Lycée du Parc
PCSI 842 Année 2024-2025
DS 9

Devoir surveillé 9.

Chaque résultat doit être justifié, les réponses doivent être soulignées ou encadrées, vos pages (et pas vos copies) doivent être numérotées, votre nom et classe doivent être mentionnés et tout ceci doit être fait durant le temps de composition. Les étapes des éventuels calculs doivent apparaître sur la copie. On peut admettre un résultat ou une question en le précisant explicitement. La clarté et la précision de la rédaction ainsi que la présentation de la copie seront prises en compte dans l'évaluation.

Calculatrice interdite.

Exercice 1. *1. Un résultat préliminaire : soit E, un espace vectoriel de dimension $n (n \geqslant 2)$. On note H_1 et H_2, deux sous-espaces de E vérifiant :*

$$\dim(H_1) = \dim(H_2) = n-1 \text{ et } H_1 \neq H_2.$$

(a) Montrer que si $x \in E \setminus H_1$, alors $H_1 \oplus \mathrm{Vect}(x) = E$.

(b) Prouver que : $H_1 + H_2 = E$.

(c) En déduire la dimension de $H_1 \cap H_2$.

À Partir de maintenant on pose $E = \mathbb{R}_3[X]$.

2. Pour tout $b \in \mathbb{R}$, on définit l'application linéaire :

$$\varphi_b : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & P'(b) \end{array} \quad \text{et } G = \left\{ Q \in \mathbb{R}_3[X] \mid Q'(1) = Q'(-1) = 0 \right\}.$$

(a) Montrer que pour tout $b \in \mathbb{R}$, φ_b est surjective.

(b) En déduire, pour tout $b \in \mathbb{R}$, la dimension de $\mathrm{Ker}(\varphi_b)$.

(c) Justifier sans calcul que G est un sous-espace vectoriel de E.

(d) En s'aidant du résultat préliminaire, donner la dimension de G.

Pour tout polynôme P de l'espace vectoriel E, on pose

$$f(P) = \frac{X^2-1}{2} P'' - XP' + P$$

On note $\mathscr{C} = \left(1, X, X^2, X^3\right)$ la base canonique de E.

3. Calculer $f(X^i)$ pour $i \in [\![0,3]\!]$.

4. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$ et le rang de f.

5. Montrer l'égalité $\mathrm{Im}(f) = G$.

6. Montrer, en utilisant les questions 3 et 4 que $\mathrm{Ker}(f)$ est un plan vectoriel dont on donnera une base.

7. Montrer que f est un projecteur de E.

8. $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$ sont-ils supplémentaires dans E ?

Exercice 2. *On considère la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \int_0^1 t^n \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$$

et la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ par $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a_k$.

1. ***Questions préliminaires :***

   (a) *Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^\star$ et $t \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$, $\sum_{k=0}^{n-1} (-t)^k$.*

   (b) *Calculer la dérivée de $t \mapsto (1-t^2)^{3/2}$.*

   (c) *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente de limite ℓ. $\forall n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = u_n - u_{n+2}$. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ converge et exprimer sa somme à l'aide de ℓ, u_0 et u_1.*

2. *Déterminer la monotonie de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

3. *Pour $n \geqslant 1$, montrer que*

$$S_n = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-t^2}}{1+t}\,\mathrm{d}t + (-1)^{n+1} \int_0^1 t^n \frac{\sqrt{1-t^2}}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$

4. *Montrer que $\int_0^1 \frac{\sqrt{1-t^2}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} - 1$.*
   Indication : poser le changement de variable $t = \cos(u)$.

5. *Montrer que pour tout $n \geqslant 1 : 0 \leqslant \int_0^1 t^n \frac{\sqrt{1-t^2}}{1+t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n+1}$.*

6. *En déduire que la série $\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n a_n$ converge et donner sa somme.*

7. *En effectuant une intégration par parties dans a_n, montrer que pour $n \geqslant 2$, $a_n = \frac{n-1}{n+2} a_{n-2}$.*

8. *Montrer que $\forall n \geqslant 1$, $\frac{n}{n+3} a_{n-1} \leqslant a_n \leqslant a_{n-1}$.*

9. *En déduire que $a_n \sim a_{n-1}$.*

10. *Montrer que pour $n \geqslant 1$, la suite de terme général $n(n+1)(n+2)a_n a_{n-1}$ est constante de valeur $C > 0$ (la valeur exacte de C n'est pas demandée).*

11. *En déduire que $a_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{C}}{n^{3/2}}$ puis la nature de la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n$.*

12. *Montrer que pour tout $n \geqslant 0 : a_n = w_n - w_{n+2}$ où $w_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(\theta)\,\mathrm{d}\theta$.*
    Indication : poser le changement de variable $t = \sin(\theta)$.

13. *Soient $\varepsilon > 0$ et $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. tels que $0 < \frac{\pi}{2} - \alpha < \frac{\epsilon}{2}$.*

    (a) *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant w_n \leqslant \alpha \sin^n(\alpha) + \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$.*

    (b) *Justifier qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0$, $\alpha \sin^n(\alpha) < \frac{\epsilon}{2}$.*

    (c) *Montrer que $\lim_{n\to+\infty} w_n = 0$.*

    (d) *En déduire que la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ converge et que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \frac{\pi}{2} + 1$.*

Exercice 3. *Soit E, un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$, E n'étant pas réduit à son vecteur nul. On note $\mathscr{D}$ l'ensemble des endomorphismes f de E qui vérifient $f^3 = f$ (c'est-à-dire $f \circ f \circ f = f$:*

$$\mathscr{D} = \left\{ f \in \mathscr{L}(E) \mid f^3 = f \right\}$$

1. *Vérifier que tous les projecteurs et toutes les symétries de E sont dans $\mathscr{D}$.*
2. *Prouver, à l'aide d'un argument simple, que l'ensemble $\mathscr{D}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$.*
3. *On rappelle que $GL(E)$ désigne l'ensemble des automorphismes de l'espace vectoriel E. Prouver l'équivalence :*

$$(f \in \mathscr{D} \cap GL(E)) \Longleftrightarrow (f \text{ est une symétrie de } E)$$

4. *Montrer que, si f est un élément de $\mathscr{D}$, alors, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, $f^k \in \mathscr{D}$.*
5. *Soit f, un élément de $\mathscr{D}$.*
   (a) *Montrer que son noyau $\mathrm{Ker}(f)$ et son image $\mathrm{Im}(f)$ sont en somme directe.*
   (b) $\mathrm{Ker}(f)$ *et* $\mathrm{Im}(f)$ *sont-ils supplémentaires dans E ?*
   (c) *Montrer que f^2 est un projecteur de E.*
   (d) *Soit g est un endomorphisme de E. Montrer que $\mathrm{Ker}(g) \subset \mathrm{Ker}\left(g^2\right) \subset \mathrm{Ker}\left(g^3\right)$.*
   (e) *En déduire l'égalité $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}\left(f^2\right)$.*
   (f) *Montrer ensuite que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}\left(f^2\right)$.*
6. *Un exemple : désormais, on pose $E = \mathbb{R}^3$. On définit l'endomorphisme $h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ par :*

$$h((x, y, z)) = (2x - 2z, -y, x - z)$$

   (a) *h est-elle une symétrie de E ? Un projecteur de E ?*
   (b) *Prouver que h est un élément de $\mathscr{D}$.*
   (c) *Préciser des équations et des familles génératrices du noyau et de l'image de h.*
   (d) *Justifier que $E = \mathrm{Ker}(h) \oplus \mathrm{Im}(h)$.*
   (e) *On note p, le projecteur sur $\mathrm{Im}(h)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(h)$. Donner l'expression de $p(x, y, z)$.*
7. *Un autre exemple :*
   (a) *Montrer que la famille de fonctions $\mathscr{F} = (1, \mathrm{ch}, \mathrm{sh})$ est libre, où 1 désigne la fonction constante égale à 1.*
   (b) *On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E engendré par la famille $\mathscr{F}$: $E = \mathrm{Vect}(1, \mathrm{ch}, \mathrm{sh})$.*
   Soit l'opérateur de dérivation $\Delta : E \longrightarrow E$,

$$f \mapsto f'$$

   Montrer que Δ est un endomorphisme de E.
   (c) *Prouver que $\Delta \in \mathscr{D}$.*
   (d) *Donner une base $\mathrm{Ker}(\Delta)$ et une base de $\mathrm{Im}(\Delta)$.*
   (e) *Les espaces KerΔ et ImΔ sont-ils supplémentaires dans E ?*
   (f) *Δ est-il un projecteur de E ?*

Correction du DS n 9, sujet 1

1 1. *Un résultat préliminaire : soit E, un espace vectoriel de dimension $n (n \geqslant 2)$. On note H_1 et H_2, deux sous-espaces de E vérifiant :*

$$\dim(H_1) = \dim(H_2) = n-1 \text{ et } H_1 \neq H_2.$$

(a) *Montrer que si $x \in E \setminus H_1$, alors $H_1 \oplus Vect(x) = E$.*
Soit $(e_1, \dots, e_{n-1})$ une base de H_1. Alors $(e_1, \dots, e_{n-1}), x)$ est libre car x n'appartient pas à $\text{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1}$
Comme, de plus, cette famille est de cardinal n, c'est une base de E. On en déduit que H_1 et $\text{Vect}(x)$ sont supplémentaires dans E.

(b) *Prouver que : $H_1 + H_2 = E$.*
On sait que $H_1 \neq H_2$, il existe donc $x \in H_2, x \notin H_1$. On a alors, d'après la question précédente, $H_1 \oplus \text{Vect}(x) = E$. Or $\text{Vect}(x) \subset H_2$ donc $H_1 \oplus \text{Vect}(x) \subset H_1 + H_2$. On a alors $E \subset H_1 + H_2$ et comme H_1 et H_2 sont deux ssev de E, l'autre inclusion est claire donc $H_2 1 + H_2 = E$.

(c) *En déduire la dimension de $H_1 \cap H_2$.*

On a $\dim(H_1 + H_2) = n$ puisque $H_1 + H_2 = E$. De plus, d'après la formule de Grassman, on a

$$\dim(H_1 + H_2) = \dim(H_1) + \dim(H_2) - \dim(H_1 \cap H_2).$$

On en déduit que

$$\dim(H_1 \cap H_2) = n-2$$

À Partir de maintenant on pose $E = \mathbb{R}_3[X]$.

2. Pour tout $b \in \mathbb{R}$, on définit l'application linéaire : φ_b :

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & P'(b) \end{array} . \text{ et } G = \left\{Q \in \mathbb{R}_3[X] \mid Q'(1) = Q'(-1) = 0\right\}.$$

(a) *Montrer que pour tout $b \in \mathbb{R}$, φ_b est surjective.*

Soit $a \in \mathbb{R}$, alors $aX \in \mathbb{R}_3[X]$ et $\varphi_b(aX) = a$ donc φ_b est surjective.
On peut aussi dire que φ_b est une forme linéaire non nulle donc elle est surjective (bravo Tom).

(b) *En déduire, pour tout $b \in \mathbb{R}$ la dimension de* $\text{Ker}(\varphi_b)$.
Soit $b \in \mathbb{R}$. D'après le théorème du rang, $\dim(E) = \dim \ker \varphi_b + \text{rg}(\varphi_b)$. On sait que $\text{rg}\varphi_b = 1$ puisque φ_b est surjective. On en déduit que $\dim \text{Ker}(\varphi_b) = n-1$.

(c) *Justifier sans calcul que G est un sous-espace de E.*
On remarque que $G = \text{Ker}\varphi_1 \cap \text{Ker}\varphi_{-1}$, c'est donc l'intersection de deux ssev de E, c'est bien un ssev de E.

(d) *En s'aidant du résultat préliminaire, donner la dimension de G.*

On sait que $\text{Ker}\varphi_1$ et $\text{Ker}\varphi_{-1}$ sont des hyperplans d'après la question 2b. De plus, $(X-1)^2 \in \text{Ker}\varphi_1$ et $(X-1)^2 \notin \text{Ker}\varphi_{-1}$. Les deux ssev sont donc distincts. D'après les questions préliminaires, on a $\dim(G) = n-2 = 2$.

Pour tout polynôme P de l'espace vectoriel E, on pose

$$f(P)=\frac{X^2-1}{2}P''-XP'+P$$

On note $\mathscr{C}=\left(1,X,X^2,X^3\right)$ la base canonique de E.

3. *Calculer $f(X^i)$ pour $i\in[\![0,3]\!]$.*

   On a
   — $f(1)=1$
   — $f(X)=0$
   — $f(X^2)=-1$
   — $f(X^3)=X^3-3X$.

4. *Déterminer une base de Im(f) et le rang de f.*
   D'après la question précédente, on a

   $$\mathrm{Im}(f)=\mathrm{Vect}\left(1,0,-1,X^3-3X\right)=\mathrm{Vect}(1,X^3-3X).$$

   La famille $(1,X^3-3X)$ est génératrice de $\mathrm{Im}(f)$ et libre car composée de deux vecteurs non colinéaires. On en déduit que c'est une base de $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{rg}(f)=2$.

5. *Montrer l'égalité* $\mathrm{Im}(f)=G$.
   On sait déjà que les deux ensembles sont de même dimension. On a $1\in G$ et si $P(X)=X^3-3X$, $P'(X)=3X^2-3$ donc $P'(1)=P'(-1)=0$. Par conséquent, $X^3-3X\in G$ puis $\mathrm{Im}(f)\subset G$. On en déduit l'égalité comme ils sont de même dimension.

   On peut aussi montrer l'inclusion en disant qu'un élément de G est de la forme $P=a+b(X^3-3X)$ et montrer que $P'(1)=0=P'(-1)$.

6. *Montrer que* $\mathrm{Ker}(f)$ *est un plan vectoriel dont on donnera une base.*
   On sait déjà, d'après le théorème du rang, que $\mathrm{Ker}(f)$ est de dimension 2 puisque $\mathrm{rg}(f)=2$. Par ailleurs, $f(X)=0$ et $f(X^2+1)=-1+1=0$. On a donc (X,X^2+1) famille libre (degrés distincts) de $\ker(f)$, c'est donc une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

7. *Montrer que f est un projecteur de E.*
   On va montrer que $f\circ f(X^i)=f(X^i)$ pour tout $i\in[\![0,3]\!]$. On a
   — $f\circ f(1)=f(1)$.
   — $f\circ f(X)=f(0)=0=f(X)$.
   — $f\circ f(X^2)=f(-1)=-f(1)=-1=f(X^2)$.
   — $f\circ f(X^3)=f(X^3-3X)=f(X^3)-3f(X)=f(X^3)$ car $-3f(X)=0$.
   Par linéarité de f, on en déduit que $f\circ f(P)=f(P)$ pour tout $P\in E$.

   Si on ne pense pas à regarder la base canonique, on peut écrire : pour tout $P\in E$,
   — $f(P)'=XP"+\dfrac{X^2-1}{2}P^{(3)}-P'-XP"+P'=\dfrac{X^2-1}{2}P^{(3)}$
   — puis $f(P)"=XP^{(3)}$ car $P^{(4)}=0$.
   On a donc

   $$f\circ f(P)=\frac{X^2-1}{2}f(P)"-Xf(P)'+f(P)=\frac{(X^2-1)}{2}XP^{(3)}-X\frac{X^2-1}{2}P^{(3)}+f(P)=f(P).$$

   On a bien $f\circ f=f$ donc f est un projecteur.

   Beaucoup d'erreurs de calcul sur cette question.

8. $\mathrm{Im}(f)$ *et* $\mathrm{Ker}(f)$ *sont-ils supplémentaires dans E ?*

   Comme f est un projecteur, on sait que $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$ sont supplémentaires dans E.

2 *On considère la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par*

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad a_n=\int_0^1 t^n\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$$

et la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ par $S_n=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k a_k$.

1. **Questions préliminaires :**

   (a) *Calculer, pour $n\in\mathbb{N}^\star$ et $t\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, $\sum_{k=0}^{n-1}(-t)^k$.*

   Soit $n\in\mathbb{N}^\star$ et $t\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, alors
   $$\sum_{k=0}^{n-1}(-t)^k=\frac{1-(-t)^n}{1+t}.$$

   (b) *Calculer la dérivée de $t\mapsto(1-t^2)^{3/2}$.*
   La dérivée de $t\mapsto(1-t^2)^{3/2}$ est $t\mapsto -3t\sqrt{1-t^2}$.

   (c) *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente de limite ℓ. $\forall n\in\mathbb{N}$, on pose $v_n=u_n-u_{n+2}$. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0}v_n$ converge et exprimer sa somme à l'aide de ℓ, u_0 et u_1.*

   Soit $n\in\mathbb{N}$, on pose $S_n=\sum_{k=0}^{n}v_k$. On a

   $$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n}(u_k-u_{k+2})\\ &= \sum_{k=0}^{n}((u_k+u_{k+1})-(u_{k+2}+u_{k+1}))\\ &= u_1+u_0-u_{n+2}-u_{n+1} \text{ car on reconnaît une somme télescopique}\end{aligned}$$

   En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient que la série $\sum_{n\geqslant 0}v_n$ converge et que sa somme vaut $u_1-u_0-2\ell$.
   On peut aussi écrire
   $$S_n=\sum_{k=0}^{n}(u_k-u_{k+1})+\sum_{k=0}^{n}(u_{k+1}-u_{k+2}),$$
   et dire que la série est la somme de deux séries télescopiques.

2. *Déterminer la monotonie de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*
   Soit $n\in\mathbb{N}$, alors
   $$a_{n+1}-a_n=\int_0^1 t^n(t-1)\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t.$$
   La fonction $t\mapsto t^n(t-1)\sqrt{1-t^2}$ est négative sur $[0,1]$ donc, par croissance de l'intégrale, on a $a_{n+1}-a_n\leqslant 0$ et la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

3. *Pour $n\geqslant 1$, montrer que*
   $$S_n=\int_0^1\frac{\sqrt{1-t^2}}{1+t}\,\mathrm{d}t+(-1)^{n+1}\int_0^1 t^n\frac{\sqrt{1-t^2}}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$

Soit $n \geqslant 1$, alors

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a_k \\
&= \int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} (-t)^k \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \frac{1-(-t)^n}{1+t} \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t \text{ d'après la question préliminaire} \\
&= \int_0^1 \frac{\sqrt{1-t^2}}{1+t}\,\mathrm{d}t - (-1)^n \int_0^1 \frac{t^n\sqrt{1-t^2}}{1+t}\,\mathrm{d}t
\end{aligned},$$

ce qui donne bien l'égalité souhaitée.

Très peu de gens ont réussi cette question.

4. *Montrer que* $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{1-t^2}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} - 1$.
   Indication : poser le changement de variable $t = \cos(u)$.
   On pose $t = \cos u$, $dt = -\sin(u) du$. t varie de 0 à 1 donc u varie de $\frac{\pi}{2}$ à 0. On a donc

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\sqrt{1-t^2}}{1+t}\,\mathrm{d}t &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\sin(u)(-\sin u)}{1+\cos(u)}\,\mathrm{d}u \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos^2 u}{1+\cos u}\,\mathrm{d}u \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1-\cos(u)\,\mathrm{d}u \\
&= [u-\sin(u)]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{\pi}{2} - 1
\end{aligned}$$

   On bien le résultat souhaité.

5. *Montrer que pour tout* $n \geqslant 1 : 0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 t^n \frac{\sqrt{1-t^2}}{1+t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n+1}$.
   Soit $n \geqslant 1$, alors pour tout $t \in [0,1]$,

$$0 \leqslant \frac{t^n\sqrt{1-t^2}}{1+t} \leqslant t^n,$$

   donc, par croissance de l'intégrale :

$$0 \leqslant \int_0^1 t^n \frac{\sqrt{1-t^2}}{1+t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t,$$

   et

$$\int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1},$$

   ce qui donne l'encadrement souhaité.

6. *En déduire que la série* $\sum\limits_{n\geqslant 0} (-1)^n a_n$ *converge et donner sa somme.*
   Soit $n \geqslant 1$, alors

$$\begin{aligned}
\left|S_n - \frac{\pi}{2} + 1\right| &= \left|S_n - \int_0^1 \tfrac{\sqrt{1-t^2}}{1+t}\,\mathrm{d}t\right| \\
&= \left|+(-1)^{n+1} \int_0^1 t^n \tfrac{\sqrt{1-t^2}}{1+t}\,\mathrm{d}t\right| \\
&\leqslant \frac{1}{n+1}
\end{aligned}$$

en utilisant les deux questions précédentes. Par le théorème des gendarmes, on a $\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{\pi}{2} - 1$ donc la série $\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n a_n$ converge et sa somme vaut $\frac{\pi}{2} - 1$.

7. *En effectuant une intégration par parties dans a_n, montrer que pour $n \geqslant 2$, $a_n = \frac{n-1}{n+2} a_{n-2}$.*
Soit $n \geqslant 3$. On pose $u(t) = t^{n-1}$ et $v'(t) = t\sqrt{1-t^2}$. En utilisant les questions préliminaires, on a $v(t) = -\frac{1}{3}(1-t^2)^{3/2}$. On a donc

$$\begin{aligned} a_n &= \left[-\frac{t^{n-1}}{3}(1-t^2)^{3/2}\right]_0^1 + \frac{n-1}{3}\int_0^1 t^{n-2}(1-t^2)^{3/2}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{n-1}{3}\int_0^1 t^{n-2}(1-t^2)\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t \text{ car n-1} \geqslant 1 \\ &= \frac{n-1}{3}(a_n - a_{n-2}) \end{aligned}$$

On a donc $3a_n = (n-1)a_{n-2} - (n-1)a_n$ donc $a_n = \frac{n-1}{n+2}a_{n-2}$.

Personne n'a pensé à cette intégration par parties. La question préliminaire était là pour vous aider.

8. *Montrer que $\forall n \geqslant 2$, $\frac{n}{n+3} a_{n-1} \leqslant a_n \leqslant a_{n-1}$.* Soit $n \geqslant 2$, alors

$$a_{n+1} \leqslant a_n \leqslant a_{n-1},$$

par décroissance de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $a_{n+1} = \frac{n}{n+3} a_{n-1}$ d'après la question précédente d'où

$$\frac{n}{n+3} a_{n-1} \leqslant a_n \leqslant a_{n-1}$$

9. *En déduire que $a_n \sim a_{n-1}$.*
La fonction $t \mapsto t^{n-1}\sqrt{1-t^2}$ est continue, positive et non identiquement nulle sur $[0,1]$. Par stricte positivité de l'intégrale, on a donc $a_{n-1} > 0$. On en déduit grâce à la question précédente, que

$$\frac{n}{n+3} \leqslant \frac{a_n}{a_{n-1}} \leqslant 1,$$

d'où, par le thm des gendarmes, $a_n \sim a_{n-1}$.

Question quasiment identique à celle du DM et très peu l'ont traité correctement (alors que j'avais insisté sur le fait qu'il fallait s'assurer qu'on divise par une quantité strictement positive pour ne pas changer les sens des inégalités)

10. *Montrer que pour $n \geqslant 1$, la suite de terme général $n(n+1)(n+2)a_n a_{n-1}$ est constante de valeur $C > 0$ (la valeur exacte de C n'est pas demandée).*
Soit $n \geqslant 1$, alors

$$(n+1)(n+2)(n+3)a_{n+1}a_n = (n+1)(n+2)(n+3)\frac{n}{n+3}a_{n-1}a_n = n(n+1)(n+2)a_n a_{n+1},$$

la suite est donc bien constante. Par ailleurs, on a montré que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement positive, on a donc $C > 0$.

Il ne faut pas oublier de montrer que $C > 0$.

11. *En déduire que $a_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{C}}{n^{3/2}}$ puis la nature de la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n$.*
On a $n(n+1)(n+2)a_n a_{n+1} \sim C$ donc $a_n a_{n+1} \sim \frac{C}{n^3}$ et $a_n a_{n+1} \sim a_n^2$ d'où l'équivalent souhaité en prenant la racine carrée.

12. *Montrer que pour tout $n \geqslant 0$: $a_n = w_n - w_{n+2}$ où $w_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(\theta)\,\mathrm{d}\theta$.*
Indication : poser le changement de variable $t = \sin(\theta)$.

On pose $t = \sin\theta$. on a $dt = \cos\theta d\theta$. t varie de 0 à 1 donc θ varie de 0 à $\frac{\pi}{2}$. On a donc

$$\begin{aligned} a_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n\theta\sqrt{1-\sin^2\theta}\cos\theta}{1+\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n\theta(1-\sin^2\theta)}{1+\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n\theta(1-\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta \\ &= w_n - w_{n+2} \end{aligned}$$

13. *Soient $\varepsilon > 0$ et $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. tels que $0 < \frac{\pi}{2} - \alpha < \frac{\epsilon}{2}$.*

   (a) *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant w_n \leqslant \alpha\sin^n(\alpha) + \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$.*
   Soit $n \in \mathbb{N}$, par croissance de l'intégrale, $w_n \geqslant 0$ et

$$\begin{aligned} w_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n\theta\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{\alpha} \sin^n\theta\,\mathrm{d}\theta + \int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} \sin^n\theta\,\mathrm{d}\theta \\ &\leqslant \alpha\sin^n\alpha + \int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} \sin^n\theta\,\mathrm{d}\theta \text{ car sin est croissante sur } [0,\alpha] \\ &\leqslant \alpha\sin^n\alpha + \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \text{ car sin est majorée par 1} \end{aligned}$$

   (b) *Justifier qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0$, $\alpha\sin^n(\alpha) < \frac{\epsilon}{2}$.*
   On sait que $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ donc $\sin\alpha \in]0,1[$. On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin^n\alpha = 0$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha\sin^n\alpha = 0$. On en déduit qu'il existe un rang n_0 tel que $\forall n \geqslant n_0$, $|\alpha\sin^n\alpha| \leqslant \frac{\epsilon}{2}$.

   (c) *Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$.*
   Soit $n \geqslant n_0$, alors
$$0 \leqslant w_n \leqslant \alpha\sin^n\alpha + \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \leqslant \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2},$$
   on a donc montré que pour tout $\epsilon > 0$, on pouvait trouver n_0 tel que pour $n \geqslant n_0$, $0 \leqslant w_n \leqslant \epsilon$ ce qui montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$.

   (d) *En déduire que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ converge et que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n = \frac{\pi}{2} + 1$.*

On utilise la question préliminaire, elle nous permet d'affirmer que la série converge et que sa somme vaut $w_0 + w_1 = \frac{\pi}{2} + 1$.

3 *Soit E, un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$, E n'étant pas réduit à son vecteur nul. On note $\mathscr{D}$ l'ensemble des endomorphismes f de E qui vérifient $f^3 = f$ (c'est-à-dire $f \circ f \circ f = f$:*

$$\mathscr{D} = \left\{f \in \mathscr{L}(E) \mid f^3 = f\right\}$$

1. *Vérifier que tous les projecteurs et toutes les symétries de E sont dans $\mathscr{D}$.*

   Soit p un projecteur de E. Alors $p \circ p = p$ donc $p \circ p \circ p = p \circ p = p$, on a bien $p \in \mathscr{D}$.
   Soit s une symétrie de E, alors $s^2 = id_E$ donc $s \circ s \circ s = s \circ id_E = s$, on a bien $s \in \mathscr{D}$.

2. *Prouver, à l'aide d'un argument simple et efficace, que l'ensemble $\mathscr{D}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$.*

   Soit p un projecteur de E, alors $u = 2p$ vérifie $u^3 = 8u \neq u$ donc $u \notin \mathscr{D}$ alors que p est un élément de $\mathscr{D}$.

3. *On rappelle que $GL(E)$ désigne l'ensemble des automorphismes de l'espace vectoriel E . Prouver l'équivalence :*

$$(f \in \mathscr{D} \cap GL(E)) \Longleftrightarrow (f \text{ est une symétrie de } E)$$

   On sait déjà que si f est une symétrie de E, alors s est un élément de $\mathscr{D}$. De plus, une symétrie est un automorphisme (d'inverse elle-même) donc le sens $\Leftarrow$ est clair. Soit maintenant $f \in \mathscr{D} \cap GL(E)$. Alors $f^3 = f$ et f inversible. En composant par f^{-1} dans l'égalité $f^3 = f$, on obtient $f^2 = id_E$ et f est une symétrie. On a bien l'équivalence.

   Attention, on ne peut pas écrire $f \in \mathscr{D} \cap GL(E) \Leftrightarrow f \circ f \circ f = f$ et $f^{-1} \circ f = id_E$ car f^{-1} n'est définie que si on suppose f bijective!

4. *Montrer que, si f est un élément de $\mathscr{D}$, alors, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, $f^k \in \mathscr{D}$.*
   Soit $f \in \mathscr{D}$ et $k \in \mathbb{N}$. Alors $\left(f^k\right)^3 = f^{3k} = \left(f^3\right)^k = f^k$ car $f^3 = f$. On a montré que f^k est un élément de $\mathscr{D}$.

5. *Soit f, un élément de $\mathscr{D}$.*
   (a) *Montrer que son noyau* $\operatorname{Ker}(f)$ *et son image* $\operatorname{Im}(f)$ *sont en somme directe.*

   Soit $x \in \operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Im}(f)$. Alors $f(x) = 0_E$ et il existe $a \in E$ tel que $f(x) = a$. On a donc $f^2(a) = 0_E$ puis $f^3(a) = f(0_E) = 0_E$ par linéarité de f. Or, par hypothèse, $f^3(a) = f(a) = x$. On a donc $x = 0_E$ ce qui montre l'inclusion $\ker(f) \cap \operatorname{Im}(f) \subset \{0_E\}$ d'où l'égalité, l'autre inclusion étant claire.

   (b) $\operatorname{Ker}(f)$ *et* $\operatorname{Im}(f)$ *sont-ils supplémentaires dans E ?*
   Par le théorème du rang, on sait que $\dim(\operatorname{Ker}(f)) + \operatorname{rg}(f) = \dim(E)$. Or $\ker(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ sont en somme directe, on a donc $\dim\left(\ker(f) \oplus \operatorname{Im}(f)\right) = \dim(\operatorname{Ker}(f)) + \operatorname{rg}(f) = \dim(E)$. Ainsi, $\operatorname{Ker}(f) \oplus \operatorname{Im}(f)$ et E sont de même dimension. Comme on a l'inclusion $\operatorname{Ker}(f) \oplus \operatorname{Im}(f) \subset E$, on a l'égalité.

   (c) *Montrer que f^2 est un projecteur de E.*

   On a $f^3 = f$ donc $f^4 = f^2$ ce qui montre que f^2 est un projecteur.

   (d) *Soit g est un endomorphisme de E. Montrer que* $\operatorname{Ker}(g) \subset \operatorname{Ker}\left(g^2\right) \subset \operatorname{Ker}\left(g^3\right)$.

   Soit $x \in \operatorname{Ker}(g)$, alors $g(x) = 0_E$ donc $g^2(x) = g(0_E) = 0_E$ car g est linéaire donc $x \in \operatorname{Ker}(g^2)$ ce qui montre l'inclusion $\operatorname{Ker}(g) \subset \operatorname{Ker}(g^2)$. De même, si $x \in \operatorname{Ker}(g^2)$, alors $g^2(x) = 0_E$ donc $g^3(x) = g(0_E) = 0_E$ et $x \in \operatorname{Ker}(g^3)$. On a donc bien $\operatorname{Ker}(g) \subset \operatorname{Ker}(g^2) \subset \operatorname{Ker}(g^3)$.

   Certains ont pris un élément x de $Ker(g)$ et ont montré que $g^2(x) = 0_E$ et $g^3(x) = 0_E$ ce qui montre les inclusions $Ker(g) \subset Kerg^2$ et $Kerg \subset \ker g^3$ mais pas l'inclusion $\ker(g^2) \subset Ker(g^3)$.

   (e) *En déduire l'égalité* $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Ker}\left(f^2\right)$
   On sait que $f^3 = f$ donc $\operatorname{Ker}(f^3) = \operatorname{Ker}(f)$. En appliquant la question précédente à f, on obtient

$$\operatorname{Ker}(f) \subset \operatorname{Ker}(f^2) \subset \operatorname{Ker}(f),$$

   donc $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Ker}(f^2)$.

(f) *Montrer ensuite que* $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}\left(f^2\right)$. Par le théorème du rang, on a $\mathrm{rg}(f) + \dim(\mathrm{Ker}(f)) = \mathrm{rg}(f^2) + \dim\mathrm{Ker}(f^2)$ donc $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f^2)$.
De plus, on a $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)$. En effet, si $y \in \mathrm{Im}(f^2)$, alors $y = f^2(a) = f\left(f(a)\right)$ donc $y \in \mathrm{Im}(f)$.
On a une inclusion et égalité des dimensions donc égalité des deux ssev.

6. *Un exemple : désormais, on pose* $E = \mathbb{R}^3$. *On définit l'endomorphisme* $h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *par :*

$$h((x, y, z)) = (2x - 2z, -y, x - z)$$

(a) *h est-elle une symétrie de E ? Un projecteur de E ?*
Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors $h^2(x, y, z) = h(2x - 2z, -y, x - z) = (2x - 2z, y, x - z) \neq (x, y, z)$ donc h n'est pas une symétrie.
On a également $h^2(x, y, z) \neq h(x, y, z)$ donc h n'est pas un projecteur.

(b) *Prouver que h est un élément de* $\mathscr{D}$.
Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, alors $h^3(x, y, z) = h(2x-2z, y, x-z) = (2x-2z, -y, x-z) = h(x, y, z)$. Ceci étant valable pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a $h^3 = h$.

(c) *Préciser des équations et des familles génératrices du noyau et de l'image de h.*
On a $\mathrm{Ker}(h) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = z \text{ et } y = 0\} = \mathrm{Vect}(1, 0, 1)$.
Pour l'image on peut écrire

$$\mathrm{Im}(h) = \mathrm{Vect}(h(1, 0, 0), h(0, 1, 0), h(0, 0, 1)) = \mathrm{Vect}\left((2, 0, 1), (0, 1, 0)\right).$$

Pour trouver une équation de l'image, on se donne $(a, b, c) \in \mathbb{R}^2$ et on cherche à quelles conditions il existe $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $h(x, y, z) = (a, b, c)$. Le système :

$$\begin{aligned} 2x - 2z &= a \\ -y &= b \\ x - z &= c \end{aligned}$$

est équivalent à

$$\begin{aligned} 2x - 2z &= a \\ y &= -b \\ 0 &= 2c - a \end{aligned}$$

Ce dernier admet une solution si et seulement si la condition de compatibilité $2c - a$ est vérifiée. On en déduit que

$$\mathrm{Im}(h) = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3, 2c - a = 0\}.$$

(d) *Justifier que* $E = \mathrm{Ker}(h) \oplus \mathrm{Im}(h)$.

Il suffit de montrer simplement qu'ils sont en somme directe et conclure avec le théorème du rang. Soit $(x, y, z) \in \mathrm{Ker}(h) \cap \mathrm{Im}(h)$, alors $x = z$, $y = 0$ et $2z = x$ donc $x = y = z = 0$ et la somme est bien directe. Le théorème du rang montre que le ssev $\mathrm{Ker}(h) \oplus \mathrm{Im}(h)$ de E a même dimension que E, il lui est donc égal.
On aurait pu aussi montrer que la concaténation des bases trouvées à la question précédente forme une base de $\mathbb{R}^3$.
On a

$$\mathrm{Vect}\left((1, 0, 1), (2, 0, 1), (0, 1, 0)\right) = \mathrm{Vect}\left((1, 0, 1), (0, 0, 1), (0, 1, 0)\right)$$

en faisant $v_2 \leftarrow v_2 - v_1$ puis

$$\mathrm{Vect}\left((1, 0, 1), (0, 0, 1), (0, 1, 0)\right) = \mathrm{Vect}\left((1, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0)\right) = \mathbb{R}^3,$$

en faisant $v_1 \leftarrow v_1 - v_2$. On en déduit que la famille $((1, 0, 1), (2, 0, 1), (0, 1, 0))$ est génératrice de $\mathbb{R}^3$, de cardinal 3 donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$ et les espaces $\mathrm{Im}(h)$ et $\mathrm{Ker}(h)$ sont bien supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

(e) *On note p, le projecteur sur* $\mathrm{Im}(h)$ *de direction* $\mathrm{Ker}(h)$. *Donner l'expression de* $p(x,y,z)$.

Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, on cherche à écrire (x,y,z) sous la forme $(a,0,a)+(2b,c,b)$. En identifiant, on trouve $b=x-z$ et $c=y$ donc
$$p(x,y,z)=(2x-2z,y,x-z).$$

7. *Un autre exemple* :

(a) *Montrer que la famille de fonctions* $\mathscr{F}=(1,\mathrm{ch},\mathrm{sh})$ *est libre, où* 1 *désigne la fonction constante égale à* 1.

Soit $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\mathbb{R}^3$ tel que
$$\forall x\in\mathbb{R},\lambda_1+\lambda_2\mathrm{ch}(x)+\lambda_3\mathrm{sh}(x)=0.$$
Alors en dérivant, on obtient
$$\forall x\in\mathbb{R},\lambda_2\mathrm{sh}(x)+\lambda_3\mathrm{ch}(x)=0,$$
donc pour $x=0$, $\lambda_3=0$. Pour $x\neq 0$, on obtient alors $\lambda_2=0$ et enfin $\lambda_1=0$ donc la famille est bien libre.

(b) *On considère le* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel* E *engendré par la famille* $\mathscr{F}$: $E=\mathrm{Vect}(1,\mathrm{ch},\mathrm{sh})$.
Soit l'opérateur de dérivation $\Delta : E\longrightarrow E$,
$$f\mapsto f'$$
Montrer que Δ *est un endomorphisme de* E.

Il est clair que Δ est linéaire, par linéarité de la dérivation. Par ailleurs, on a
— $\Delta(1)=0$ où 0 désigne la fonction nulle.
— $\Delta(\mathrm{ch})=\mathrm{sh}$
— $\Delta(\mathrm{sh})=\mathrm{ch}$
Ainsi $\mathrm{Im}\Delta=\mathrm{Vect}(0,\mathrm{ch},\mathrm{sh})\subset E$ donc Δ est bien un endomorphisme.

(c) *Prouver que* $\Delta\in\mathscr{D}$.

On a
— $\Delta^3(1)=0$.
— $\Delta^3(\mathrm{ch})=\Delta^2(\mathrm{sh})=\Delta(\mathrm{ch})$
— $\Delta^3(\mathrm{sh})=\Delta^2(\mathrm{ch})=\Delta(\mathrm{sh})$.
Ainsi, par linéarité de Δ, on a $\Delta^3=\Delta$. Si on n'est pas encore très à l'aise avec ce genre de raisonnement sur les bases, on peut écrire que pour tout $f\in E$, il existe $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tel que $f=a+b\mathrm{ch}+c\mathrm{sh}$, on a alors
$$\Delta^3(f)=a\Delta^3(1)+b\Delta^3(\mathrm{ch})+c\Delta^3(\mathrm{sh})=a\Delta(1)+b\Delta(\mathrm{ch})+c\Delta(\mathrm{sh})=\Delta(f),$$
on a donc bien $\Delta^3=\Delta$ et $\Delta\in\mathscr{D}$.

(d) *Donner une base* $\mathrm{Ker}(\Delta)$ *et une base de* $\mathrm{Im}(\Delta)$.

Soit $f\in E$, alors $f\in\mathrm{Ker}(\Delta)\Leftrightarrow\Delta(f)=0\Leftrightarrow f'=0\Leftrightarrow\exists a\in\mathbb{R},f=a$. On a donc $\mathrm{Ker}\Delta=\mathrm{Vect}(1)$ et la fonction constante égale à 1 forme une base de $\mathrm{Ker}\Delta$.
On sait que $\mathrm{Im}(\Delta)=\mathrm{Vect}\left(\Delta(1),\Delta(\mathrm{ch}),\Delta(\mathrm{sh})\right)=\mathrm{Vect}(\mathrm{sh},\mathrm{ch})$. Les deux fonctions ch et sh forment une famille libre car $\mathrm{ch}(0)=1$ et $\mathrm{sh}(0)=0$. On en déduit qu'une base de $\mathrm{Im}\Delta$ est $(\mathrm{ch},\mathrm{sh})$.

8. On remarque que la concaténation d'une base de $\mathrm{Ker}\Delta$ et d'une base de $\mathrm{Im}(\Delta)$ est la famille $\mathscr{F}$. On en déduit que $\mathrm{Im}(\Delta)$ et $\mathrm{Ker}(\Delta)$ sont supplémentaires dans E.

9. Δ n'est pas un projecteur car $\Delta^2(\mathrm{ch})=\mathrm{ch}\neq\Delta(\mathrm{ch})$.