$.

4. On suppose que $u_{n+1} - u_n \to \ell$, $\ell \neq 0$. Alors d'après Cesaro, la suite de terme général $v_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(u_{k+1} - u_k)$ converge également vers λ. Or, on reconnaît une somme télescopique. On a donc $\dfrac{1}{n}(u_{n+1} - u_1) \to \lambda$.

   Comme $\dfrac{1}{n}u_1 \to 0$, on en déduit que $\dfrac{u_{n+1}}{n} \to \lambda$ donc $u_{n+1} \sim n\lambda$ et, comme $n + 1 \sim_{+\infty} n$, on obtient $u_{n+1} \sim (n+1)\lambda$ puis $u_n \sim n\lambda$.

5. Si $u_{n+1} - u_n \to 0$, Cesaro nous donne $\dfrac{1}{n}u_n \to 0$ avec un raisonnement analogue à la question précédente.

Partie II: Applications

6. (a)
   - On a $u_0 = 1 > 0$, donc au vu de la relation de récurrence de la suite, on en déduit par récurrence immédiate que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ (ce qui garantit d'ailleurs que u est bien définie).
   - Étudions les variations de cette suite. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, comme $1/u_n > 0$, on a :

     $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{1/u_n} > e^0 = 1$$

     d'où $u_{n+1} > u_n$.
     u est (strictement) croissante. Ainsi, par le théorème de la limite monotone, la suite u est soit convergente, soit diverge vers $+\infty$.
     Par l'absurde, supposons qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \to_{n\to+\infty} \ell$. Par croissance de la suite, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_0 \leqslant u_n$, donc par passage à la limite, on en déduit que $0 < u_0 \leqslant \ell$ et donc $0 < \ell$. Par passage à la limite dans la relation $u_{n+1} = u_n e^{1/u_n}$, on obtient :

     $$\begin{aligned}
     &\ell = \ell\, e^{1/\ell} \\
     \text{donc: } &\ell\left(1 - e^{1/\ell}\right) = 0 \\
     \text{donc: } &\ell = 0 \quad \text{ou} \quad 1 - e^{1/\ell} = 0 \\
     \text{donc: } &\ell = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\ell} = 0 \ \text{ : impossible}
     \end{aligned}$$

     D'où contradiction. Ainsi, par élimination, on a montré que $u_n \to_{n\to+\infty} +\infty$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$u_{n+1} - u_n = u_n e^{1/u_n} - u_n$$

On applique le DL $e^X = 1 + X + o(X)$ à $X := \dfrac{1}{u_n} \to_{n\to+\infty} 0$ (puisque $u_n \to_{n\to+\infty} +\infty$).

On en déduit, quand $n \to +\infty$:

$$u_{n+1} - u_n = u_n\left(1 + \frac{1}{u_n} + o\left(\frac{1}{u_n}\right)\right) - u_n = 1 + o\,(1)$$

En particulier, on a $u_{n+1} - u_n \to_{n\to+\infty} 1$.
Par le lemme de l'escalier, on en déduit que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n \times 1 = n$.

7. • – On a $u_0 = 1 > 0$, et par récurrence immédiate, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.
   – Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{n}{(n+1)u_n^2} > 0\,, \quad \text{car} \quad u_n > 0.$$

   Ainsi, la suite u est croissante. Par le théorème de la limite monotone, on en déduit que u converge ou diverge vers $+\infty$.
   Supposons par l'absurde qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \to_{n\to+\infty} \ell$. Par croissance de la suite, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_0 \leqslant u_n$, donc par passage à la limite, on en déduit que $0 < u_0 \leqslant \ell$ et donc $0 < \ell$.
   Comme $\dfrac{n}{n+1} \to_{n\to+\infty} 1$, par passage à la limite dans l'égalité $u_{n+1} = u_n + \dfrac{n}{(n+1)u_n^2}$, on obtient :

$$\ell = \ell + \frac{1}{\ell^2}\,, \quad \text{donc} \quad \frac{1}{\ell^2} = 0 \ : \ \text{absurde.}$$

   On en déduit que $u_n \to_{n\to+\infty} +\infty$.

• Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1}^3 - u_n^3 = \left(u_n + \frac{n}{(n+1)u_n^2}\right)^3 - u_n^3 = u_n^3\left(1 + \frac{n}{(n+1)u_n^3}\right)^3 - u_n^3$$

On applique $(1+X)^3 = 1 + 3X + o(X)$ à $\dfrac{n}{(n+1)u_n^3} \to_{n\to+\infty} 0$ (car $u_n \to_{n\to+\infty} +\infty$):

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= u_n^3\left(1 + \frac{3n}{(n+1)u_n^3} + o\left(\frac{n}{(n+1)u_n^3}\right)\right) - u_n^3 \\ &= \frac{3n}{n+1} + o\left(\frac{n}{n+1}\right) \end{aligned}$$

On en déduit que $v_{n+1} - v_n \to_{n\to+\infty} 3$. Par le lemme de l'escalier, on en déduit que $v_n \sim 3n$. Comme $v_n = u_n^3$, on a donc $u_n \sim (3n)^{1/3}$.

8. Tout d'abord, la suite (u_n) est bien définie. Déterminons sa limite (dont on a besoin puisqu'il nous faudra effectuer un DL). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a:

$$u_{n+1} - u_n = e^{-u_n} > 0 \ : \quad \text{donc } u \text{ est croissante}$$

Par le théorème de la limite monotone, soit (u_n) converge, soit elle diverge vers $+\infty$.

Supposons par l'absurde qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \to_{n\to+\infty} \ell$. On a, par passage à la limite,

$$\ell = \ell + e^{-\ell} \text{ , donc } \quad e^{-\ell} = 0 \text{ : absurde}$$

Ainsi, on en déduit que $u_n \to_{n\to+\infty} +\infty$.

Appliquons désormais le travail préparatoire décrit dans l'énoncé. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = e^{-u_n}$$

L'équation différentielle analogue est $f' = e^{-f}$, c'est-à-dire $\left(e^f\right)' = 1$.

On comprend qu'il convient alors de poser la suite v définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par: $v_n = e^{u_n}$ (et il est crédible de penser que $v_{n+1} - v_n$ va tendre vers 1). On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} - v_n = e^{u_{n+1}} - e^{u_n} = e^{u_n + e^{-u_n}} - e^{u_n} = e^{u_n}\left(e^{e^{-u_n}} - 1\right)$$

On utilise le DL $e^X = 1 + X + o(X)$ à $X = e^{-u_n}$ qui tend vers 0 car $u_n \to_{n\to+\infty} +\infty$.

On a donc :

$$v_{n+1} - v_n = e^{u_n}\left(1 + e^{-u_n} + o(e^{-u_n}) - 1\right) = 1 + o(1)$$

On a donc notamment (comme attendu!) $v_{n+1} - v_n \to_{n\to+\infty} 1$.

D'après le lemme de l'escalier, on a alors $v_n \sim n$, c'est-à-dire $e^{u_n} \sim n$.

On a donc $e^{u_n} = n + o(n)$, ce qui implique :

$$u_n = \ln(n + o(n)) = \ln(n) + \ln(1 + o(1)) = \ln(n)\left(1 + \frac{o(1)}{\ln(n)}\right)$$

En particulier, $u_n \sim \ln(n)$.

9. • On a $u_0 = 1 \neq -1$, et par récurrence immédiate, on montre que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et donc en particulier $u_n \neq -1$. Ainsi, (u_n) est bien définie. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{(1+u_n)^2} \leqslant \frac{1}{(1+0)^2} = 1$$

D'où $u_{n+1} \leqslant u_n$.
La suite u est donc décroissante.
Comme (u_n) est de plus minorée (par 0), par le théorème de la limite monotone, il existe $\ell \in \mathbb{R}_+$ tel que $u_n \to_{n\to+\infty} \ell$.
On a alors, par passage à la limite dans la relation $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{(1+u_n)^2}$:

$$\ell = \frac{\ell}{(1+\ell)^2}$$

$$\text{donc: } \quad \frac{\ell(1+\ell)^2 - \ell}{(1+\ell)^2} = 0$$

$$\text{donc: } \quad \frac{\ell^2(2+\ell)}{(1+\ell)^2} = 0$$

$$\text{donc: } \quad \ell = 0 \quad \text{ou} \quad \ell = -2 \quad \text{(2ème cas impossible car } u_n \geqslant 0)$$

On a donc $u_n \to_{n\to+\infty} 0$.

- On commence par calculer la limite de la suite. On a $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante et par unicité de la limite, on montre que $u_n \to 0$. On n'a donc aucune chance de pouvoir conclure directement (si $u_n \sim n\lambda$ avec $\lambda \neq 0$, $u_n \to +\infty$). On va donc poser $w_n = \frac{1}{u_n}$ qui, elle, tend vers $+\infty$. Regardons la relation de récurrence vérifiée par cette suite:

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= \frac{1}{u_{n+1}} \\ &= \frac{(1+u_n)^2}{u_n} \\ &= w_n\left(1+\frac{1}{w_n}\right)^2 \end{aligned}.$$

On a donc

$$w_{n+1} - w_n = 2 + \frac{1}{w_n},$$

avec $2+\frac{1}{w_n} \sim 2$ donc l'équation différentielle est $f' = 2$. On pose donc $v_n = 2w_n = \frac{2}{u_n}$. On a

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{2}{u_{n+1}} - \frac{2}{u_n} \\ &= \frac{2(1+u_n)^2}{u_n} - \frac{2}{u_n} \\ &= \frac{2}{u_n}\left((1+u_n)^2 - 1\right) \\ &= \frac{2}{u_n}\left(2u_n + u_n^2\right) \\ &= 4 + 2u_n \end{aligned}$$

On en déduit que $v_{n+1} - v_n \to 4$ donc $v_n \sim_{n\to+\infty} 4n$ puis $u_n \sim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n}$.

Remarque: On peut s'éviter de passer par l'équation différentielle dès que l'on a $w_{n+1}-w_n \to 2$ car, d'après le lemme de l'escalier, cela nous donne $w_n \sim 2n$ puis $u_n \sim \frac{1}{2n}$.

Partie III: Pour aller plus loin

10. Soit f admettant en 0 le DL $f(x) = x - ax^{p+1} + o(x^{p+1})$ avec $a > 0$ et $p > 0$. On considère la suite $u_{n+1} = f(u_n)$ et on suppose que $u_n \to 0$.

   (a) On a

$$\begin{aligned} \frac{1}{u_{n+1}^p} - \frac{1}{u_n^p} &= \frac{1}{\left(u_n - apu_n^{p+1} + o\left(u_n^{p+1}\right)\right)^p} - \frac{1}{u_n^p} \\ &= \frac{1}{u_n^p}\left((1 - au_n^p + o(u_n^p))^{-p} - 1\right) \\ &= \frac{1}{u_n^p}\left(1 + apu_n^p + o(u_n^p) - 1\right) \text{ en faisant un DL de } (1+x)^{-p} \\ &= ap + o(1) \end{aligned}$$

   On a donc bien $\frac{1}{u_{n+1}^p} - \frac{1}{u_n^p} \to ap$.

   (b) En appliquant le lemme de l'escalier, on en déduit que $\frac{1}{u_n^p} \sim nap$ puis $u_n \sim \left(\frac{1}{nap}\right)^{1/p}$.

   (c) On considère la suite définie par $x_0 > 0$ et $x_{n+1} = x_n + e^{-x_n}$.

i. On va appliquer le résultat précédent à $y_n = e^{-x_n}$. En effet, on a $x_{n+1} - x_n > 0$ donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante et, par unicité de la limite, (x_n) ne peut converger donc elle tend vers $+\infty$. La suite (y_n) tend donc vers 0 $y_{n+1} = e^{-x_{n+1}} = e^{-x_n - e^{-x_n}} = e^{-x_n}e^{-e^{-x_n}} = y_n e^{-y_n}$. On pose donc $f : x \mapsto xe^{-x}$ puisque $y_{n+1} = f(y_n)$. On a $f(x) = x(1 - x + o(x)) = x - x^2 + o(x^2)$. On est donc bien dans le cas précédent avec $a = 1$ et $p = 1$. On peut donc affirmer que $y_n \sim \frac{1}{n}$.

ii. D'après la question précédente, on a $e^{-x_n} \sim \frac{1}{n}$ donc $e^{-x_n} = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

On a donc

$$-x_n = \ln\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \ln\left(\frac{1}{n}\right) + \ln\left(1 + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right).$$

On en déduit $-x_n \sim_{+\infty} -\ln(n)$ puis $x_n \sim_{+\infty} \ln(n)$

11. Considérons la suite définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \frac{2n+1}{n+1}u_n$.

(a) On a $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante donc par le théorème de convergence monotone, elle admet une limite. Par unicité de la limite, si (u_n) converge, elle tend vers 0. Or la limite ne peut être nulle car $u_0 > 0$ donc $u_n \to +\infty$. On pose $v_n = \ln(u_n)$ puisque l'on cherche un équivalent de $\ln(u_n)$. On a $v_{n+1} - v_n = \ln\left(\frac{2n+1}{n}\right) \to \ln(2)$. On a donc, d'après le lemme de l'escalier, $v_n \sim n\ln(2)$ donc $\ln(u_n) \sim n\ln(2)$.

(b) On va raisonner par équivalence :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{u_n}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge } &\Leftrightarrow \left(\ln\left(\frac{u_n}{2^n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge}\\
&\Leftrightarrow (\ln(u_n) - n\ln(2))_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge}\\
&\Leftrightarrow \text{ la série } \sum\left((\ln(u_{n+1}) - (n+1)\ln(2)) - (\ln(u_n) - n\ln(2))\right) \text{ converge}\\
&\Leftrightarrow \text{ la série } \sum\left(\ln\left(\frac{2n+1}{n}\right) - \ln(2)\right) \text{ converge}
\end{aligned}$$

Or,

$$\ln\left(\frac{2n+1}{n}\right) - \ln(2) = \ln\left(\frac{n+1/2}{n+1}\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{2(n+1)}\right).$$

On a donc bien montré que $\left(\frac{u_n}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si la série de terme général $\ln\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)$ converge.

(c) On sait que la série de terme général $\ln\left(1 - \frac{1}{2(n+1)}\right)$ diverge car son terme général positif est équivalent que terme général d'une série divergente (la série harmonique). On en déduit que la suite $\left(\frac{u_n}{2^n}\right)$ ne converge pas. Il n'existe donc pas de réel λ tel que $u_n \sim \lambda 2^n$.

(d) On a vu à la question précédente que la série de terme général $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{2^{n+1}}\right) - \ln\left(\frac{u_n}{2^n}\right)$ était divergente et que son terme général était équivalent à $-\frac{1}{2n}$. Quitte à considérer les opposés, on peut appliquer le résultat de la première partie et déduire que les sommes partielles de ces deux séries sont équivalentes. La première série est télescopique, sa somme partielle d'ordre n est équivalente à $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{2^{n+1}}\right)$. La deuxième série est, à un coefficient multiplicateur $-\dfrac{1}{2}$ près, la série harmonique. On sait donc que la somme partielle de cette série est équivalente à $-\dfrac{1}{2}\ln(n)$. Ainsi, on a $\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{2^{n+1}}\right) \sim -\dfrac{1}{2}\ln(n)$. Comme $\ln(n+1) \sim_{+\infty} \ln(n)$, on obtient $\ln\left(\dfrac{u_n}{2^n}\right) \sim -\dfrac{1}{2}\ln(n)$ donc $w_n = -\dfrac{1}{2}\ln(n)$.

(e) On pose $v_n = \dfrac{u_n}{2^n}e^{-w_n} = \dfrac{u_n\sqrt{n}}{2^n}$. On raisonne à nouveau par équivalence avec les séries :

$$\begin{aligned}(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge} &\Leftrightarrow (\ln(v_n))_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge}\\ &\Leftrightarrow \text{ la série } \sum \ln(v_{n+1}) - \ln(v_n) \text{ converge}\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n) &= \ln\left(1 - \frac{1}{2(n+1)}\right) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)\\ &= -\frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{4(n+1)^2} - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{(n+1)} - \frac{1}{2(n+1)^2}\right) + o\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)\\ &= o\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)\end{aligned}$$

La série de terme général $\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n)$ est donc convergente. On en déduit que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

(f) D'après la question précédente, on sait qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $v_n \to \lambda$. De plus, on a montré que $(\ln(v_n))$ converge donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel strictement positif par continuité de l'exponentielle. On en déduit que u_n admet un équivalent de la forme $\lambda\dfrac{\alpha 2^n}{\sqrt{n}}$.