Correction du TD n 25

Correction 1 1. $D = \mathbb{R}^2$ est un ouvert et un fermé, il est non borné.

2. $D = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ est non ouvert, fermé, non borné. Il n'est pas ouvert car aucune boule centrée en $(0,1)$ (par exemple) n'est incluse dans $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$.
Soit $(a,b) \notin \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$.

   - Si $a = 0$, alors $b < 0$. On pose $\epsilon = \dfrac{|b|}{2}$, alors pour tout $(x,y) \in B((a,b),\epsilon)$, la deuxième coordonnée est strictement négative donc la boule est incluse dans $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$. Si $a < 0$, on considère la boule centrée en (a,b) de rayon $\dfrac{|a|}{2}$ dont les éléments ont une première coordonnée strictement négative donc la boule est incluse dans $R^2 \setminus \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$. On a bien montré que $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ est un fermé.
   On peut aussi dire que $D = f^{-1}(\{0\})$ avec $f : (x,y) \mapsto (x-|x|)^2 + (y-|y|)^2$ qui est continue.

3. $D = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+_*$ n'est pas ouvert car $B((0,1),\epsilon)$ n'est jamais incluse dans D, il n'est pas fermé car $B((1,0),\epsilon)$ n'est jamais incluse dans $R^2 \setminus D$ et non borné.

4. $D = \{(x,y) \,|\, x \geqslant 0, y \geqslant 0, x+y \leqslant 1\}$ est fermé borné et non ouvert. En effet, il est inclus dans $B((0,0),2)$ donc borné. Il est non ouvert car aucune boule ouverte centrée en $(1,0)$ (par exemple) n'est incluse dans D. Montrons que son complémentaire est ouvert. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus D$.

   - Si $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, alors d'après un cas traité précédemment, on sait qu'on peut trouver une boule ouverte incluse dans $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ car c'est un ouvert. On a donc une boule ouverte incluse dans $R^2 \setminus D$.
   - Si $(a,b) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, alors $a+b > 1$. On prend $\epsilon = \dfrac{a+b-1}{2}$. Montrons que pour tout $(x,y) \in B((a,b),\epsilon)$, on a $x+y > 1$.
   On a
   $$x - a \in]-\epsilon, \epsilon[\text{ et } y - b \in]-\epsilon, \epsilon[$$
   donc
   $$x + y > a + b - 2\epsilon > 1$$
   On a bien $B((a,b),\epsilon) \subset \mathbb{R}^2 \setminus D$ qui est un ouvert. Par conséquent D est fermé.

5. $D = \{(x,y) \,|\, x^2 + y^2 < 5\}$ est ouvert car c'est une boule ouverte, elle est non fermée car toute boule ouverte centrée en $(\sqrt{5},0)$ intersecte D et n'est donc pas incluse dans son complémentaire, et bornée car incluse dans $B((0,0),3)$.

6. $D = \{(x,y) \,|\, 2x + 3y \leqslant 1\}$ est non ouvert car toute boule centrée en $(2,-1)$ intersecte D et n'est donc pas incluse dans son complémentaire. C'est un fermé car si $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus D$, alors $2a + 3b > 1$ et en posant $\epsilon = \dfrac{2a+3b-1}{2}$, on a $B((a,b),\epsilon) \subset \mathbb{R}^2 \setminus D$. C'est un ensemble non borné car pour tout entier n, $(3n+2, -2n-1) \in D$.
On peut aussi dire que $D = f^{-1}(-\infty, 1])$ avec $f : (x,y) \mapsto 2x + 3y$ continue. C'est donc l'image réciproque d'un fermé par une fonction continue donc un fermé. Son complémentaire est, lui, l'image réciproque d'un ouvert donc ouvert.

Correction 2 1. Soit $p \in \bigcup_{i \in I} U_i$. On peut donc trouver $i_0 \in I$ tel que $p \in U_{i_0}$.
Comme U_{i_0} est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, on peut trouver $r > 0$ tel que $D(p,r) \subset U_{i_0}$.
A fortiori, on a donc $D(p,r) \subset \bigcup_{i \in I} U_i$, ce qui conclut.

2. Soit $p \in U \cap V$. On a donc $p \in U$ et $p \in V$.
Comme U est ouvert, on peut trouver $r' > 0$ tel que $D(p,r') \subset U$. De même, on peut trouver $r'' > 0$ tel que $D(p,r'') \subset U$.
Posons $r = \min\{r', r''\} > 0$. On a donc les inclusions $D(p,r) \subset D(p,r') \subset U$ et, de même, $D(p,r) \subset D(p,r'') \subset V$, donc $D(p,r) \subset U \cap V$, ce qui conclut.

3. On montre comme dans le cours que, pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $b \in \mathbb{R}$, les demi-plans :
$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y > a\} \qquad \text{et} \qquad \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y < b\}$$
sont des ouverts de $\mathbb{R}^2$.
D'après la question précédente, il en va de même de leur intersection :
$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y > a\} \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y < b\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, a < y < b\}.$$
En appliquant cette propriété à $a = -\frac{1}{n}$ et $b = \frac{1}{n}$, on obtient que U_n est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
En revanche, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} U_n = \{(x,0), x \in \mathbb{R}\}$ n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}^2$ car aucune boule ouverte n'est totalement inclus dans cet ensemble.

Correction 3 1. On procède par disjonction de cas:

- Si $a + b = 2$, on a $f(x,x) = \dfrac{1}{2}$ donc f n'est pas continue en $(0,0)$.

- Si $a+b<2$, alors $f(x,x)=\dfrac{x^{a+b}}{2x^2}$ n'admet pas de limite finie quand x tend vers 0.
- Si $a+b>2$, alors $|f(x,y)| \leqslant \dfrac{||(x,y)||^{a+b}}{||(x,y)||^2} = ||(x,y)||^{a+b-2}$. Ainsi f est lipschitzienne donc continue en $(0,0)$.

On en déduit que f est continue en $(0,0)$ ssi $a+b>2$.

2. On suppose $a=b=1$. On a
$$\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=0,$$
pour tout $h\neq 0$ donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$. Il en est de même pour la dérivée partielle selon y.

Correction 4 En tout point (x,y) avec $x\neq y$, on a F continue. Soit $x\in\mathbb{R}$, montrons que F est continue en (x,x). Soit donc (a,b) dans $\mathbb{R}^2$ avec $a\neq b$. D'après le théorème des accroissements finis, on sait qu'il existe c strictement compris entre a et b tel que
$$\frac{f(a)-f(b)}{a-b}=f'(c).$$
Lorsque (a,b) tend vers (x,x), on a $c\to x$. Or, f' est continue puisque f est C^1. On a donc $f'(c)\to f'(x)$ ce qui montre que F est continue en (x,x).

Correction 5 On applique la formule du cours :
$$a'(x)=\frac{\partial F}{\partial x}(x,x)+\frac{\partial F}{\partial y}(x,x)$$
On écrit $b(x)=F(x,a(x))$, on a donc
$$b'(x)=\frac{\partial F}{\partial x}(x,a(x))+a'(x)\frac{\partial F}{\partial y}(x,a(x)),$$
autrement dit :
$$b'(x)=\frac{\partial F}{\partial x}(x,F(x,x))+\left(\frac{\partial F}{\partial x}(x,x)+\frac{\partial F}{\partial y}(x,x)\right)\frac{\partial F}{\partial y}(x,F(x,x)),$$
On a
$$\frac{\partial c}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial F}{\partial y}(y,x) \text{ et } \frac{\partial c}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial F}{\partial x}(y,x).$$
On remarque que $d(x,y)=F(y,a(x)$, on a donc
$$\frac{\partial d}{\partial x}(x,y)=a'(x)\frac{\partial F}{\partial y}(y,a(x)) \text{ et } \frac{\partial d}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial F}{\partial x}(y,a(x))$$

Correction 6
- L'application partielle $\nu_1 : x\mapsto N(x,0)=|x|$ n'étant pas dérivable en 0, la fonction N n'admet pas de première dérivée partielle en 0. Il en va de même pour la deuxième dérivée partielle.
- L'application $N^2 : (x,y)\mapsto x^2+y^2$ appartient clairement à $C^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$, par opérations, avec :
$$\forall (a,b)\in\mathbb{R}^2,\ \frac{\partial (N^2)}{\partial x}(a,b)=2a \quad \text{et} \quad \frac{\partial (N^2)}{\partial y}(a,b)=2b.$$
Il s'ensuit que sa restriction à $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ est encore de classe C^1. Elle est par ailleurs à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.
Par composition, la fonction racine carrée étant de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit que la restriction de $N=\sqrt{N^2}$ à $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ est de classe C^1, avec :
$$\forall (a,b)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\},\ \frac{\partial N}{\partial x}(a,b)=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial N}{\partial y}(a,b)=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Correction 7 On a $(u,v)=(2x+y,3x+y)$ donc $(x,y)=(v-u,3u-2v)$. On pose $F(u,v)=f(v-u,3u-2v)$. On a
$$\frac{\partial F}{\partial u}=-\frac{\partial f}{\partial x}(v-u,3u-2v)+3\frac{\partial f}{\partial y}(v-u,3u-2v)=0$$
On en déduit que f est solution de (E) si et seulement si il existe une fonction $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telle que
$$F(u,v)=h(v)=f(v-u,3u-2v),$$
soit
$$f(x,y)=h(3x+y)$$
avec h de classe $\mathcal{C}^1$. Ainsi, les solutions sont les fonctions de la forme
$$f(x,y)=h(3x+y),$$
avec h de classe $\mathcal{C}^1$.

Correction 8 On pose $g(r,\theta)=f(r\cos\theta,r\sin\theta)$. On a
$$\frac{\partial g}{\partial \theta}=-r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta,r\sin\theta)+r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta,r\sin\theta).$$
On a donc f solution de l'équation si et seulement si $\dfrac{\partial g}{\partial\theta}=-g(r,\theta)$. On sait que les solutions de cette équation sont de la forme $g(r,\theta)=\lambda(r)e^{-\theta}$. On en déduit que les solutions de l'équation sont les fonctions $f:(x,y)\mapsto\lambda(x^2+y^2)e^{-\arctan(y/x)}$ avec λ une fonction de classe C^1.

Correction 9 Soit y une solution de l'équation.

On a $(x,y) = \left(\frac{1}{2}(u+v), \frac{1}{2c}(u-v)\right)$, on pose $f(u,v) = y\left(\frac{1}{2}(u+v), \frac{1}{2c}(u-v)\right)$. On a

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{1}{2}\frac{\partial y}{\partial x}\left(\frac{1}{2}(u+v), \frac{1}{2c}(u-v)\right) + \frac{1}{2c}\frac{\partial y}{\partial t}\left(\frac{1}{2}(u+v), \frac{1}{2c}(u-v)\right),$$

puis

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{2c}\frac{\partial^2 y}{\partial t \partial x}\right) + \frac{1}{2c}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 y}{\partial t \partial x} - \frac{1}{2c}\frac{\partial y^2}{\partial t^2}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{\partial y^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial y^2}{\partial t^2}\right) \\ &= 0\end{aligned}$$

On en déduit qu'il existe F et G de classe C^2 telles que

$$f(u,v) = F(u) + G(v),$$

puis

$$y(x,t) = F(x+ct) + G(x-ct).$$

Réciproquement, une fonction de cette forme est bien solution de l'EDP.

Correction 10 On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{y}\varphi'\left(\frac{x}{y}\right)$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}\varphi'\left(\frac{x}{y}\right)$$

On en déduit que f vérifie l'équation suivante :

$$y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) + x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0.$$

Correction 11

1. On a $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^y + ye^x$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = xe^y + e^x$.
2. L'équation du plan tangent est donné par

$$z = f(0,0) + x\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + y\frac{\partial f}{\partial y} = x + y.$$

Correction 12

1. On a $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 2y - x^2 \neq 0\}$.
2. L'application $(x,y) \mapsto 2y - x^2$ est continue car polynomiale et D_f et l'image réciproque de l'ouvert $\mathbb{R}^\star$ par cette fonction continue donc c'est un ouvert.
3. On a $f(x,y) = 1 \Leftrightarrow 2y - x^2 = y^2 \Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 = 1$. La courbe de niveau est donc le cercle de centre $(0,1)$ et de rayon 1.
4. On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2xy^2}{(2y-x^2)^2} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2y^2 - 2yx^2}{(2y-x^2)^2},$$

donc le DL1 est :

$$f(x,y) = \frac{9}{2} + 9(x-2) - \frac{3}{2}(y-3) + o\left(||(x-2, y-3)||\right)$$

En négligeant le $o(\ )$, on obtient

$$f(2.2,\ 2.9) \simeq \frac{9}{2} + 9(2.2-2) - \frac{3}{2}(2.9-3) \text{ donc } f(2.2,\ 2.9) \simeq 6.15$$

Correction 13 Il y a un unique point critique $(1,0,0)$ et $h(1,0,0) = -2$. On écrit

$$h(u,v,w) = 2(u-1)^2 - 2 + v^2 + w^2 \geqslant -2.$$

On en déduit que h admet un minimum global en $(1,0,0)$ qui vaut -2.

La fonction n'est pas majorée car $f(0,n,0) \to +\infty$.

Correction 14 Le seul point critique est $(0,0)$ avec $f(0,0) = 0$ et pour tout $\epsilon > 0$, $f(\epsilon,0) > 0$, $f(0,-\epsilon) < 0$ donc $(0,0)$ n'est pas un extremum local. Par ailleurs, $f(0,-n) \to -\infty$ et $f(n,0) \to +\infty$ donc f n'est ni majorée ni minorée.

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x} = -y^3 - 1 \\ \frac{\partial g}{\partial y} = -3xy^2 \end{cases}$$

le seul point critique est $\left(\frac{1}{3}, -1\right)$. On a $g\left(\frac{1}{3}, -1\right) = -1$ et

$$\begin{aligned} g\left(\frac{1}{3} + h_1, -1 + h_2\right) &= -1 + h_2 - \left(\frac{1}{3} + h_1\right)(-1+h_2)^3 - \frac{1}{3} - h_1 \\ &= -1 + h_2 - \left(\frac{1}{3} + h_1\right)\left(-1 + 3h_2 - 3h_2^2 + h_2^3\right) - \frac{1}{3} - h_1 \\ &= -1 + h_2^2 - \frac{h_2^3}{3} - 3h_1h_2 + 3h_1h_2^2 - h_1h_2^3 \end{aligned}$$

$g(0,0) = 0$, $g(2,0) = -2$ donc ce n'est ni un minimum global ni un max

Correction 15

Correction 16 1. On a $|f(x,y)| \leqslant ||(x,y)||^{1/2}$ donc f est continue en $(0,0)$. Elle est continue ailleurs en tant que quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.

2. Elle admet des dérivées partielles en dehors de $(0,0)$. On a $\dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \dfrac{1}{|h|^{1/2}}$ donc f n'admet pas de dérivée partielle selon x en $(0,0)$ (mais elle admet une dérivée partielle selon y égale à 0.)

Correction 17 On utilise le TAF. Pour tout $(x,y) \neq (0,0)$, il existe $c \in]0, x^2+y^2[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(x^2+y^2)-f(0)}{x^2+y^2}$. Lorsque (x,y) tend vers $(0,0)$, c tend vers 0 et, par continuité de f', on a donc $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y) = f'(0)$.

Correction 18 La fonction F_1 est continue pour tout $(x,y) \neq (0,0)$. Lorsque $(x,y) \to (0,0)$, on a $x^2+y^2 \to 0$. On écrit :

$$|F_1(x,y)| \leqslant \left(\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right)^2 \ln(x^2+y^2),$$

et par le thm de croissances comparées, on a $F_1(x,y) \to 0$ et F_1 est bien continue en $(0,0)$.

Lorsque $(x,y) \neq (0,0)$, les dérivées partielles existent et valent :

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}(x,y) = 2xy^2\ln(x^2+y^2) + \frac{2x^3y^2}{x^2+y^2},$$

et

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) = 2yx^2\ln(x^2+y^2) + \frac{2y^3x^2}{x^2+y^2}.$$

On forme les taux d'accroissements en $(0,0)$:

$$\frac{F_1(h,0)-F_1(0,0)}{h} = 0 = \frac{F_1(0,h)-F_1(0,0)}{h}.$$

On en déduit que les dérivées partielles en $(0,0)$ existent.

Pour montrer la continuité, on détermine les limites $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\partial F_1}{\partial x}(x,y)$ et $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\partial F_1}{\partial y}(x,y)$. On a $\left|2xy^2\ln(x^2+y^2)\right| \leqslant (x^2+y^2)^{3/2}\ln(x^2+y^2)$ donc On a $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} 2xy^2\ln(x^2+y^2) = 0$ et $\left|2x^3y^2\right| \leqslant \dfrac{1}{2}(x^2+y^2)^{5/2}$ donc

$$\left|\frac{2x^3y^2}{x^2+y^2}\right| \leqslant \frac{1}{2}(x^2+y^2)^{3/2}$$

ce qui montre $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\partial F_1}{\partial x}(x,y) = 0$. On en déduit que $\dfrac{\partial F_1}{\partial x}$ est continue en $(0,0)$. La continuité de l'autre dérivée partielle se montre de la même manière, par symétrie des expressions.

Correction 19 On a $(x,y) = (3u-v, v-2u)$. On pose $F(u,v) = f(3u-v, v-2u)$. Si f est solution de (E) alors F vérifie

$$\frac{\partial F}{\partial x} = f(3u-v, v-2u) = F(u,v),$$

donc il existe h de classe $\mathcal{C}^1$ telle que

$$F(u,v) = \lambda(v)e^u.$$

Réciproquement, si h est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$f(x,y) = \lambda(2x+3y)e^{x+y},$$

alors f est bien solution de (E) et f de classe $\mathcal{C}^1$.

Correction 20 Soit f une solution. On pose $g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$. On a $\dfrac{\partial g}{\partial r} = \cos\theta\dfrac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta\dfrac{\partial f}{\partial y}$ donc $r\dfrac{\partial g}{\partial r} = r^2$. On en déduit que g est de la forme $g(r,\theta) = \dfrac{r^2}{2} + c(\theta)$ avec c de classe $\mathcal{C}^1$.

Réciproquement, si $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{2} + \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)$, alors

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x - \frac{y}{x^2+y^2}c'\left(\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right),$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x + \frac{x}{x^2+y^2}c'\left(\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right).$$

On a donc bien f solution de l'équation.

Correction 21 On pose $g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$. On a

$$\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = \cos\theta\frac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial f}{\partial y},$$

donc f est solution de (E) si et seulement si

$$r\frac{\partial g}{\partial r}) = r.$$

On en déduit que $g(r,\theta) = r + \lambda(\theta)$. Ainsi, les solutions sont les fonctions de la forme

$$f : (x,y) \mapsto \sqrt{x^2+y^2} + \lambda\left(\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right)$$

avec λ de classe C^1.

Correction 22 1. En intégrant la première équation, on trouve $f(x,y) = e^{xy} + 3x + c(y)$ et en injectant dans la deuxième, on doit avoir $c = cste$ donc

$$f(x,y) = e^{xy} + 3x + c, c \in \mathbb{R}$$

2. Si f est solution, alors f est de classe C^2 donc les dérivées croisées devraient être égales ce qui n'est pas le cas, il n'y a donc pas de solution.

3. On intègre la première équation, on trouve $f(x,y) = e^x y + c(y)$ puis en injectant dans la deuxième, on obtient $c'(y) = 2y$ donc les solutions sont

$$f(x,y) = e^x y + y^2 + c, c \in \mathbb{R}.$$

4. On intègre la première équation,on trouve $f(x,y) = e^x + \sin(xy) + c(y)$ puis en injectant dans la deuxième, on trouve $c = cste$ donc

$$f(x,y) = e^x + \sin(xy) + c, c \in \mathbb{R}.$$

Correction 23 1. On a $(u,v) = (x+y, 2x+3y)$ donc $(x,y) = (3u-v, v-2u)$. On pose $g(u,v) = f(3u-v, v-2u)$. On a f solution si et seulement si $\dfrac{\partial g}{\partial u} = 0$ donc $g(u,v) = c(v)$. On en déduit que les solutions sont les fonctions de la forme $f : (x,y) \mapsto c(2x+3y)$ avec c une fonction C^1.

2. On pose $g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$.
On a f solution si et seulement si $\dfrac{\partial g}{\partial \theta} = 0$ donc $g = c(r)$. On en déduit que les solutions sont les fonctions de la forme $f : (x,y) \mapsto c\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ avec c une fonction C^1.

3. On a $(u,v) = (x, y-x)$ donc $(x,y) = (u, u+v)$. On pose $g(u,v) = f(u, u+v)$. On a f solution si et seulement si $\dfrac{\partial g}{\partial u} = g$ donc $g = \lambda(v)e^u$. On en déduit que les solutions sont les fonctions de la forme $(x,y) \mapsto \lambda(y-x)e^x$ avec λ C^1.

4. On pose $g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$. On a f solution ssi $\dfrac{\partial g}{\partial r} = 1$ donc $g(r,\theta) = r + c(\theta)$. les solutions sont donc les fonctions de la forme $(x,y) \mapsto \sqrt{x^2+y^2} + c(\arctan(y/x))$ avec c une fonction C^1.

Correction 24 1. On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2(x+y-2) + (2x-y)exp(x^2-2y^2-xy)$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2(x+y-2) - (4y+x)exp(x^2-2y-xy)$$

On a $f(2,1) = 2$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(2,1) = 5$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(2,1) = -4$. Le DL1 s'écrit :

$$f(x,y) = 2 + 5(x-2) - 4(y-1) + o\left(||(x-2, y-1)||\right)$$

2. Le plan tangent a pour équation $z = 2 + 5(x-2) - 4(y-1)$

Correction 25 1. $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y \neq 2x^2\}$, image réciproque de l'ouvert $\mathbb{R}^\star$ par une fonction continue donc ouvert.

2. C_1 correspond au graphe de $x \mapsto 3x^2$ privé de $(0,0)$. $C_{-1/2}$ est la droite $y = 0$ privée du point $(0,0)$ et C_0 est la droite $x = 0$ privée de $(0,0)$.

3. On a $\partial f(x,y) = \left(\dfrac{2xy}{(y-2x^2)^2}, \dfrac{-x^2}{(y-2x^2)^2}\right)$.

4. On a $f(1,1) = 1$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 2$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1) = -1$ donc le DL1 est

$$f(x,y) = 1 + 2(x-1) - (y-1) + o\left(||(x-1, y-1)||\right)$$

On en déduit, en négligeant le $o(\ )$:

$$f(0.9, 1.1) \simeq 0.7$$

Correction 26 1. $f(x,x) = 2x^3$ et $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x,x) = \pm\infty$ donc f n'est ni majorée ni minorée.

2. $f(x,y) = (x-y)^2 + x^4 + y^4 \geqslant 0$ donc f admet un minimum global en $(0,0)$ égal à 0. On a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x,x) = +\infty$ donc f est non majorée.

3. On commence par chercher les points critiques, on cherche donc les points (x,y) vérifiant $y^2 + 2xy + 2x - 1 = 0 = x^2 + 2xy + 2y - 1$. Si (x,y) est un point critique, on a $y^2 + 2x = x^2 + 2y$ donc $(y-1)^2 = (x-1)^2$ ce qui impose $x = y$. Or $x^2 + 2x^2 + 2x - 1 = 0$ implique $x = -1$ ou $x = \dfrac{1}{3}$ donc l'unique point critique est $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$ en lequel f vaut $\dfrac{9}{2}$. On remarque que f n'est pas majorée car $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x,x) = +\infty$, $\dfrac{9}{2}$ est donc son minimum.

4. On remarque que $f(x,x) = x^3 + \ln(1+x^2) \geqslant x^3$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x,x) = +\infty$ et f n'est pas majorée et $f(x,x) \leqslant x^3 + x^2$ avec $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 + x^3 = -\infty$ donc f n'est pas non plus minorée.

5. On a $f(x,x) = x^5 \left(1 - \dfrac{2x}{3}\right) \to -\infty$ quand $x \to +\infty$ donc f est non minorée et $f(-x,x) = x^5 \to +\infty$ quand $x \to +\infty$ donc f est non majorée.

6. On remarque tout d'abord que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x,x) = +\infty$ donc f est non majorée et elle est positive sur $\mathbb{R}_+^\star \times \mathbb{R}$. Les points critiques sont $(1,0)$ et $(e^{-2},0)$ et $f(1,0) = 0$ donc f admet un minimum global égal à 0.

7. On a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x,x) = +\infty$ donc f est non majorée. On cherche les points critiques, c'est-à-dire les solutions de

$$\begin{cases} 4x^3 - 4(x-y) & = 0 \\ 4y^3 + 4(x-y) = 0 \end{cases}$$

On doit avoir $x^3 = -y^3$ donc $x = -y$ puis $4x(x^2-2) = 0$ d'où trois points critiques $(0,0), (\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. On a $f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = (-\sqrt{2}, +\sqrt{2}) = -8$. On écrit ensuite

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^4 + y^4 - 2\,(x-y)^2 \\ &= x^4 - 2x^2 + y^4 - 2y^2 + 4xy \\ &= x^4 - 4x^2 + y^4 - 4y^2 + (\sqrt{2}x + \sqrt{2}y)^2 \\ &= (x^2-2)^2 + (y^2-2)^2 + (\sqrt{2}x + \sqrt{2}y)^2 - 8 \\ &\geqslant -8 \end{aligned}$$

f admet donc un minimum global égal à -8.

8. On a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x,x) = +\infty$ donc f est non majorée. On cherche les points critiques c'est-à-dire les solutions de

$$\begin{cases} 2xy^2 + 2x + 4y & = 0 \\ 2x^2y + 2y + 4x & = 0 \end{cases}$$

Si (x,y) est un point critique, alors

$$\begin{cases} x^2y + y = 2xy^2 + 4y \\ xy^2 + x = 2x^2y + 4x \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} y(x^2 - 2xy - 3) & = 0 \\ x(y^2 - 2xy - 3) & 0 \end{cases}$$

On remarque que $x = 0 \Leftrightarrow y = 0$ et si $xy \neq 0$, alors $x^2 = y^2$ donc $x = \pm y$. On réinjecte dans le système de départ. Pour $x = y$, on obtient $x = 0$. Pour $x = -y$, on obtient $x = 0$ ou $x = \pm 1$. On a donc 3 points critiques : $(0,0)$, $(1,-1)$ et $(-1,1)$. On a $f(0,0) = 0$ et $f(1,-1) = f(-1,1) = -1$. Par ailleurs,

$$f(x,y) = (xy+1)^2 - 1 + (x+y)^2 \geqslant -1,$$

donc f admet bien un minimum global égal à -1.

Correction 27 Soit $f \in C^0(U)$. Comme U est un ouvert non vide, il contient un disque ouvert $D(p,r)$, où $p = (a,b)$.

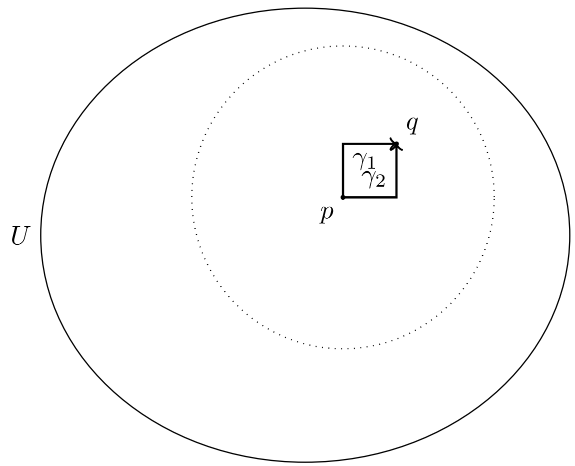
On considère les deux fonctions

$$\gamma_1 : \begin{cases} [0,1] & \longrightarrow & D(p,r) \\ t & \longmapsto & \begin{cases} (a+tr, b) & \text{si } t \leqslant \frac{1}{2} \\ \left(a + \frac{r}{2}, b + r\left(t - \frac{1}{2}\right)\right) & \text{si } t \geqslant \frac{1}{2}, \end{cases} \end{cases}$$

et

$$\gamma_2 : \begin{cases} [0,1] & \longrightarrow & D(p,r) \\ t & \longmapsto & \begin{cases} (a, b+tr) & \text{si } t \leqslant \frac{1}{2} \\ \left(a + r\left(t - \frac{1}{2}\right), b + \frac{r}{2}\right) & \text{si } t \geqslant \frac{1}{2}. \end{cases} \end{cases}$$

On vérifie facilement qu'il s'agit de deux fonctions continues de $[0,1] \to D(p,r)$ (on parle aussi de *chemins*) dont les images sont disjointes, à l'exception de leurs extrémités communes p et $q = \left(a + \frac{r}{2}, b + \frac{r}{2}\right) \neq p$.



- Si $f(p) = f(q)$, la fonction f n'est pas injective.

- Si $f(p) \neq f(q)$, on fixe y strictement compris entre $f(p)$ et $f(q)$.

– Par composition, l'application $f \circ \gamma_1$ est continue. Elle vaut $f(p)$ en 0 et $f(q)$ en 1. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, on peut donc trouver $t_1 \in [0,1]$ tel que $f(\gamma_1(t_1)) = y$.
  Comme y ne vaut ni $f(p)$ ni $f(q)$, on a nécessairement $t_1 \in]0,1[$.
– De la même façon, on trouve $t_2 \in]0,1[$ tel que $f(\gamma_2(t_2)) = y$.

D'après la remarque que nous avons faite sur les images de γ_1 et γ_2, on a donc $\gamma_1(t_1) \neq \gamma_2(t_2)$, alors que ces deux éléments ont la même image par f, à savoir y.

On en déduit que f n'est pas injective.

Correction 28 On travaille sur l'ouvert

$$U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x > 0, y > 0, x + y < 1\}$$

On détermine les points critiques, ce sont ceux dont les coordonnées vérifient

$$\begin{cases} y - 2xy - y^2 = 0 \\ x - x^2 - 2xy = 0 \end{cases}$$

L'unique point critique de U est $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

Soit $(h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$, alors

$$f\left(h_1 + \frac{1}{3}, h_2 + \frac{1}{3}\right) = f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3}\left(h_1^2 + h_2^2 + h_1h_2 + 3h_1h_2^2 + 3h_2h_1^2\right)$$

On a donc

$$f\left(h_1 + \frac{1}{3}, h_2 + \frac{1}{3}\right) - f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \sim -\frac{1}{3}\left(h_1^2 + h_2^2 + h_1h_2\right)$$

lorsque $||h||$ tend vers 0. Or $h_1^2 + h_2^2 + h_1h_2 = \left(h_1 + \frac{h_2}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}h_2^2 \geqslant 0$. On en déduit que, au voisinage de $(0,0)$, $f\left(h_1 + \frac{1}{3}, h_2 + \frac{1}{3}\right) - f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ est négatif donc f admet un maximum local en $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

La question est, ce maximum est-il global? On traduit le fait que $\left(\frac{1}{3} + h_1, \frac{1}{3} + h_2\right) \in T$, on a donc

$$\begin{cases} \frac{1}{3} + h_1 \geqslant 0 \\ \frac{1}{3} + h_2 \geqslant 0 \frac{2}{3} + h_1 + h_2 \leqslant 1 \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} 3h_1 \geqslant -1 \\ 3h_2 \geqslant -1 \\ 3h_1 + 3h_2 \leqslant 1 \end{cases}$$

Dans le cas où h_1h_2 est positif, on écrit

$$\begin{aligned} h_1^2 + h_2^2 + h_1h_2 + 3h_1h_2^2 + 3h_2h_1^2 &= h_1^2 + h_2^2 - h_1h_2 + h_1h_2\left(2 + 3h_1 + 3h_2\right) \\ &= \left(h_1 - \frac{h_2}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}h_2^2 + h_1h_2(2 + 3h_1 + 3h_2) \end{aligned}$$

et tous les termes sont positifs.

Si h_1h_2 est négatif, on écrit alors

$$\begin{aligned} h_1^2 + h_2^2 + h_1h_2 + 3h_1h_2^2 + 3h_2h_1^2 &= h_1^2 + h_2^2 + 2h_1h_2 - h_1h_2 + 3h_1h_2^2 + 3h_2h_1^2 \\ &= (h_1 + h_2)^2 + h_1h_2(-1 + 3h_1 + 3h_2), \end{aligned}$$

et là encore les deux termes sont positifs, on a donc bien un maximum global.

Remarque: non, ce n'est pas sorti du chapeau, on cherche à exploiter le fait que l'on connait le signe de certaines expressions, du fait que $\left(\frac{1}{3} + h_1, \frac{1}{3} + h_2\right)$ appartient à T et on les fait apparaître.

Par ailleurs, sur le bord de T, les points sont de la forme $(0,t), (t,0)$ ou $(t, 1-t)$ avec $t \in [0,1]$. On a $f(t,0) = f(0,t) = f(t,1-t) = 0$ et $\forall (x,y) \in T$, $f(x,y) \geqslant 0$ (immédiat avec la forme factorisée) donc f atteint son minimum, qui vaut 0, sur le bord de T.

Remarque: vous verrez plus tard que l'on peut aller plus vite en utilisant l'analogue de la continuité sur un segment: Une fonction continue sur un fermé borné est bornée et atteint ses bornes. La fonction f est continue sur T qui est fermé et borné donc f est bornée et atteint ses bornes. D'après l'étude au bord, on sait donc que son maximum est atteint à l'intérieur de T donc sur U. Le point en lequel le max est atteint est critique (appartient à un ouvert) et comme il y a un unique point critique dans U, f atteint nécessairement son maximum en ce point.