Devoir surveillé 9, sujet 2 .

Chaque résultat doit être justifié, les réponses doivent être soulignées ou encadrées, vos pages (et pas vos copies) doivent être numérotées, votre nom et classe doivent être mentionnés et tout ceci doit être fait durant le temps de composition. Les étapes des éventuels calculs doivent apparaître sur la copie. On peut admettre un résultat ou une question en le précisant explicitement. La clarté et la précision de la rédaction ainsi que la présentation de la copie seront prises en compte dans l'évaluation.

Calculatrice interdite.

Exercice 1.

Dans tout ce problème, n est un entier supérieur ou égal à 1 et E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n.

On note Id_E l'endomorphisme identité de E. Si f est un endomorphisme de E, on pose $f^0 = Id_E$ et pour tout entier $m \geqslant 1$, $f^m = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{m \text{ fois}}$. On note $0_{\mathscr{L}(E)}$ l'endomorphisme nul de E et 0_E le vecteur nul de E.

L'objectif de ce problème est de montrer que pour tout endomorphisme f non nul de E, il existe un entier naturel p non nul tel que $\ker(f^p) \oplus \mathrm{Im}(f^p) = E$ et de déterminer l'entier p_0 qui est le plus petit des entiers pour lesquels cette égalité est vérifiée.

1. Soit $g, h \in \mathscr{L}(E)$, montrer que $\mathrm{Ker}(g) \subset \mathrm{Ker}(h \circ g)$ et $\mathrm{Im}(h \circ g) \subset \mathrm{Im}(h)$.
   (a) On suppose que l'endomorphisme f est bijectif. Déterminer p_0.
   (b) On suppose que l'endomorphisme f est une projection. Déterminer p_0.
2. Soit f un endomorphisme de E vérifiant la relation $f \circ (f - Id_E)^2 = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
   (a) Calculer $(f - Id_E)^2 + f \circ (2Id_E - f)$.
   (b) En déduire que $\ker f \oplus \mathrm{Im} f = E$.
   (c) Montrer que $\ker(f^2) \subset \ker(f)$.
   (d) En déduire que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$ puis $\ker(f^2) \oplus \mathrm{Im}(f^2) = E$.
3. Soit f un endomorphisme de E vérifiant la relation $(f + Id_E)^3 = Id_E$. On pose $g = f + Id_E$.
   (a) Montrer que $\mathrm{Im}(f) \subset \ker(g^2 + g + Id_E)$.
   (b) En déduire que $\ker f \oplus \mathrm{Im} f = E$.
4. Soit m un entier supérieur ou égal à 2. On suppose dans cette question l'existence de réels $a_1, a_2, \ldots, a_m$ avec $a_1 \neq 0$, vérifiant la relation $a_1 f + a_2 f^2 + \cdots + a_m f^m = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
   Montrer que $\ker f \oplus \mathrm{Im} f = E$.
5. On suppose dans cette question que $E = \mathbb{R}_5[X]$. Soit f l'unique endomorphisme de E tel que :

$$f(1) = 1 + X^2,\ f(X) = 0,\ f(X^2) = 1 + X^2,\ f(X^3) = 0,\ f(X^4) = X^3,\ f(X^5) = X^3 + X^4.$$

   (a) Pourquoi f est-il bien défini ?
   (b) i. Déterminer une base puis la dimension de $\mathrm{Im} f$.
       ii. En déduire une base de $\ker f$.
   (c) i. Pour tout $k \in [\![0, 5]\!]$, calculer $f^2(X^k)$.
       ii. En déduire une base de $\ker(f^2)$.
   (d) Déterminer de la même façon une base de $\ker(f^3)$.
   (e) En déduire la valeur de p_0.

6. Dans cette question, on revient au cas général où $n \in \mathbb{N}^*$. Soit f un endomorphisme non nul de E.
   (a) Établir pour tout entier naturel k, l'inclusion : $\ker(f^k) \subset \ker(f^{k+1})$.
   (b) A l'aide d'une démonstration par l'absurde et en raisonnant sur les dimensions, montrer qu'il existe un entier naturel m non nul pour lequel $\ker(f^m) = \ker(f^{m+1})$.
   (c) On note p_0 le plus petit des entiers naturels non nuls p pour lesquels $\ker(f^p) = \ker(f^{p+1})$.
   Démontrer que pour tout entier naturel k, on a : $\ker(f^{p_0}) = \ker(f^{p_0+k})$.
   (d) Montrer que $\mathrm{Im}(f^{p_0}) \oplus \ker(f^{p_0}) = E$.
   (e) Montrer que pour tout $k \geqslant p_0$, $\mathrm{Im}(f^k) \oplus \mathrm{Ker} f^k = E$.
   (f) Montrer que p_0 est le plus petit entier naturel p non nul tel que $\ker(f^p) \oplus \mathrm{Im}(f^p) = E$.

Exercice 2.

De façon générale, si E est un $\mathbb{K}$-ev et que $u \in \mathscr{L}(E)$, le *spectre* de u, noté $\mathrm{Sp}(u)$, est l'ensemble des valeurs $\lambda \in \mathbb{K}$ telles qu'il existe un vecteur $x \in E \setminus \{0_E\}$ qui vérifie $u(x) = \lambda x$. Les valeurs du spectre sont appelées les *valeurs propres* de u, et pour toute valeur propre λ, un $x \in E \setminus \{0_E\}$ qui vérifie $u(x) = \lambda x$ est appelé un *vecteur propre* de u associé à la valeur propre λ.

1. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Fixons $k \in \mathbb{N}^*$ et supposons qu'il existe k valeurs propres distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_k$. Considérons $x_1, \dots, x_k \in E \setminus \{0_E\}$ des vecteurs propres associés (respectivement) aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_k$.
   Montrer que $(x_1, \dots, x_k)$ est libre.
2. En déduire le cardinal maximal de $\mathrm{Sp}(u)$ si E est de dimension finie $n \in \mathbb{N}$.

Dans la suite, E désigne désormais un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \geqslant 2$. Soit s une symétrie de E telle que $s \neq \mathrm{Id}_E$ et $s \neq -\mathrm{Id}_E$. On note $F = \ker(s - \mathrm{Id}_E)$ et $G = \ker(s + \mathrm{Id}_E)$.

3. Montrer que $\mathrm{Sp}(s) = \{-1, 1\}$.

On note ϕ l'endomorphisme de $\mathscr{L}(E)$ (autrement dit, $\phi \in \mathscr{L}\big(\mathscr{L}(E)\big)$) défini par :

$$\phi : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E) & \longrightarrow & \mathscr{L}(E) \\ f & \longmapsto & \frac{1}{2}(s \circ f + f \circ s) \end{array} \right.$$

4. Calculer $\phi(\mathrm{Id}_E)$ et $\phi(s)$.
5. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que $f \in \ker(\phi)$ si et seulement si $f(G) \subset F$ et $f(F) \subset G$.
6. En déduire que 0 est valeur propre de φ.
7. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(\phi)$, et un vecteur propre f associé.
   Établir une relation entre $s(f(x))$ et $f(x)$ dans le cas où $x \in F$ puis $x \in G$.
8. Soit g un endomorphisme de E, non nul. Justifier qu'il existe $x \in F \cup G$ tel que $g(x) \neq 0_E$.
9. En déduire que $\mathrm{Sp}(\phi) \subset \{-1, 1, 0\}$
10. Montrer que $\mathrm{Sp}(\phi) = \{-1, 1, 0\}$.

Exercice 3.

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement positifs tels que la série de terme général $\dfrac{1}{a_n}$ converge.

Le but de ce problème est de prouver que la série de terme général $u_n = \dfrac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k}$ converge également et que, de plus, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n \leqslant 2 \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{a_n}$.

1. Étude d'un exemple : pour tout entier naturel n non nul, on pose $a_n = n(n+1)$.
   (a) Montrer que la série de terme général $\dfrac{1}{a_n}$ converge et donner sa somme.
   (b) Pour tout entier naturel non nul, déterminer u_n en fonction de n.
   (c) Établir la convergence de la série de terme général u_n et donner sa somme
   (d) En déduire ensuite l'inégalité demandée.
2. Étude d'un deuxième exemple : pour tout entier naturel n non nul, on pose $a_n = n!$.
   (a) Justifier la convergence de la série de terme général $\dfrac{1}{a_n}$ et sa somme.
   (b) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a : $u_n \leqslant \dfrac{1}{(n-1)!}$.
   (c) En déduire que la série de terme général u_n converge et que l'on a : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n \leqslant 2 \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{a_n}$.

On revient au cas général. On admet que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (\sum_{k=1}^{n} k)^2 \leqslant (\sum_{k=1}^{n} a_k)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{4}{a_2} + \cdots + \frac{n^2}{a_n}\right).$$

3. (a) Utiliser le résultat précédent pour établir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{2n+1}{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k} \leqslant 4\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right)\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{a_k}.$$

   (b) Montrer que pour $n \geqslant 2$, on a

$$\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right)\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{a_k} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k^2}{a_k} - \frac{1}{(n+1)^2}\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{a_k}$$

   (c) En déduire que :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{n=1}^{N} \frac{2n+1}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} \leqslant 4\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{a_n}.$$

   (d) Montrer que la série de terme général $\dfrac{2n+1}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}$ converge.
   (e) Montrer enfin que la série $\sum u_n$ converge et que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n \leqslant 2\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{a_n}$.

Correction du DS n 9, sujet 2

Exercice 1 *Dans tout ce problème, n est un entier supérieur ou égal à 1 et E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n.*

On note Id_E l'endomorphisme identité de E. Si f est un endomorphisme de E, on pose $f^0 = Id_E$ et pour tout entier $m \geqslant 1$, $f^m = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{m \text{ fois}}$. On note $0_{\mathscr{L}(E)}$ l'endomorphisme nul de E et 0_E le vecteur nul de E.

L'objectif de ce problème est de montrer que pour tout endomorphisme f non nul de E, il existe un entier naturel p non nul tel que $\ker(f^p) \oplus Im(f^p) = E$ et de déterminer l'entier p_0 qui est le plus petit des entiers pour lesquels cette égalité est vérifiée.

1. Soit $g, h \in \mathscr{L}(E)$, montrer que $\text{Ker}(g) \subset \text{Ker}(h \circ g)$ et $\text{Im}(h \circ g) \subset \text{Im}(h)$. Soit $x \in \text{Ker}(g)$, alors $g(x) = 0_E$ donc $h \circ g(x) = h(0_E) = 0_E$ car h est linéaire. On a bien $x \in \text{Ker}(h \circ g)$ d'où l'inclusion $\text{Ker}(g) \subset \text{Ker}(h \circ g)$.
   Soit maintenant $y \in \text{Im}(h \circ g)$. alors il existe $x \in E$ tel que $y = h \circ g(x) = h\big(g(x)\big)$ avec $g(x) \in E$. On a bien $y \in \text{Im}(h)$ d'où l'inclusion $\text{Im}(h \circ g) \subset \text{Im}(h)$.

   Mentionnez l'argument principal du raisonnement à savoir h linéaire et $g(x) \in E$.

2. (a) *On suppose que l'endomorphisme f est bijectif. Déterminer p_0.*
   Si f est bijectif, $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$, on a donc $\text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f) = E$ et $p_0 = 1$.

   Certains se sont noyés dans un verre d'eau sur cette question, invoquant notamment le thm du rang.

   (b) *On suppose que l'endomorphisme f est une projection. Déterminer p_0.*

   Si f est une projection, on sait que son noyau et son image sont supplémentaires dans E. À nouveau, on a donc $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ supplémentaires dans E.

   C'est du cours, inutile de le redémontrer.

3. *Soit f un endomorphisme de E vérifiant la relation $f \circ (f - Id_E)^2 = 0_{\mathscr{L}(E)}$.*

   (a) *Calculer $(f - Id_E)^2 + f \circ (2Id_E - f)$.*
   On a
   $$(f - Id_E)^2 + f \circ (2Id_E - f) = f^2 - 2f + Id_E + 2f - f^2 = Id_E.$$

   (b) *En déduire que* $\ker f \oplus Im f = E$. Soit $x \in E$, alors
   $$x = \underbrace{(f - Id_E)^2(x)}_{\in \text{Ker}(f)} + \underbrace{f(x - f(x))}_{\in \text{Im}(f)}.$$

   On a donc $E \subset \text{Im}(f) + \text{Ker}(f)$ d'où l'égalité puisque l'autre inclusion est claire. Or $\dim(E) = \dim\text{Ker}(f) + \text{rg}(f)$ d'après le théorème du rang. On en déduit que $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont en somme directe. On a donc bien $\ker f \oplus \text{Im} f = E$.

   On peut aussi montrer que la somme est directe à la main mais c'est plus rapide avec la dimension.

(c) *Montrer que* $\ker(f^2) \subset \ker(f)$.

Soit $x \in \mathrm{Ker}(f^2)$, alors $f^2(x) = 0_E$ donc $f(x) \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$. Or $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$ donc $f(x) = 0_E$ et x est bien un élément de $\mathrm{Ker}(f)$. On a montré l'inclusion $\mathrm{Ker}(f^2) \subset \mathrm{Ker}(f)$.

(d) *En déduire que* $\ker(f^2) \oplus Im(f^2) = E$.
On sait que $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2)$ d'après la question 1. On a donc $\mathrm{Ker}(f^2) = \mathrm{Ker}(f)$ et, par le théorème du rang $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f^2)$. Comme $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)$, on a donc $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$. On en déduit que $\mathrm{Ker}(f^2) \oplus \mathrm{Im}(f^2) = E$.

À nouveau, pensez dimension !

4. *Soit f un endomorphisme de E vérifiant la relation $(f + Id_E)^3 = Id_E$. On pose $g = f + Id_E$.*

(a) *Montrer que $Im(f) \subset \ker(g^2 + g + Id_E)$.*
Soit $y \in \mathrm{Im}(f)$. Alors il existe $x \in E$ tel que $y = f(x) = g(x) - x$. On a alors

$$g^2(y) + g(y) + y = g^3(x) - g^2(x) + g^2(x) - g(x) + g(x) - x = g^3(x) - x = 0_E,$$

car, par hypothèse, $g^3 = id_E$.

(b) *En déduire que* $\ker f \oplus Imf = E$.
On sait déjà, par le thm du rang, que $\dim\mathrm{Ker}(f) + \mathrm{rg}(f) = \dim(E)$, il suffit donc de montrer que $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$ sont en somme directe.
Soit donc $x \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$. Alors, d'après la question précédente, $f(x) = 0$ et $g^2(x) + g(x) + x = 0_E$. Or, $f(x) = 0_E$, implique $g(x) = x$ donc $g^2(x) + g(x) + x = 3x$. On obtient bien $x = 0_E$ donc $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) \subset \{0_E\}$ et l'autre inclusion est claire, la somme est donc bien directe. On a bien $\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = E$.

5. *Soit m un entier supérieur ou égal à 2. On suppose dans cette question l'existence de réels $a_1, a_2, \dots, a_m$ avec $a_1 \neq 0$, vérifiant la relation $a_1 f + a_2 f^2 + \cdots + a_m f^m = 0_{\mathscr{L}(E)}$.*
Montrer que $\ker f \oplus Imf = E$.
À nouveau, il suffit de montrer que $\mathrm{Im}(f)$ et $\ker(f)$ sont en somme directe. Soit donc $y \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$. Alors $y = f(x)$ avec $x \in E$. On a alors

$$a_1 f(x) + a_2 f^2(x) + \ldots + a_m f^m(x) = 0_E = a_1 f(x) + a_2 f(y) + \ldots + a_m f^{m-1}(y) = a_1 f(x).$$

On a supposé $a_1 \neq 0$ donc $f(x) = 0_E = y$. La somme est bien directe.

6. *On suppose dans cette question que $E = \mathbb{R}_5[X]$. Soit f l'unique endomorphisme de E tel que :*

$$f(1) = 1 + X^2,\ f(X) = 0,\ f(X^2) = 1 + X^2,\ f(X^3) = 0,\ f(X^4) = X^3,\ f(X^5) = X^3 + X^4.$$

(a) *Pourquoi f est-il bien défini ?* On a donné l'image par f d'une base de E, ce qui détermine f de manière unique.

(b) i. *Déterminer une base puis la dimension de Imf.*
On sait que

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{vect}\big(f(1), f(X), f(X^2), f(X^3), f(X^4), f(X^5)\big) = \mathrm{Vect}(1 + X^2, X^3, X^3 + X^4).$$

La famille $(1 + X^2, X^3, X^3 + X^4)$ est génératrice de $\mathrm{Im}(f)$ est libre car composée de polynômes non nuls de degrés distincts. On en déduit que c'est une base de $\mathrm{Im}(f)$ et que la dimension de cet espace est 3.

ii. *En déduire une base de* $\ker f$.
Par le théorème du rang, on a $\dim\mathrm{Ker}(f) = 3$. Par ailleurs, on a $f(1 - X^2) = f(X) = f(X^3)$ donc $(1 - X^2, X, X^3)$ est une famille de $\mathrm{Ker}(f)$. Elle est libre car composée de polynômes non nuls de degrés distincts et elle est de cardinal 3, c'est donc une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

(c) i. *Pour tout $k \in [\![0,5]\!]$, calculer $f^2(X^k)$.*
On a
— $f^2(1) = f(1) + f(X^2) = 2 + 2X^2 = f^2(X^2)$.
— $f^2(X) = f^2(X^3) = 0$
— $f^2(X^4) = f(X^3) = 0$
— et $f^2(X^5) = f(X^3) + f(X^4) = X^3$.

ii. *En déduire une base de* $\ker(f^2)$.
On en déduit que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(1+X^2, X^3)$ donc $\mathrm{rg}(f) = 2$. Par le thm du rang, $\dim\mathrm{Ker}(f) = 4$ et $(1-X^2, X, X^3, X^4)$ forme une famille libre de $\mathrm{Ker}(f^2)$, de cardinal 4, c'est donc une base de $\mathrm{Ker}(f^2)$.

oui c'est le même raisonnement mais mentionnez malgré tout les étapes du raisonnement.

(d) *Déterminer de la même façon une base de* $\ker(f^3)$.
On a
— $f^3(1) = 2f(1+X^2) = 4 + 4X^2 = f^3(X^2)$.
— $f^3(X) = f^3(X^3) = f^3(X^4) = 0$
— et $f^3(X^5) = f(X^3) = 0$.
On en déduit que $\mathrm{Im}(f^3) = \mathrm{Vect}(1+X^2)$ donc $\dim\mathrm{Ker}(f) = 5$ et $(X, X^3, X^4, X^5, 1-X^2)$ est une famille libre de $\ker(f)$ de cardinal 5 donc une base de $\mathrm{Ker}(f^3)$.

(e) *En déduire la valeur de p_0.* D'après les calculs effectués précédemment, on remarque que $\mathrm{Ker}(f^2)$ et $\mathrm{Im}(f^2)$ ne sont pas en somme directe puisqu'ils contiennent tous les deux X^3. En revanche, la concaténation d'une base de $\mathrm{Ker}(f^3)$ et d'une base de $\mathrm{Im}(f^3)$ est

$$\left(1+X^2, 1-X^2, X, X^3, X^4, X^5\right).$$

La famille $(1-X^2, 1+X^2)$ est libre et engendre $\mathrm{Vect}(1, X^2)$. On en déduit que

$$\mathrm{Vect}\left(1+X^2, 1-X^2, X, X^3, X^4, X^5\right) = \mathbb{R}_5[X],$$

donc la famille $\left(1+X^2, 1-X^2, X, X^3, X^4, X^5\right)$ est génératrice, de cardinal 6, donc forme une base de $\mathbb{R}_5[X]$. On a bien $\mathrm{Ker}(f^3) \oplus \mathrm{Im}(f^3) = \mathbb{R}_5[X]$ et $p_0 = 3$.

Il ne faut pas simplement montrer que 3 *convient mais aussi que c'est le plus petit.*

7. *Dans cette question, on revient au cas général où $n \in \mathbb{N}^*$. Soit f un endomorphisme non nul de E.*

(a) *À l'aide d'une démonstration par l'absurde et en raisonnant sur les dimensions, montrer qu'il existe un entier naturel m non nul pour lequel* $\ker(f^m) = \ker(f^{m+1})$.
On suppose, par l'absurde que pour tout $m \in \mathbb{N}^\star$, $\mathrm{Ker}(f^m) \neq \mathrm{Ker}(f^{m+1})$. On sait que $\mathrm{Ker}(f^m) \subset \mathrm{Ker}(f^{m+1})$, on en déduit que, pour tout $m \geqslant 1$, $\dim(\mathrm{Ker}(f^m)) < \dim\mathrm{Ker}(f^{m+1})$. La suite d'entiers $\left(\dim\mathrm{Ker} f^m\right)_{m\geqslant 1}$ est donc strictement croissante. Or, la dimension d'un ssev de E est majorée par la dimension n de E. On obtient une contradiction. On en déduit qu'il existe $m \geqslant 1$ tel que $\mathrm{Ker}(f^m) = \mathrm{Ker}(f^{m+1})$.

Précisez entiers!

(b) *On note p_0 le plus petit des entiers naturels non nuls p pour lesquels* $\ker(f^p) = \ker(f^{p+1})$.
Démontrer que pour tout entier naturel k, on a : $\ker(f^{p_0}) = \ker(f^{p_0+k})$.

On va raisonner par récurrence sur k. L'initialisation est vraie, par définition de p_0. Soit $k \geqslant 1$ tel que $\mathrm{Ker}(f^{p_0}) = \mathrm{Ker}(f^{p_0+k})$. Montrons que $\mathrm{Ker}(f^{p_0+k+1}) = \mathrm{Ker}(f^{p_0})$. On sait déjà que $\mathrm{Ker}(f^{p_0+k}) \subset \mathrm{Ker}(f^{p_0+k+1})$. Soit donc $x \in \mathrm{Ker}(f^{p_0+k+1})$, montrons que $x \in \mathrm{Ker}(f^{p_0+k})$. On a $f^{p_0+k+1}(x) = 0_E = f^{p_0+k}(f(x))$. On en déduit que $f(x) \in \mathrm{Ker}(f^{p_0+k})$. Or on a supposé $\mathrm{Ker}(f^{p_0}) = \mathrm{Ker}(f^{p_0+k})$, on peut donc affirmer que $f(x) \in \mathrm{Ker} f^{p_0}$, on a donc $f^{p_0+1}(x) = 0$. Or, $k \geqslant 1$, donc $f^{p_0+k}(x) =$

$f^{k-1} \circ f^{p_0+1}(x) = 0_E$. On a bien montré l'inclusion réciproque souhaitée. On a donc $\mathrm{Ker}(f^{p_0+k}) = \mathrm{Ker}(f^{p_0+k+1})$ donc $\mathrm{Ker}(f^{p_0}) = \mathrm{Ker}(f^{p_0+k+1})$.
Par le principe de récurrence, pour tout entier $k \geqslant 1$, on a $\mathrm{Ker}(f^{p_0}) = \mathrm{Ker}(f^{p_0+k})$.

(c) *Montrer que $Im(f^{p_0}) \oplus \ker(f^{p_0}) = E$.*
Il suffit de montrer que la somme est directe. En effet, si c'est le cas, on aura égalité des dimensions par le théorème du rang donc égalité des ensembles puisque $\mathrm{Ker}(f^{p_0})$ et $\mathrm{Im}(f^{p_0})$ sont des ssev de E.

Soit $x \in \mathrm{Ker}(f^{p_0}) \cap \mathrm{Im}(f^{p_0})$. Alors $x = f^{p_0}(a)$ et $f^{p_0}(x) = 0_E$. On a donc $f^{2p_0}(a) = 0_E$ c'est-à-dire $a \in \mathrm{Ker}(f^{2p_0})$. Or $2p_0 \geqslant p_0$ donc $\mathrm{Ker}(f^{2p_0}) = \mathrm{Ker}(f^{p_0})$. Ainsi, on a $a \in \mathrm{Ker}(f^{p_0})$ donc $f^{p_0}(a) = 0_E = x$. On a bien montré que la somme était directe.

(d) *Montrer que pour tout $k \geqslant p_0$, $Im(f^k) \oplus Ker f^k = E$.*
On sait que pour tout $k \geqslant p_0$, on a $\mathrm{Ker}(f^{p_0}) = \mathrm{Ker}(f^k)$ et, par suite,

$$\mathrm{rg}(f^k) = n - \dim\ker f^k = n - \dim\ker f^{p_0} = \mathrm{rg} f^{p_0}.$$

Or $\mathrm{Im} f^k \subset \mathrm{Im} f^{p_0}$ d'après la première question. Par l'égalité des dimensions, on en déduit que $\mathrm{Im}(f^k) = \mathrm{Im} f^{p_0}$. On a donc bien $\mathrm{Im}(f^k) \oplus \mathrm{Ker}(f^k) = E$ puisque l'égalité est vérifiée par p_0.

(e) *Montrer que p_0 est le plus petit entier naturel p non nul tel que* $\ker(f^p) \oplus Im(f^p) = E$.

Si $p_0 = 1$, le résultat est clair. Si $p_0 > 1$, il suffit de montrer que $\mathrm{Ker}(f^{p_0-1})$ et $\mathrm{Im}(f^{p_0-1})$ ne sont pas en somme directe. En effet, s'il existe un entier $0 < k < p_0$ tel que $\mathrm{Ker}(f^k) \oplus \mathrm{Im}(f^k) = E$, alors, d'après la question précédente, l'égalité sera vraie pour tous les entiers supérieurs à k donc, en particulier, pour $p_0 - 1$.
Par définition de p_0, on sait que $\mathrm{Ker}(f^{p_0-1}) \subsetneq \mathrm{Ker}(f^{p_0})$. Il existe donc $a \in \mathrm{Ker}(f^{p_0}) \setminus \mathrm{Ker}(f^{p_0-1})$.
On a alors $f^{p_0-1}(a) \neq 0_E$ et $f^{p_0-1}(a) \in \mathrm{Im}(f^{p_0-1})$. De plus, $f^{p_0-1}\left(f^{p_0-1}(a)\right) = f^{2p_0-2}(a)$ et $2p_0 - 2 \geqslant p_0 \Leftrightarrow p_0 \geqslant 2$. La deuxième inégalité est vraie donc, par équivalence, la première l'est aussi. On en déduit que $f^{2p_0-2}(a) = 0_E$ donc $f^{p_0-1}(a) \in \mathrm{Ker}(f^{p_0-1}) \cap \mathrm{Im} f^{p_0-1}$ et on a trouvé un élément non nul de l'intersection, la somme n'est donc pas directe.
On a bien montré que p_0 est le plus petit entier non nul tel que $\mathrm{Im}(f^{p_0})) \oplus \mathrm{Ker}(f^{p_0}) = E$.

Exercice 2 1. Récurrence finie. Pour tout $p \in [\![1, k]\!]$, on pose

$$\mathscr{H}(p) : \text{"}(x_1, \dots, x_p) \text{ est libre"}.$$

— Initialisation. $\mathscr{H}(1)$ signifie que (x_1) est libre, ce qui est vrai, car $x_1 \neq 0$.
— Hérédité. Soit $p \in [\![1, k-1]\!]$. On suppose $\mathscr{H}(p)$. Montrons $\mathscr{H}(p+1)$.
Soit $a_1, \dots, a_{p+1} \in \mathbb{K}$. On suppose que

$$a_1 x_1 + \cdots + a_p x_p + a_{p+1} x_{p+1} = 0 \qquad (L_1)$$

On applique u :

$$a_1 \lambda_1 x_1 + \cdots + a_p \lambda_p x_p + a_{p+1} \lambda_{p+1} x_{p+1} = 0 \qquad (L_2)$$

On fait $L_2 - \lambda_{p+1} L_1$:

$$a_1(\lambda_1 - \lambda_{p+1}) x_1 + \cdots + a_p(\lambda_p - \lambda_{p+1}) x_p = 0$$

D'après $\mathscr{H}(p)$, la famille $(x_1, \dots, x_p)$ est libre. Donc pour tout $i \in [\![1, p]\!]$:

$$a_i \underbrace{(\lambda_i - \lambda_{p+1})}_{\neq 0} = 0 \qquad \text{ce qui implique} \qquad a_i = 0.$$

On reprend alors (L_1). Il reste $a_{p+1} x_{p+1} = 0$, ce qui implique $a_{p+1} = 0$, car $x_{p+1} \neq 0$.
Finalement, tous les a_i sont nuls.
$\mathscr{H}(p+1)$ est bien démontrée.

— Conclusion : $\forall p \in [\![1, k]\!]$, $\mathscr{H}(p)$ est vraie, et en particulier $\mathscr{H}(k)$.

2. Si E est de dimension n, une famille libre ne peut contenir que n vecteurs au maximum. Donc $\mathrm{Card}(\mathrm{Sp}(u)) \leqslant n$.
Ce majorant peut être atteint. En effet, si l'on fixe une base $(b_1, \ldots, b_n)$ de E, on sait qu'un endomorphisme u est entièrement défini par l'image de cette base. Il suffit de définir u en posant par exemple :
$$u(b_1) = b_1 \qquad u(b_2) = 2b_2 \qquad u(b_3) = 3b_3 \qquad \ldots \qquad u(b_n) = nb_n$$
ou autrement dit $u(b_k) = kb_k$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$. Par construction, les $k \in [\![1, n]\!]$ sont des valeurs propres, et il y en a n, d'où $\mathrm{Card}(\mathrm{Sp}(u)) = n$.

3. — Montrons $\mathrm{Sp}(s) \subset \{-1, 1\}$.
Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(s)$. Il existe $x \in E$ non nul tel que $s(x) = \lambda x$. On applique s à cette égalité (on sait que $s \circ s = \mathrm{Id}_E$) :
$$\underbrace{s \circ s(x)}_{=x} = \lambda s(x) = \lambda.\lambda x = \lambda^2 x$$
D'où $x = \lambda^2 x$, et comme x est non nul, $1 = \lambda^2$, d'où $\lambda \in \{-1, 1\}$.
► Montrons $\{-1, 1\} \subset \mathrm{Sp}(s)$.
N'importe quel vecteur $x \in F$ vérifie $s(x) = x$, par définition de F. Encore faut-il que F contienne un vecteur non nul. Mais c'est le cas car si $F = \{0\}$, comme $F \oplus G = E$, on aurait $G = E$, et donc $s = -\mathrm{Id}_E$, ce qui n'est pas le cas. Donc F contient un vecteur non nul, qui est donc un vecteur propre pour la valeur propre 1. D'où $1 \in \mathrm{Sp}(s)$.
De même, G contient un vecteur non nul, et $-1 \in \mathrm{Sp}(s)$. D'où $\{-1, 1\} \subset \mathrm{Sp}(s)$.

Conclusion : $\mathrm{Sp}(s) = \{-1, 1\}$

l'inclusion réciproque a souvent été oubliée.

4. On a
— $\varphi(\mathrm{Id}_E) = \dfrac{1}{2}(s \circ \mathrm{Id}_E + \mathrm{Id}_E \circ s) = s$.
— $\phi(s) = \dfrac{1}{2}(s \circ s + s \circ s) = \mathrm{Id}_E$.

5. On raisonne par double implication. Montrons $(\Rightarrow)$: soit $f \in \ker(\phi)$, on a $\varphi(f) = 0$ i.e. $s \circ f = -f \circ s$.
— Soit $y \in f(G)$, montrons que $y \in F$ i.e. $s(y) = y$.
$y \in f(G)$ donc il existe $x \in G$ tq $y = f(x)$.
$s(y) = s \circ f(x) = -f \circ s(x)$ car $s \circ f = -f \circ s$.
Or $x \in G$ donc $s(x) = -x$.
Ainsi $s(y) = -f(-x) = f(x) = y$, on a bien $y \in F$.
Ce travail, valable pour tout $y \in f(G)$, montre que $\boxed{f(G) \subset F}$.
— Soit $y \in f(F)$, montrons que $y \in G$ i.e. $s(y) = -y$.
$y \in f(F)$ donc il existe $x \in F$ tq $y = f(x)$.
$s(y) = s \circ f(x) = -f \circ s(x)$ car $s \circ f = -f \circ s$.
Or $x \in F$ donc $s(x) = x$.
Ainsi $s(y) = -f(x) = -y$, on a bien $y \in G$.
Ce travail montre $\boxed{f(F) \subset G}$.

Montrons $(\Leftarrow)$: supposons $f(G) \subset F$ et $f(F) \subset G$. Montrons que $f \in \ker(\phi)$.
Soit $x \in E$. Il existe un unique couple $(x_F, x_G) \in F \times G$ tq $x = x_F + x_G$ (car $E = F \oplus G$).

On a

$$\begin{aligned}\phi(f)(x) &= \frac{1}{2}\big(s\circ f(x)+f\circ s(x)\big)\\ &= \frac{1}{2}\big(s\circ f(x_F+x_G)+f\circ s(x_F+x_G)\big)\\ &= \frac{1}{2}\big(s\circ f(x_F)+s\circ f(x_G)+f\circ s(x_F)+f\circ s(x_G)\big)\end{aligned}$$

Or :
— $f(x_F)\in f(F)\subset G$ donc $s\circ f(x_F)=-f(x_F)$;
— $f(x_G)\in f(G)\subset F$ donc $s\circ f(x_G)=f(x_G)$;
— $s(x_F)=x_F$ car $x_F\in F$ donc $f\circ s(x_F)=f(x_F)$;
— $s(x_G)=-x_G$ car $x_G\in G$ donc $f\circ s(x_G)=f(-x_G)=-f(x_G)$.
Ainsi

$$\begin{aligned}\phi(f)(x) &= \frac{1}{2}\big(-f(x_F)+f(x_G)+f(x_F)-f(x_G)\big)\\ &= 0.\end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout $x\in E$, on a $\phi(f)=0$ et donc $\boxed{f\in\ker\phi}$.

6. Montrons que 0 est valeur propre de ϕ. Cela signifie précisément que $\ker(\phi)$ n'est pas réduit à 0. Pour le montrer, utilisons la question précédente pour construire un endomorphisme f non nul qui appartient à $\ker(\phi)$. On sait donc qu'il suffit pour cela que $f(G)\subset F$ et $f(F)\subset G$.

   Notons $k=\dim(F)\geqslant 1$ et $p=\dim(G)\geqslant 1$ et notons $(b_1,\dots,b_k)$ une base de F et $(c_1,\dots,c_p)$ une base de G. Comme $F\oplus G=E$, la famille $(b_1,\dots,b_k,c_1,\dots,c_p)$ est une base de E. Un endomorphisme étant entièrement caractérisé par l'image d'une base, on peut définir f en posant :

$$\begin{cases}\forall i\in[\![1,k]\!],\ f(b_i)=c_1\\ \forall j\in[\![1,p]\!],\ f(c_j)=b_1\end{cases}$$

   De cette façon, $f(F)=\mathrm{Vect}(c_1)\subset G$ et $f(G)=\mathrm{Vect}(b_1)\subset F$. D'où $f\in\ker(\phi)$, et $f\neq 0$.
   Cela prouve que $0\in\mathrm{Sp}(\phi)$, et finalement, $\{-1,1,0\}\subset\mathrm{Sp}(\phi)$.

   Mentionnez simplement "d'après la question précédente" ne suffit pas, il y a du travail!

7. On a $\varphi(f)=\lambda f$ i.e. $f\circ s+s\circ f=2\lambda f$.

   — Soit $x\in F$, on a $f\circ s(x)+s\circ f(x)=2\lambda f(x)$.
   Or $s(x)=x$ donc $f(x)+s\circ f(x)=2\lambda f(x)$. Ainsi

$$\boxed{s\circ f(x)=(2\lambda-1)f(x).}$$

   — Soit $x\in G$, on a $f\circ s(x)+s\circ f(x)=2\lambda f(x)$.
   Or $s(x)=-x$ donc $f\circ s(x)=f(-x)=-f(x)$. On a donc $-f(x)+s\circ f(x)=2\lambda f(x)$. Ainsi

$$\boxed{s\circ f(x)=(2\lambda+1)f(x).}$$

8. On suppose par l'absurde que pour tout $x\in F\cup G$, $g(x)=0$.
   Soit $x\in E$, $x=x_F+x_G$ avec $x_F\in F$ et $x_G\in G$ car $E=F\oplus G$.
   On a $g(x)=g(x_F+x_G)=g(x_F)+g(x_G)$.
   Or $g(x_F)=g(x_G)=0$ car $x_F,x_G\in F\cup G$.
   Ainsi $g(x)=0$ et ceci pour tout x de E. Donc g est l'application nulle. **CONTRADICTION**.

   On peut aussi dire qu'il existe $x\in E$ tel que $g(x)\neq 0_E$. Il existe $(a,b)\in F\times G$ tel que $x=a+b$. On a alors $g(x)=g(a)+g(b)$ et $g(a)\neq 0_E$ ou $g(b)\neq 0_E$.

9. Montrons $\mathrm{Sp}(\phi) \subset \{-1,1,0\}$.
Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(\phi)$. Il existe $f \in \mathscr{L}(E)$ non nul tel que $\phi(f) = \lambda f$. Les deux questions précédentes montrent qu'il existe $x \in F \cup G$ tel que $f(x) \neq 0$, et ce x vérifie l'une ou l'autre des égalités :

$$s(f(x)) = (2\lambda - 1) f(x) \qquad \text{ou} \qquad s(f(x)) = (2\lambda + 1) f(x)$$

Cela montre que l'une des deux valeurs $(2\lambda - 1)$ ou $(2\lambda + 1)$ est valeur propre de s (avec pour vecteur propre $f(x)$). Or, on sait que les valeurs propres de s sont 1 et -1. En étudiant les 4 cas, on obtient que λ vaut 1, -1 ou 0.

10. Montrons $\{-1,1,0\} \subset \mathrm{Sp}(\phi)$.
Comme $\phi(\mathrm{Id}_E) = s$ et $\phi(s) = \mathrm{Id}_E$, on a :

$$\phi(\mathrm{Id}_E + s) = s + \mathrm{Id}_E = \mathrm{Id}_E + s \qquad \text{et} \qquad \phi(\mathrm{Id}_E - s) = s - \mathrm{Id}_E = -(\mathrm{Id}_E - s)$$

Cela montre que $(\mathrm{Id}_E + s)$ et $(\mathrm{Id}_E + s)$ (qui sont bien des endomorphismes non nuls par hypothèse sur s) sont des vecteurs propres pour les valeurs propres 1 et -1. D'où $\{-1,1\} \subset \mathrm{Sp}(\phi)$.
On a montré à la question 6 que 0 est également valeur propre de ϕ, on a donc bien l'égalité $\mathrm{Sp}(\phi) = \{-1,1,0\}$

Conclusion : $\mathrm{Sp}(\phi) = \{-1,1,0\}$

Exercice 3 Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement positifs tels que la série de terme général $\dfrac{1}{a_n}$ converge.
Le but de ce problème est de prouver que la série de terme général $u_n = \dfrac{n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}$ converge également et que, de plus, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \leqslant 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n}$.

1. Étude d'un exemple : pour tout entier naturel n non nul, on pose $a_n = n(n+1)$.
   (a) *Montrer que la série de terme général $\dfrac{1}{a_n}$ converge et donner sa somme.*
   Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, on écrit $\dfrac{1}{a_n} = \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$. La suite $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge, on en déduit que la série télescopique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{a_n}$ converge et sa somme vaut 1.
   (b) *Pour tout entier naturel non nul, déterminer u_n en fonction de n.*
   Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$. On a donc $u_n = \dfrac{3}{(n+1)(n+2)}$.
   (c) *Établir la convergence de la série de terme général u_n et donner sa somme.*
   On utilise, à nouveau, une décomposition en éléments simples : $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $u_n = \dfrac{3}{n+1} - \dfrac{3}{n+2}$.
   La série télescopique $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est donc convergente, de somme $\dfrac{3}{2}$.
   (d) *En déduire ensuite l'inégalité demandée.*
   On a bien $\dfrac{3}{2} \leqslant 2$ donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} u_k \leqslant 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n}$.
2. Étude d'un deuxième exemple : pour tout entier naturel n non nul, on pose $a_n = n!$.

(a) *Justifier la convergence de la série de terme général $\dfrac{1}{a_n}$ et sa somme.*

On reconnaît presque la série exponentielle $\sum_{n\geqslant 0} \dfrac{x^n}{n!}$ avec $x = 1$, sauf qu'ici la série commence à 1. La série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{a_n}$ est donc convergente, de somme $e-1$.

(b) *Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a : $u_n \leqslant \dfrac{1}{(n-1)!}$.*

Pour tout $n \geqslant 1$, on a $\sum_{k=1}^{n} k! \geqslant n!$ donc $\dfrac{n}{\sum_{k=1}^{n} k!} \leqslant \dfrac{n}{n!}$ d'où l'inégalité souhaitée.

(c) *En déduire que la série de terme général u_n converge et que l'on a : $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \leqslant 2\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{a_n}$.*

Par comparaison des séries à termes positifs, la série de terme général u_n converge et $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{(n-1)!}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{n!} = e$. On a $e \leqslant 2(e-1) \Leftrightarrow e \geqslant 2$ et la deuxième inégalité est vraie, on a donc bien

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \leqslant 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n}.$$

On revient au cas général. On admet que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (1+2+\cdots+n)^2 \leqslant (a_1+a_2+\cdots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{4}{a_2}+\cdots+\frac{n^2}{a_n}\right).$$

3. (a) *Utiliser le résultat précédent pour établir que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{2n+1}{\sum_{k=1}^{n} a_k} \leqslant 4\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{a_k}.$$

Soit $n \geqslant 1$. On commence par écrire

$$\begin{aligned}
& \frac{2n+1}{a_1+a_2+\cdots+a_n} \leqslant 4\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{a_k} \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{2n+1}{a_1+a_2+\cdots+a_n} \leqslant 4\left(\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}\right)\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{a_k} \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{n^2(n+1)^2}{4} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\frac{k^2}{a_k}\right) \\
\Leftrightarrow\quad & \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\frac{k^2}{a_k}\right)
\end{aligned}$$

On a admis que la dernière inégalité était vraie. Par équivalence, on a bien

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{2n+1}{a_1+a_2+\cdots+a_n} \leqslant 4\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{a_k}.$$

(b) *Montrer que pour $n \geqslant 2$, on a*

$$\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{a_k} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k^2}{a_k} - \frac{1}{(n+1)^2}\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{a_k}$$

Soit $n \geqslant 2$. On écrit

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{a_k} &= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{a_k}-\frac{1}{(n+1)^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{a_k}\\ &= \underbrace{\frac{1}{a_n}}_{k=n}+\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k^2}{a_k}-\frac{1}{(n+1)^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{a_k}\end{aligned}$$

(c) *En déduire que :*

$$\forall N\in\mathbb{N}^*,\ \sum_{n=1}^{N}\frac{2n+1}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\leqslant 4\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{a_n}.$$

Pour $N=1$, l'inégalité s'écrit $\dfrac{3}{a_1}\leqslant\dfrac{4}{a_1}$, elle est bien vraie. Soit maintenant $N\geqslant 2$. D'après la question précédente, pour tout $n\in[\![2,N]\!]$, on a

$$\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{a_k}=\frac{1}{a_n}+\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k^2}{a_k}-\frac{1}{(n+1)^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{a_k}$$

donc

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{N}\left[\left(\tfrac{1}{n^2}-\tfrac{1}{(n+1)^2}\right)\textstyle\sum_{k=1}^{n}\dfrac{k^2}{a_k}\right] &= \sum_{n=2}^{N}\left[\frac{1}{a_n}+\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k^2}{a_k}-\frac{1}{(n+1)^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{a_k}\right]\\ &= \sum_{n=2}^{N}\frac{1}{a_n}+\sum_{n=2}^{N}\left[\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k^2}{a_k}-\frac{1}{(n+1)^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{a_k}\right]\\ &= \sum_{n=2}^{N}\frac{1}{a_n}+\frac{1}{4}\frac{1^2}{a_1}-\frac{1}{(N+1)^2}\sum_{k=1}^{N}\frac{k^2}{a_k}\\ &\quad\text{car on reconnaît une somme télescopique}\\ &\leqslant \sum_{n=2}^{N}\frac{1}{a_n}+\frac{1}{4}\frac{1^2}{a_1}\end{aligned}$$

donc

$$\sum_{n=2}^{N}\frac{2n+1}{\sum\limits_{k=1}^{n}a_k}\leqslant 4\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_1}.$$

On a donc, en rajoutant le premier terme de la somme :

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{2n+1}{\sum\limits_{k=1}^{n}a_k}\leqslant\frac{3}{a_1}+4\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_1},$$

d'où

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{2n+1}{\sum\limits_{k=1}^{n}a_k}\leqslant 4\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{a_n}.$$

La formule de la question précédente n'a été montré que pour $n\geqslant 2$, vous ne pouvez donc pas sommer directement de 1 à N. On pouvait remarquer (et donc mentionner clairement) que la formule précédente était valable pour $n=1$ en considérant qu'une somme sur un ensemble vide est nulle.

(d) *Montrer que la série de terme général $\dfrac{2n+1}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$ converge.*

La série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{a_n}$ est à termes positifs et convergente. Sa somme partielle est donc majorée par sa somme. D'après la question précédente, la suite de terme général $S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{2n+1}{\sum_{k=1}^{n} a_k}$ est majorée par $4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n}$ et elle est croissante car $\frac{2n+1}{a_1+\ldots+a_n} > 0$. On peut donc affirmer qu'elle converge par le thm de la limite monotone.

(e) *Montrer enfin que la série* $\sum u_n$ *converge et que* $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \leqslant 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^{\star}$, on a

$$0 \leqslant \frac{n}{\sum_{k=1}^{n} a_k} \leqslant \frac{1}{2} \frac{2n+1}{\sum_{k=1}^{n} a_k},$$

et $\frac{2n+1}{\sum_{k=1}^{n} a_k}$ est le terme général d'une série convergente donc, par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge et

$$\frac{n}{\sum_{k=1}^{n} a_k} \leqslant \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+1}{\sum_{k=1}^{n} a_k} \leqslant \frac{4}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n}.$$

On a bien l'inégalité souhaitée.

On raisonne sur les termes généraux (sauf quand on n'a pas le choix comme à la question précédente!)