1 Vrai/faux sur le calcul matriciel

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

affirmation 1. Soit $A, B \in M_n(\mathbb{K})$, alors $\operatorname{Tr} AB = \operatorname{Tr} BA$

affirmation 2. Soit $A, B \in M_n(\mathbb{K})$, alors $\det(AB) = \det(BA)$

affirmation 3. Soit $A, B \in M_n(\mathbb{K})$, alors $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$

affirmation 4. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\operatorname{Tr}(\lambda A) = \lambda \operatorname{Tr}(A)$

affirmation 5. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\det(\lambda A) = \lambda \det(A)$.

affirmation 6. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, alors $\operatorname{Tr}(A) = \operatorname{Tr}(A^\top)$.

affirmation 7. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, alors $\det(A) = \det(A^\top)$.

affirmation 8. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, alors $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A^\top)$.

affirmation 9. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ et $P \in GL_n(\mathbb{K})$, alors $\det(PAP^{-1}) = \det(A)$

affirmation 10. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ et $P \in GL_n(\mathbb{K})$, alors $\text{rg}(PA) = \text{rg}(A)$

---

affirmation 11. Soit $A, B, C \in M_n(\mathbb{K})$. Alors $AB = AC \Rightarrow B = C$.

---

affirmation 12. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. S'il existe un entier m tel que $A^m = (0)$, alors $A = (0)$.

---

affirmation 13. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. S'il existe un entier m tel que $A^m = (0)$, alors $I_n - A \in GL_n(\mathbb{K})$.

---

affirmation 14. Soit $A, B \in M_n(\mathbb{K})$, alors $(A+B)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} A^k B^{m-k}$.

---

affirmation 15. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Si $\forall X \in M_{n1}(\mathbb{K}) \setminus \{(0)\}$, $AX \neq (0)$, alors A est inversible.

---

2 Solutions du Vrai/Faux calculs algébriques

Correction 1

VRAI. Avec la formule du produit matriciel

$$\mathrm{Tr} AB = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_i k b_k i,$$

et par symétrie des indices, on a bien $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

Correction 2

VRAI car $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Correction 3

FAUX car $\det(2A) = 2^n \det(A)$ (et on suppose qu'on travaille avec des matrices de taille supérieure à 1 !)

Correction 4

VRAI par linéarité de la somme (et donc de la trace).

Correction 5

FAUX, le déterminant est linéaire par rapport à chaque colonne donc $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.

Correction 6

VRAI car A et $A^\top$ ont la même diagonale.

Correction 7

VRAI, on l'a admis dans le cours. Cela se montre avec les opérations élémentaires.

Correction 8

VRAI, on l'a admis dans le cours. Cela se montre avec les opérations élémentaires et en utilisant le résultat (HP) qu'une matrice A est de rang r si et seulement si, par opérations élémentaires, on peut la transformer en une matrice $J_r = \begin{pmatrix} I_r & (0) \\ (0) & (0) \end{pmatrix}$ (matrice par blocs)

Correction 9

VRAI car $\det(PAP^{-1}) = \det(P^{-1}PA) = \det(A)$.

Correction 10

VRAI car si on note $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de A, alors $\mathrm{rg}(PA) = \dim\mathrm{Vect}(PC_1, \dots, PC_n)$. Comme P est inversible, $M \mapsto PM$ est un isomorphisme donc les ssev $\mathrm{Vect}(PC_1, \dots, PC_n)$ et $\mathrm{Vect}(C_1, \dots, C_n)$ sont isomorphes et donc de même dimension finie.

Correction 11

FAUX, prenons $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = (0)$.

Correction 12

FAUX, prenons $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Correction 13

VRAI et $(I_n + A)^{-1} = I_n + A + \ldots + A^{m-1}$ (faites le produit).

Correction 14

FAUX, il faut supposer que A et B commutent.

Correction 15

VRAI car c'est la contraposée de $AX = (0) \Rightarrow X = (0)$ qui montre que A est inversible (car le système homogène associé a une unique solution par exemple).